This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

University of Wisconsin
LIBRARY
Class T.b
Book .W435
2

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Unterrichtshefte

für den gesammten

Maschinenbau

und

die ihm verwandten Zweige des technischen Wissens.

In sechs Bänden.

Unter Mitwirkung

einer Anzahl Lehrer und Professoren deutscher technischer Lehranstalten

herausgegeben von

Carl Georg Weitzel,
Ingenieur und Direktor des Technikum Mittweida.

Mit 652 Holzschnitten und 101 Tafeln Constructions-Zeichnungen.

Zweiter Band.

Leipzig.
Verlag von Moritz Schäfer, Buchhandlung.
1878.

Digitized by Google

Maschinenbau.

Zweiter Band.

Mit 221 Holzschnitten im Texte und 80 colorirten Tafeln

enthaltend:

Die Maschinen-Elemente.

Leipzig.
Verlag von Moritz Schäfer, Buchhandlung.
1878.

Digitized by Google

Digitized by Google

TE
2
68122202

Inhalt.

	Seite
Festigkeit der Maschinentheile	3— 87
VI. Zapfen, Axen und Wellen. Einleitung	88
1. Zapfen	88—100
2. Axen	100—131
3. Wellen	131—147
VII. Kupplungen	147—170
VIII. Räderwerke	170—370
Kurbelmechanismus, Kurbeln	370—393
Excenter	393—397
Kreuzköpfe	397—401
Pleuelstangen	401—409
Kolben und Kolbenstangen	409—414

Digitized by Google

Digitized by Google

Maschinenbau.

Zweiter Band.

Digitized by Google

Digitized by Google

Festigkeit der Maschinentheile.

Einleitung.

Die Gesammtheit der Regeln, Formeln und Beispiele, welche sich auf die Berechnung von festen Körpern aus den auf dieselben einwirkenden Kräften beziehen, nennt man, wenn sie gehörig entwickelt und geordnet sind, in der Wissenschaft kurzweg „Festigkeitslehre", „Festigkeitstheorie", „Lehre von der Festigkeit der Materiale", „Gleichgewicht der Theile fester Körper untereinander", „Elasticität und Festigkeit" ꝛc., und es bilden dieselben entweder einen Theil der „Mechanik", des „Maschinenbau's" oder werden speciell für sich allein behandelt.

Der Inhalt der „Festigkeitslehre" erstreckt sich danach auf die Zusammenstellung der Beobachtungsresultate, welche man bei festen Körpern, die unter der Einwirkung von äußeren, mechanischen, d. h. formverändernden Kräften stehen, gefunden hat, sowie auf das Einkleiden derselben in Formeln und Regeln und die Verwendung auf Beispiele der praktischen Technik.

Daraus geht hervor, daß die Festigkeitslehre in das Gebiet der Naturwissenschaften gehört; denn es sind vor Allem Naturstoffe, die darin für die Beobachtung zu Grunde gelegt werden. Es gehört ferner insbesondere diese Disciplin in das Reich der Physik, weil ausschließlich die Veränderungen beobachtet werden, welche Kräfte an den zu untersuchenden Stoffen hervorbringen, nnd weiter gehört sie zur eigentlichen Physik (Chemie ausgeschlossen), weil die Körper nur unter Einwirkung mechanischer, den Molecularzusammenhang beeinflussender Kräfte beobachtet werden, während chemische, stoffliche Veränderungen im Allgemeinen ausgeschlossen sind, sofern sie nicht die Wirkung der Molecularkräfte wesentlich beeinflussen.

Die Methode der Festigkeitslehre besteht nun darin, die Veränderungen, welche mechanische Kräfte unter gewissen Umständen an irgend einem bestimmten festen Körper hervorbringen, zu beobachten, den Gleichgewichtszustand zwischen den äußeren (den Körper verändernden) und den inneren (diesen Veränderungen widerstrebenden) Kräften in Form von algebraischen Ausdrücken darzustellen und für analoge Fälle der Praxis einzurichten und zu verwenden.

Wir beschränken uns an dieser Stelle darauf, nur das für den Maschinentechniker, diesem aber für die rationelle Ausübung seines Berufes so außerordentlich wichtige Material aus der Festigkeitslehre überhaupt hervorzuheben und bezeichnen deshalb diese Abhandlung nur als „Festigkeit der Maschinentheile", während wir Beispielen aus dem Hoch- und Brückenbau nur insoweit Berücksichtigung zukommen lassen werden, als dieselben durch ihr allgemeines Interesse verdienen.

Digitized by Google

Erklärung und Eintheilung.

Die Naturkörper besitzen verschiedene Eigenschaften, auf Grund deren dieselben überhaupt erst, und zwar vermittelst unserer Sinnesorgane, für uns wahrnehmbar werden. Wir beobachten und untersuchen die Körper auf ihre Eigenschaften und ordnen sie darnach, wie sich dieselben den Beobachtungen durch Gesicht und Gefühl ꝛc. gegenüber verhalten, in verschiedene Abtheilungen und Unterabtheilungen, wir benennen sie und bringen sie in ein System. Das ist die Methode der Naturbeschreibung.

Mehrere solcher Eigenschaften sind den Körpern, insbesondere auch den festen Körpern gemeinsam und werden deshalb „allgemeine Eigenschaften der festen Körper" genannt. Dahin gehören unter anderen die Form, Größe, Schwere, Trägheit, Farbe, Härte, Elasticität und Festigkeit ꝛc. Form und Größe der materiellen Körper erkennen wir mit den Augen und dem Tastsinne; die Farbe ist gewöhnlich nur durch das Gesichtsorgan zu beobachten. Die Schwere untersuchen wir mit dem Gefühle, indem wir den Körper in die Hand nehmen und den Druck, welchen er zufolge der Anziehung seitens der Erde auf die Hand ausübt, in Gewichtseinheiten ausdrücken. Die Trägheit, d. i. die Beharrung der Körper in dem einmal angenommenen Zustande — das Streben, den augenblicklichen Zustand der Form oder Bewegung ohne besondere Anregung (Kraftwirkung) nicht zu ändern — ist eine Eigenthümlichkeit, die wir allen materiellen Stoffen beilegen, weil nach unserer Beobachtung überhaupt die leblose Materie keine Veränderung eigenmächtig vornehmen kann.*)

Die materiellen, insbesondere die festen Stoffe besitzen ferner eine Eigenschaft, deren Vorhandensein wir zwar sofort mit den Augen wahrnehmen (wenn wir z. B. bedenken, daß ein fester Körper auf einem andern ruht, ohne daß letzterer zusammenbricht, daß ein Baum seine Aeste trägt, daß ein durch Gewichte oder andere Körper belasteter Gegenstand nicht allemal bricht u. s. f.), deren Größe oder Grad wir jedoch nur beurtheilen, messen können, wenn wir mit einem gleichartigen Stoffe experimentiren. Wir meinen die Festigkeit im Allgemeinen. Mit dieser Eigenschaft hat es eine ähnliche Bewandtniß wie mit der Trägheit; ja man kann sogar die Festigkeit als eine besondere Art der Trägheit bezeichnen. Verstehen wir nämlich zunächst unter **Festigkeit eines Körpers** den Widerstand, welchen derselbe der Verschiebung und Trennung (Lagenänderung) seiner materiellen Theile entgegenstellt, so haben wir dieselbe Erklärung wie für die Trägheit, aber speciell bezogen auf die Theile eines Körpers, während Trägheit als eine Eigenschaft der Materie im Allgemeinen bezeichnet wird.

---

*) In den Pflanzen und Thieren hat eine Kraft ihren Sitz, welche die Ursache mehrerer Veränderungen ist und welche wir ohne besondere Experimente beobachten können: das ist die Kraft, welche den Stoffwechsel in diesen Geschöpfen besorgt, welche also das Leben, das Wachsthum und die Fortpflanzung derselben bedingt, und die man daher als Lebenskraft bezeichnet. Ohne diese Kraft ist der Körper todt, und nur der Schöpfer selbst vermag über diese Kraft zu verfügen.

Digitized by Google

In inniger Beziehung zur Festigkeit stehen auch die Härte und Dichtheit, Porosität, Sprödigkeit und Zähigkeit, nur werden sie in anderer Weise beurtheilt und gemessen; keines ist durch das andere nothwendiger Weise bedingt (Glas). —

Das Experiment der Untersuchung eines festen Körpers auf seine Festigkeit besteht nun darin, daß man die Größe des Widerstandes, den er der vorübergehenden oder dauernden Lagenänderung (Trennung ist nur ein höherer Grad der dauernden Lagenänderung) seiner materiellen Theile darbietet, für die Beobachtung zugänglich macht und womöglich in einer Maßeinheit darstellt. Widerstand ist aber soviel wie Kraft, und Kraft messen wir durch Vergleichung mit Schwere oder Gewicht. Ebenso drücken wir den Grad der Festigkeit bei den verschiedenen Körpern in Gewichtseinheiten aus.

Unter Widerstand denken wir uns ferner die Gegenwirkung einer Kraft, welche diese (z. B. Schwere), durch die Wirkung einer andern Kraft veranlaßt, herbringt und wissen, daß dem Werthe nach stets die Wirkung gleich der Gegenwirkung ist. Deshalb lassen wir bei unserem Experimente eine Kraft auf den zu untersuchenden Körper wirken, und zwar so, daß die materiellen Theile desselben aus ihrer ursprünglichen Lage gebracht werden. Wenn aber dazu eine von außen wirkende Kraft nothwendig ist, so muß andererseits im Innern des Körpers eine Kraft existiren, welche den ursprünglichen Zustand in der Anordnung der Theile aufrecht erhält und, wenn eine Veränderung mit dem Körper vorgehen soll, nothwendigerweise überwunden werden muß. Das ist die Cohäsion, eine zwischen den Molecülen des Körpers wirksame Kraft, welche den (Aggregat-) Zustand eines Körpers bedingt. Je größer nun diese Cohäsion ist, die sich theils in einer Anziehung (Attraction), theils in einer Abstoßung (Repulsion) äußert, desto mehr Kraft werden wir aufwenden müssen, um die Lage der materiellen Theile des Körpers zu verändern, resp. eine Trennung desselben herbeizuführen. — Unser Experiment läuft also schließlich auf ein Messen der Molecularkraft „Cohäsion" hinaus; dies geschieht aber, indem wir die dem Widerstande gleiche Kraft messen, also diejenige Wirkung, welche wir selbst auf den Körper bei der Lagenänderung oder Trennung seiner Theile ausüben.

Experimente mit gleichartigen Stoffen und unter denselben Verhältnissen liefern *dieselben*, Experimente mit verschiedenen Stoffen und unter denselben oder verschiedenen Verhältnissen liefern *verschiedene* Resultate. —

Die *Grundlage für die Eintheilung* des in der Festigkeitslehre zu verarbeitenden Stoffes bildet die Richtung der von außen auf den Körper einwirkenden Kraft in Bezug auf die Befestigungsstelle desselben, sowie auf die Richtung seiner Schwerpunktsaxe.*)

Dabei machen wir einige die allgemeine Betrachtung und namentlich auch die Anschauung wesentlich vereinfachende Voraussetzungen.

Zunächst denken wir uns, daß in jedem Falle die *Schwere* oder das Gewicht diejenige Kraft sei, welche den Körper beansprucht, daß also diese Kraft stets vertical abwärts gerichtet sei. Alsdann ist die Lage des Körpers im Raume und seine Befestigung an einer festen Fläche in den einzelnen Fällen

*) Schwerpunktsaxe oder geometrische Axe überhaupt nennt man die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller nach einer Richtung parallelen Querschnitte eines Körpers.

Digitized by Google

bedingt. — Wir unterstellen ferner vorläufig unserer Betrachtung nur Körper von einfacher, und zwar von prismatischer Form; man spricht auch kurzweg „stabförmige". Dieselben haben nämlich rechtwinklig zur Schwerpunktsaxe congruente Querschnitte — diese sind zunächst beliebig, am einfachsten kreis- oder rechteckförmig, quadratisch ꝛc. — und die Schwerpunktsaxe ist im unveränderten Zustande geradlinig. — Endlich sehen wir vorläufig von der Art des Materiales ganz ab, setzen aber voraus, daß dasselbe innerhalb eines und desselben Körpers vollkommen homogen, d. h. gleichartig sei, sodaß die Form und Dichtheit der Atomablagerung in jedem Theile gleich, also das Gewicht und die Stärke der Molecularkräfte überall identisch gedacht werden. —

In Fig. 59 stelle AB die geometrische oder Schwerpunktsaxe eines prismatischen Körpers, z. B. mit kreisförmigem Querschnitte (Cylinder) dar. Bei B sei derselbe auf irgend eine Weise an einer festen Fläche MN befestigt und bei A, im Schwerpunkte der unteren Endfläche, greife eine Kraft von der Intensität = P (Kilogramm) an, deren Richtung die Richtung der Schwere oder Anziehungskraft der Erde (Gravitation) hat, hier also in die Richtung der Schwerpunktsaxe AB des Körpers fällt, und zwar wirkt diese Kraft von der Befestigungsstelle B weg. Der Körper wird in diesem Falle gezogen, er wird unter der Einwirkung der Kraft P ausgedehnt, verlängert und schließlich, wenn die Intensität P eine gewisse, der Festigkeit des Materials entsprechende Größe hat, zerrissen. Diese Art Festigkeit nennt man Zugfestigkeit oder richtiger Festigkeit gegen Zug; man sagt: der Körper wird auf Zug beansprucht.

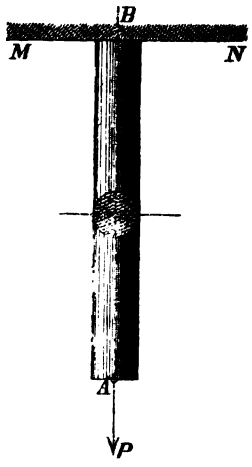


Fig. 59.

In Fig. 60 denken wir uns einen Körper unter der Einwirkung derselben Kraft P, im Schwerpunkte A der Endfläche eines prismatischen Körpers angreifend, den Körper selbst aber auf einer horizontalen Unterlage gestützt. Bei dieser Art Inanspruchnahme wird der Körper zusammengedrückt, die Schwerpunktsaxe AB verkürzt, und man nennt diese Festigkeit Druckfestigkeit oder Widerstand gegen Druck, es heißt: der Körper wird auf Druck beansprucht. Druck ist aber der Gegensatz von Zug. Verkürzung steht gegen-

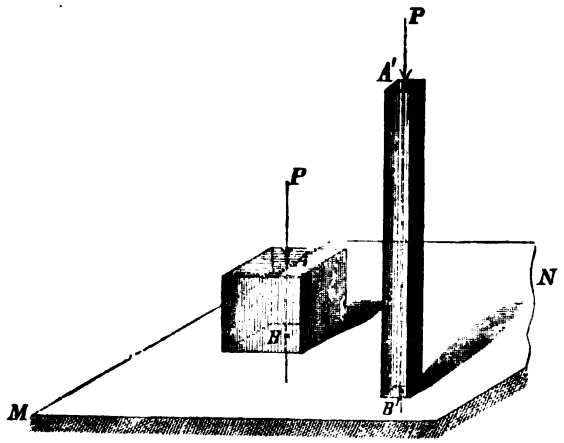


Fig. 60ª. Fig. 60ᵇ.

Digitized by Google

über der Verlängerung, und wir haben demnach gerade die entgegengesetzte Erscheinung von der im ersten Beispiele. Beide lassen sich in der Sprache der Mathematik durch die Zeichen Plus und Minus unterscheiden.

Es tritt jedoch hierbei unter Umständen ein eigenthümlicher Fall ein, wo wir, trotzdem die Richtung der Kraft wie in Fig. 60ª mit der Richtung der Schwerpunktsaxe identisch ist und die Wirkung gegen die feste Fläche hin erfolgt, ganz abweichende Erscheinungen beobachten und die Art der Aenderung nicht mehr blos in einer Verkürzung der Schwerpunktsaxe, vielmehr zugleich in einer Biegung oder Krümmung besteht. Dies geschieht, wenn die Querschnittsdimensionen des Körpers verhältnißmäßig klein sind im Vergleich zur Länge der geometrischen Axe, also bei langen, dünnen Stäben (Fig. 60ᵇ). Alsdann gestaltet sich die Widerstandsfähigkeit in ganz anderer Weise, und die Art der Festigkeit nennt man „Knickungsfestigkeit".

Weiter nehmen wir an, ein prismatischer Körper werde an einer verticalen festen Fläche MN (Fig. 61ª) befestigt, sodaß seine Schwerpunktsaxe horizontal, rechtwinklig zur festen Fläche steht. Die beanspruchende Kraft P sei wiederum die Schwere. Dieselbe wirkt vertical, parallel zur festen Fläche, also — und das ist wesentlich — normal zur Schwerpunktsaxe des Körpers. Die Wirkung, zunächst die Formveränderung, welche auf solche Art an dem Körper hervorgebracht wird, kann auch hier eine zweifach verschiedene sein. Greift nämlich die Kraft wie in Fig. 61ª in unmittelbarer Nähe der festen Fläche an, so findet eine Verschiebung des freien Theiles des Körpers in Richtung der Kraft P statt, und man hat den Fall der Schub- oder Scheerfestigkeit.

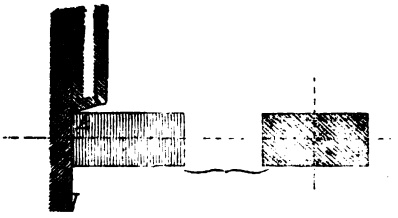


Fig. 61ª.

Liegt dagegen (Fig. 61ᵇ) der Angriffspunkt A der Kraft P eine namhafte Strecke von der Befestigungsstelle B entfernt, so wird unter übrigens gleichen Umständen der Körper sich innerhalb der freien Länge, soweit er über die feste Fläche vorsteht, durchbiegen, und man sagt: derselbe ist auf Biegung beansprucht, er widersteht infolge seiner Biegungsfestigkeit.

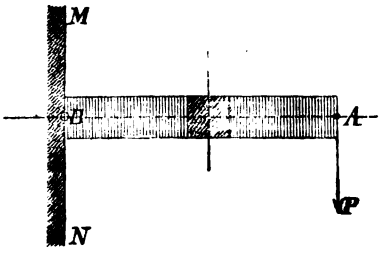


Fig. 61ᵇ

In Fig. 62 haben wir wiederum einen prismatischen, stabförmigen Körper, z. B. von kreisförmigem Querschnitte, vor uns. Derselbe sei an einer verticalen, festen Fläche MN so befestigt, daß seine Schwerpunktsaxe AB normal zu dieser gerichtet ist, und am Ende wirke innerhalb der Ebene M'N', welche MN parallel ist, eine Kraft P, jedoch so, daß der Angriffspunkt A' einen gewissen Abstand vom Schwerpunkte A der Endfläche des Körpers einhält. Infolge dieser Beanspruchung wird mit dem Körper eine Verdrehung um seine Schwer-

Digitized by Google

punktsaxe vorgehen, und man bezeichnet darnach diese Art Festigkeit als Verdrehungs- oder Torsionsfestigkeit. —

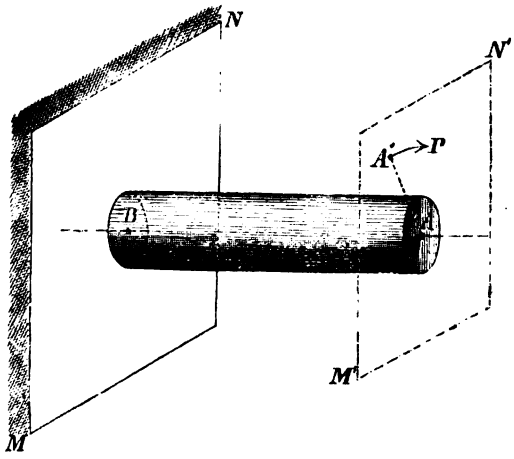


Fig. 62.

Auf diese vier, resp. sechs genannten Fundamentalfälle sind alle Beispiele zurückzuführen, und wir werden jene der Reihe nach und auf das Einzelne eingehend besprechen. Bevor wir jedoch die Einleitung beschließen, wollen wir eine allgemeine Betrachtung über das Verhalten der Körper während und nach der Kraftwirkung anstellen und die dabei hervortretenden Eigenthümlichkeiten erklären und bezeichnen.

Allgemeines.

Formänderung, Elasticität und Festigkeit, Gleichgewicht zwischen Belastung und Materialspannung, Festigkeitscoefficienten.

Die Untersuchung und Beobachtung der verschiedenen Naturkörper (Materie überhaupt) lehrt, daß dieselben nicht vollkommen starr sind, daß sie vielmehr einen niederen oder höheren Grad von Nachgiebigkeit besitzen. Das gilt ebenso von den festen, wie ganz besonders von den flüssigen und luftförmigen Stoffen. Es ist bekannt, daß Holz und Elfenbein, selbst der harte Stahl biegsam sind, daß das Blei und der Thon sich leicht drücken und kneten lassen, daß Gespinnstfasern, sowie Leder und Gummi ohne Schwierigkeit gedehnt werden können. Alle solche Beispiele bieten sich unserer Beobachtung im Leben oft und sehr deutlich dar, wenn nur die Verhältnisse, unter denen wir die Stoffe beobachten, derart sind, daß sie eine deutlich wahrnehmbare Veränderung derselben bedingen. Wir werden jedoch auf Grund dieser Beobachtungen zu dem Schlusse geführt, daß überhaupt alle festen Körper in Folge von äußeren Kraftwirkungen stets eine gewisse Veränderung ihrer Form und Größe erleiden. Wenn wir diese Thatsache nicht in allen Fällen dem Gesichte oder Gefühle merkbar machen können, so liegt es daran, daß unsere physischen Beobachtungswerkzeuge selbst nicht ausreichend sind für die Fälle, wo die günstigen Vorbedingungen nicht vorhanden sind, welche eine merkliche Aenderung gestatten. Wenn wir z. B. ein Sägeblatt leichter biegen können als einen Meisel, der zwar ebenfalls aus gehärtetem Stahl besteht, so kommt es daher, weil jenes sehr schwach und lang ist gegenüber dem Meisel. Hätten wir dagegen eine genügende Kraft zur Verfügung, so würden wir auch sehen, daß der Meisel unter ihrer Wirkung seine Form ändert; und sollten wir es mit den Augen selbst nicht sehen können, so zeigt es vielleicht eine Vergleichung durch Messung vor und während der Kraftwirkung.

Digitized by Google

Wir sind also zu der Annahme, daß alle, auch die härtesten und festesten Stoffe in Folge von ziehenden, biegenden, drückenden oder verdrehenden Kräften eine gewisse Aenderung ihrer Form und Größe annehmen, berechtigt. Dem ist jedoch hinzuzufügen, daß der Grad dieser Veränderlichkeit einmal bei den verschiedenen Stoffen verschieden ist, zum andern aber auch bei demselben Stoffe unter verschiedenen Verhältnissen verschieden ausfallen kann.

Wenn wir annehmen, daß jeder materielle Körper aus sehr vielen kleinen Theilchen (Molecülen) zusammengesetzt ist, zwischen denen sich (als Grund für die Porosität) wieder sehr viele kleine Zwischenräume (mit Aether erfüllt) befinden, so können wir uns die Form und Größenänderung nicht anders erklären, als daß wir eine Lagenänderung dieser Molecüle annehmen. Diese Lagenänderung ist nun je nach der Art der Kraftwirkung von außen entweder Annäherung, resp. Entfernung, oder Verschiebung, oder sie besteht — bei der Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit — aus zwei oder drei dieser Formen der Lagenänderung zugleich.

Wir beobachten weiter, daß, wenn wir z. B. die Belastung von einem auf Zug beanspruchten Stabe entfernen, dieser, nachdem er sich durch die Belastung und während derselben ausdehnte, in seine frühere Gestalt und Größe zurückkehrt; und sollte dies auch wirklich nicht vollkommen geschehen, wie man vielfach annimmt, so ist doch bei sehr vielen Körpern die Form nach dem Versuche nicht merklich anders als vorher. Hierbei gelangen wir nun zu der Ueberzeugung von dem Vorhandensein der bereits erwähnten Cohäsionswirkung. Wir sagen: Ist eine Kraft nothwendig zur Hervorbringung einer veränderten Form — und das ist die äußere Kraft — so muß auch im Innern, zwischen den einzelnen materiellen Theilen des Körpers eine Kraft existiren, welche diese Formänderung nach Entfernung der äußeren Kraft wieder aufhebt und den ursprünglichen Zustand des Körpers — wenn auch vielleicht nur annähernd — wieder herstellt.

Diese Molecularkraft spielt demnach folgende Rolle: Im normalen Zustande des Körpers, wo dieser keiner anderen Kraftwirkuug von außen als höchstens der allgemeinen Massenanziehung (Gravitation) und der Wärme unterliegt, bedingt die Cohäsion die Aufrechterhaltung seiner Gestalt, während einer Inanspruchnahme derselben setzt sie sich der äußeren Kraft als gleiche Gegenkraft (Widerstand) entgegen und nach Aufhören der Inanspruchnahme führt sie den während derselben veränderten Körper in seine ursprüngliche Form zurück.

Bezeichnen wir diese Molecularkraft gegenüber der äußeren Inanspruchnahme oder Belastung als Spannung und halten wir die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung fest, so können wir hier kurz die Spannung ihrer Größe (Intensität) nach gleich der Belastung setzen, und wenn wir die Belastung — die ziehende oder drückende, scheerende oder biegende, drehende Kraft — messen, d. h. in Gewichtseinheiten ausdrücken, so messen wir gleichzeitig die Größe der Molecularkraft oder Spannung. —

Die Art der Formveränderung eines beanspruchten Körpers ist je nach der materiellen Beschaffenheit dieses verschieden. Man unterscheidet im Allgemeinen zweierlei Arten, wenngleich dieselben keine schroffen Gegensätze (die Natur bietet überhaupt in den Eigenschaften und Veränderungen ihrer Körper, sowie in den Naturerscheinungen niemals schroffe Gegensätze, sondern stets all-

Digitized by Google

mälige Uebergänge dar) darstellen. Man bezeichnet die Formenänderungen entweder als elastische, d. i. vorübergehende oder als plastische, bleibende. Beispiele der ersteren Art beobachtet man an hervorragend dehnbaren uud biegsamen Stoffen, als: Stahl, Elfenbein, Gummi ꝛc. Ist hingegen die Formänderung bleibend, wie bei Blei und Thon, so nennt man sie plastisch. Hierbei ist aber schon voraus zu bemerken, daß selbst die verhältnißmäßig elastischen Körper eine vorübergehende Formänderung nur bis zu einem gewissen Grade der Belastung erkennen lassen. Wenn man also die Stärke der Inanspruchnahme zu weit getrieben hat, so stellt die Cohäsion die ursprüngliche Form selbst merklich nicht wieder her; die Formänderung ist dann also bleibend. Den Grad, bis zu welchem man die Belastung eines bestimmten Körpers treiben kann, ohne daß nach Entfernung derselben noch eine (merkliche) bleibende Formänderung wahrzunehmen ist, bezeichnet man als Elasticitätsgrenze, und man spricht z. B.: Ein Körper ist innerhalb, er ist bis zur oder über seine Elasticitätsgrenze beansprucht worden. Bleibt die Inanspruchnahme innerbalb der Elasticigrenze des Körpers, so ist die Formänderung vorübergehend, überschreitet sie aber diese Grenze, so ist die Formänderung bleibend.

Die Kraft oder Belastung, welche der Elasticitätsgrenze eines Körpers entspricht, ist nun selbstverständlich bei den verschiedenen materiellen Körpern verschieden: die Elasticitätsgrenze liegt — mit anderen Worten — im Allgemeinen bei den mehr elastischen Stoffen ferner als bei den weniger elastischen, d. h. man kann einen mehr elastischen Körper im Vergleich zu seiner allgemeinen Widerstandsfähigkeit verhältnißmäßig stark belasten, ehe man durch die Belastung eine bleibende Formänderung herbeiführt. —

Außerhalb der Elasticitätsgrenze giebt es bei jedem beanspruchten Körper noch ein merkwürdiges Stadium, d. i. die sogenannte Bruchgrenze. Ist schon bei der Elasticitätsgrenze die Cohäsion wegen zu großer Verschiebung der materiellen Körpertheilchen nicht mehr im Stande, die ursprüngliche Form merklich vollkommen wieder herzustellen, so hat sie offenbar ihre Wirkungsfähigkeit ganz verloren, wenn die Körpertheile in ihrem Zusammenhange gelöst sind, wenn eine vollständige Trennung erfolgt ist. Alsdann tritt eine andere Form der Massenanziehung, die Adhäsion oder die allgemeine Gravitation, in Wirkung, und wir haben keine Erscheinungen der Festigkeit mehr, wir gelangen also außerhalb des Bereiches der vorliegenden Abhandlung.

Ebenso wie es nun für jeden bestimmten Körper eine gewisse Belastung giebt, welcher seiner Elasticitätsgrenze entspricht, ebenso giebt es eine der Bruchgrenze zukommende Belastung, Kraft oder Inanspruchnahme, und wie wir durch jene den Grad der Elasticität ausdrücken, so stellen wir durch diese den Grad der Festigkeit eines Körpers dar.

Bei verhältnißmäßig elastischen Körpern liegt die Elasticitätsgrenze der Bruchgrenze nahe, während bei wenig elastischen Körpern sich zwischen beiden Grenzen bedeutende plastische Formänderungen wahrnehmen lassen. —

Der Grad der Formänderung eines durch eine äußere Kraft in Anspruch genommenen Körpers ist in gewisser Beziehung auch ein Maß für die Stärke der Inanspruchnahme, denn sie ist eine unmittelbare Folge derselben und steht meistens in directem oder geradem Verhältnisse zur Belastung (Federwagen und

Digitized by Google

Dynamometer). Dabei dürfen wir jedoch nicht vergessen, daß diese Formänderung bei den verschiedenen materiellen Stoffen verschiedene Größen annimmt und daß sie ganz besonders auch von der Gestalt und den Dimensionen des betreffenden Körpers abhängig ist. Ein schmiedeiserner Stab (nach Art der Fig. 59 pag. 6) von 10□^{mm} Querschnittsfläche und 1 Meter Länge wird sich bei einer Belastung von 100 Kilogr. offenbar mehr ausdehnen als ein gleicher Stab von 20□^{mm} Querschnittsfläche bei derselben Länge und gleicher Belastung; ebenso wird sich derselbe Stab von 10□^{mm} Querschnitt, aber 2^{m} Länge, bei gleicher Belastung im Ganzen mehr verlängern. Will man daher die Formänderungen solcher Stäbe vergleichen oder die Festigkeit derselben in Zahlen von Gewichtseinheiten ausdrücken, so muß man dabei vorausschicken, auf welche Querschnittsgröße und beziehentlich auf welche Länge man sich bezieht. Da ist es natürlich am einfachsten, man wählt die Flächen- resp. Längeneinheit eines Maßsystems als Bezugsgröße. Man sagt also z. B.: Bei einer Belastung von P^{k} beträgt die Verlängerung eines Schmiedeisenstabes von 1□^{mm} Querschnitt und 1^{mm} Länge = λ^{mm}, oder die Zugbelastung an der Elasticitätsgrenze eines Messingstabes beträgt pro 1□^{mm} Querschnittsfläche = P^{k} ꝛc. Man giebt also die Belastung und damit die Spannung (im Innern des Körpers) mit Bezug auf die (pro) Flächeneinheit des gezogenen oder gedrückten Körpers an. Ingleichen drückt man die Belastung an der Elasticitäts- und an der Bruchgrenze z. B. im Metermaß pro 1□^{mm} Querschnittsfläche aus und bezeichnet die durch mehrfache Versuche mit einem bestimmten Stoffe gefundene Zahl (P^{k}) bei der Belastung an der Elasticitätsgrenze als Tragmodulus, bei der Belastung an der Bruchgrenze als Bruchmodulus. Beide zusammen bezeichnet man wohl auch mit dem Namen: Festigkeitscoefficienten.

Diese Moduli sind jedoch nicht immer die Zahlen, welche man bei der Berechnung der Dimensionen von Maschinentheilen einführen darf, wenn man nicht beabsichtigt, daß sich derselbe unter dem Einflusse der auf ihn einwirkenden Kräfte merklich in seiner Form ändern soll. Verstehen wir nämlich unter dem Bruchmodulus diejenige Zahl, welche angiebt, mit wieviel Gewichtseinheiten (Kilogr.) man einen Körper von 1□^{mm} Querschnitt belasten muß, damit der Bruch desselben herbeigeführt werde, so leuchtet ein, daß, wollten wir dieselbe Zahl bei der Berechnung der Dimensionen eines Körpers von dem betreffenden Materiale für die Größe der Spannung einführen, welche in dem Körper eintreten darf, dann erhielten wir solche Dimensionen, bei denen der Körper durch die Belastung zerstört wird. Derartige Rechnungen kommen in der Technik auch mitunter vor. Es soll z. B. diejenige Kraft berechnet werden, welche der Stempel (von einem gewissen Durchmesser) einer Lochmaschine ausüben muß, um ein Blech von gewisser Stärke durchzuscheeren. Kennt man die Kraft im Stempel, so kann man dann leicht den zur Bewegung desselben nöthigen Mechanismus und die erforderliche Betriebskraft berechnen.

Bei weitem häufiger sind jedoch solche Beispiele, wo man für eine gegebene Belastung (Kraft oder Inanspruchnahme) die Dimensionen eines Körpers zu berechneten hat. So berechneten wir auf pag. 69 und 70 Bd. I den Durchmesser einer von sechs Schrauben, welche den Deckel eines Dampfcylinders an diesem dicht schließend befestigen, aus dem Gesammtdrucke, welchen der

Digitized by Google

Dampf von gewisser Spannung auf eine Fläche vom Querschnitte der Cylinderhöhlung auf diese Schrauben ziehend ausübt.

In der Formel (44) pag. 69, die aus der allgemeinen Formel für Zugfestigkeit abgeleitet und speciell für Schrauben eingerichtet ist, steckt aber eine Zahl (Modulus), die kleiner ist als der Bruchmodulus für das Schraubenmaterial. — Wäre diese Zahl der sogenannte Tragmodulus, dann würden wir für die Schrauben einen solchen Durchmesser erhalten haben, daß bei der angegebenen Belastung P dieselben bis zur Elasticitätsgrenze in Anspruch genommen würden, also sich bei der geringsten Vermehrung der Belastung bleibend ausdehnen würden. Der Tragmodulus eines Materiales ist nämlich diejenige Zahl, welche angiebt, mit wieviel Gewichtseinheiten (Kilogr.) man einen Körper von 1□^{mm} Querschnittsfläche belasten muß, damit gerade seine Elasticitätsgrenze erreicht werde.

Hätten wir also diese dem Schraubenmateriale zukommende Zahl in dem erwähnten Beispiele eingeführt, so würden die Schrauben zu schwach ausgefallen sein; sie würden zwar noch nicht reißen, sich aber soweit verlängern, daß der Deckel nicht mehr dampfdicht schließt. In den meisten Fällen ist es daher nöthig, für diese Spannung noch geringere Werthe als diejenigen der Tragmoduli einzusetzen. Man nimmt also z. B. nur die Hälfte, den dritten oder vierten Theil des Tragmodulus und führt es als zulässige Spannung in die Rechnung ein. Unter der „zulässigen Spannung" = „zulässigen Belastung" verstehen wir dann einen gewissen Theil des Tragmodulus, eine Größe der Belastung pro Flächeneinheit, welche wir bei einem gewissen Maschinen- oder Bauconstructionstheile aus bestimmtem Materiale voraussetzen können, ohne daß merkliche Formänderungen entstehen.

Man bezeichnet diese Größe wohl auch als „praktischen Tragmodulus", weil es gewissermaßen der für einen besonderen Fall der Praxis eingerichtete oder veränderte (verkleinerte) Tragmodulus ist.

Es ist weiter zu bemerken, daß eine Art Maschinentheile eine stärkere Inanspruchnahme des Materiales zuläßt als eine andere; man bedarf für einen Gegenstand größere Gewähr der genügenden Festigkeit und darf nur ein Minimum der Formänderung zulassen, während es bei einem anderen weniger ängstlich erscheint. Ja es geht die Verschiedenheit noch weiter: Bei einem und demselben Maschinentheile kann in verschiedenen Verhältnissen verschiedene Größe der zulässigen Spannung vorausgesetzt werden. Es ist also nicht nur dem allgemeinen Zwecke einer Gattung von Maschinenorganen die Größe der zulässigen Spannung anzupassen, sondern speciell auch auf die obwaltenden Umstände eines besonderen Falles Rücksicht zu nehmen.

Wenn es demnach zuerst als sehr leicht erscheint, mit Hilfe der durch Versuche festgestellten Zahlen (Moduli) die Aufgaben der Festigkeitslehre zu lösen, so wird doch das gründliche Eingehen auf die vorliegende Sache bald lehren, daß einerseits ein gereiftes Urtheil über die mechanischen Einflüsse — welcher Art die Umstände sein können und wie sie ihren Einfluß auf die Wahl der zulässigen Spannung geltend machen, werden wir später in Beispielen zeigen — unter denen ein zu berechnender Gegenstand steht, andererseits eine reichhaltige Erfahrung und gründliche Uebung allein die Bürgschaft für richtige Wahl der zulässigen Belastung in jedem einzelnen Falle, überhaupt aber für die richtige praktische Ver-

Digitized by Google

wendung der Festigkeitsregeln leisten können. Es ist daher auch lediglich dem Mangel an Verständniß und energischem Studium zuzuschreiben, wenn so viele Techniker, und namentlich Praktiker, den Nutzen der Festigkeitslehre in Zweifel stellen. Im Gegentheil, es läßt sich nur eine rationelle Ausübung des Maschinenbau's denken, wenn bei derselben neben gründlichem Verständnisse der Mathematik und Mechanik, gehöriger praktischer Erfahrung auch die richtige selbstständige Handhabung der Festigkeitslehre zu Grunde liegt, und deshalb bezeichnen wir das Studium des vorliegenden Capitels als äußerst wichtig. —

In der folgenden Tabelle I., sowie überhaupt in den meisten Lehr- und Handbüchern des Maschinenbau's findet man zwei oder drei Rubriken für Trag- und Bruchmodulus, resp. für „zulässige Belastung" und als Unterabtheilungen der bezüglichen Ueberschrift ebenfalls zwei oder drei: „für Zug" und „für Druck", event. „für Schub". Die Begründung dafür, daß für jeden Modulus drei Werthe angegeben sind, liegt in dem Obigen, wo gesagt ist, daß das Verhalten der durch eine Kraft beanspruchten Körper aus demselben Materiale durch die Art der Kraftrichtung bedingt ist, und es zeigen die meisten Stoffe gegen Zug, Druck und Schub ganz verschiedene Widerstandsresultate. Für Biegungs-, Verdrehungs und Zerknikungsfestigkeit gelten dieselben Werthe, sofern jene als zusammengesetzt aus den einfachen Festigkeitserscheinungen dargestellt werden. Man sagt kurz: Einfache Festigkeit liegt vor, sobald in dem betreffenden Körper entweder nur Zug- oder nur Druck- oder nur Schubspannung durch die beanspruchende Kraft erzeugt wird, dagegen hat man zusammengesetzte Festigkeit, wenn zwei oder drei solcher Fundamentalspanungen in dem Körper gleichzeitig vorkommen.

In derselben Taballe I. finden wir noch zwei andere Gattungen von Zahlwerthen. Der Elasticitätsmodulus, d. i. der Grad der Elasticität eines Materiales, ist die Kraft in Kilogr., welche einen prismatischen Stab vom Querschnitte $= 1 \square^{mm}$ um seine ursprüngliche (natürliche oder normale) Länge ausdehnen oder zusammendrücken würde, wenn dies überhaupt möglich ist. Der Drehmodulus ist das statische Moment der Kraft, welche einen prismatischen Stab von der Querschnitts- und Längeneinheit um 360° zu verdrehen vermag. — Dieser letzere Werth ist im Allgmeinen 0,375 ÷ 0,4 des Elasticitätsmodulus und wird meist aus diesem abgeleitet. Ueberhaupt können die genannten Werthe nur in den seltensten Fällen direct durch Versuche ermittelt werden, da die wenigsten Stoffe eine derartige Formänderung innerhalb der Bruchgrenze zulassen; sie werden vielmehr aus der relativen Längenänderung, resp. aus dem Verdrehungswinkel und der zugehörigen Kraft berechnet.

Die relative Längenänderung an der Elasticitätsgrenze, für welche die Werthe in den zwei dritt-letzen Rubriken (rechts) der Tab. I enthalten sind, stellen die Verlängerung, resp. Verkürzung eines prismatischen Stabes von der Querschnittseinheit dar, welche derselbe unter der Einwirkung einer dem Tragmodulus gleichen, ziehenden resp. drückenden Kraft pro Längeneinheit erleidet. Diese Werthe erhält man, indem man die beim Versuche gefundene Belastung an der Elasticitätsgrenze durch den Elasticitätsmodulus dividirt.

Endlich führt die Sprache der angewandten Festigkeitslehre noch zwei Ausdrücke: Ausführungscoefficient und Sicherheitscoefficient.

Der Ausführungscoefficient ist die Zahl, mit welcher ich den Tragmodulus eines Materiales zu dividiren habe, damit ich die zulässige Belastung

(s. pag. 16.)

Digitized by Google

Tabelle I.

Festigkeits- und Elasticitäts-

Material.	Kilogramm pro Quadrat-								
	Zulässige Belastung.			Belastung a/d. Elasticitätsgrenze.			Bruch-Belastung.		
	Z	D	S	Z	D	S	Z'	D'	S'
Holz, Buche	1,3	0,7	—	1,7	—	—	10	6	0,6
	—	0,4	—	—	—	—	0,7	3,3	—
„ Esche	1,2	0,7	—	2,5	—	—	12	7	0,65
	—	0,4	—	—	—	—	—	3,3	—
„ Eiche	1,1	0,7	—	2,8	—	—	10	6	0,7
	—	0,4	—	—	—	—	0,5	3,3	—
„ Tanne	0,7	0,5	—	2,6	—	—	10	5	0,5
	—	0,2	—	—	—	—	0,4	2	—
Gußeisen	2,5	6	2	7,5	15	5,5	12	70	20
do.	2,0	—	—	—	—	—	10	—	—
Schmiedeisen	7	6	5	15	14	10	40	35	35
Eisenblech	7	7	5	14	14	10	36	32	30
do.	5	7	6	—	—	—	36	40	40
Eisendraht	12	—	—	27	—	—	70	—	—
Stahl, Guß-	16	16	15	30	—	28	80	—	60
„ „	30	30	22	60	—	45	100	—	75
„ Cement	12	12	10	26	—	20	72	—	52
Kupfer	2	—	2,5	—	—	—	13	—	20
Kupferblech	6,6	6,6	5	14	14	10,5	30	40	—
do.	2,5	2	1,5	3	2,75	2	21	41	—
Kupferdraht	7	—	—	12	—	—	42	—	—
Messing	2,4	—	1,9	4,8	—	3,6	12,5	—	—
Messingdraht	6,5	—	—	13	—	—	40	—	—
Kanonenmetall	3	—	1,5	5	—	3	26	—	19
Zinn	0,5	—	—	—	—	—	3,3	—	—
Blei	0,2	—	—	1	—	—	1,3	5	—
Zink	1	—	—	2,3	—	—	5	—	—
Leder, Kalb-	—	—	—	—	—	—	1,3	—	—
„ Kuh-	0,2	—	—	1,6	—	—	2,9	—	—
„ Roß-	—	—	—	—	—	—	1,6	—	—
Hanfseil	2	—	—	—	—	—	4,8	—	—
do.	3	—	—	—	—	—	6,1	—	—
Glas	—	—	—	—	—	—	2,5	—	—
Basalt	—	1,2	—	—	—	—	—	12	—
Gneis und Granit	—	0,6	—	—	—	—	—	6	—
Sandstein	—	0,2	—	—	—	—	0,6	2	—
Ziegelstein	—	0,08	—	—	—	—	0,8	0,8	—
Ziegelmauerwerk	—	0,04	—	—	—	—	—	0,4	—
Mörtel, Cement-	0,02	0,15	—	—	—	—	0,18	1,5	—
„ Kalk-	—	0,04	—	—	—	—	—	0,4	—

Digitized by Google

Coefficienten.

millimeter.		Ausdehnung	Zusammendrückung	Specifisches Gewicht.	Bemerkungen.
Elasticitäts-Modulus.	Dreh-Modulus.	a/d. Elasticitätsgrenze.			
E	G	λ_0'/l	λ_0'/l	γ	
930	340	0,00183	—	0,75	Parallel z. Faserrichtung.
—	—	—	—		Normal „ „
1050	390	0,00250	—	0,70	Parallel „ „
—	—	—	—		Normal „ „
1180	460	0,00246	—	0,79	Parallel „ „
—	—	—	—		Normal „ „
1100	400	0,00237	—	0,62	Parallel „ „
—	—	—	—		Normal „ „
10000	3850	0,00075	0,00150	7,3	Graues.
				7,5	Weißes.
20000	7500	0,00075	0,00070	7,6÷7,8	In Stäben gewalzt.
18000	6800	0,00077	0,00077	7,6	Parallel z. Walzrichtung.
					Normal „ „
19500	7400	0,00138	—	7,8	—
22000	9000	0,00137	—	7,5÷7,8	Weich.
27500	10400	0,00220	—	7,8÷7,9	Gehärtet.
22000	8800	0,00718	—	7,5÷7,8	—
11600	—	—	—	8,8	Gegossen.
10700	4100	0,00130	0,00130	9,0	Gehämmert.
10700	4000	0,00028	0,00026		Geglüht.
12500	—	0,00096	—	8,8÷9,0	—
6500	2700	0,00070	—	8,2÷8,7	—
10000	—	0,00130	—	8,3÷8,7	—
7000	2600	0,00070	—	8,8	—
3600	1460	—	—	7,3	—
500	188	0,00200	—	11,4	—
9500	3600	0,00024	—	7,1	Gegossen.
4	—	—	—	—	—
17,5	—	0,09000	—	—	—
6	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	Neu, stark.
—	—	—	—	—	„ , schwach.
7000	—	—	—	2,6	—
—	—	—	—	2,4÷2,7	—
—	—	—	—	2,4÷3,0	—
—	—	—	—	1,9÷2,7	—
—	—	—	—	1,2÷1,4	—
—	—	—	—	2,4	—
—	—	—	—	1,4÷2,2	—
—	—	—	—		—

Digitized by Google

erhalte und der Sicherheitskoefficient ist der Quotient aus Bruchmodulus durch zulässige Belastung. Er giebt also an, wie viel mal die zulässige Belastung des betreffenden Körpers um sich selbst vermehrt werden kann, ehe der Bruch erfolgt. — Besondere absolut giltige Werthe für diese Ausdrücke lassen sich unmöglich feststellen, da, wie schon erwähnt, die Wahl der zulässigen Spannung von sehr vielen speciellen Umständen abhängt. Man muß sich hierbei lediglich auf die Erfahrung stützen, die man an einem gewissen Maschinentheile unter bestimmten Verhältnissen gemacht hat; und sind die Verhältnisse in einem Falle anderer Art, so muß das Urtheil, geschärft und bewährt durch Uebung in analogen Fällen, selbst entscheiden.

Einem geübten und erfahrenen Techniker fällt es auch nicht schwer, für gewisse oft und in denselben Verhältnissen vorkommende Maschinentheile eines Materiales die Größe der zulässigen Belastung zu erproben. Metalle aus verschiedenen Erzen, auf verschiedene Weise gewonnen, lassen oft wesentliche Abweichung in der Festigkeit erkennen; es ist überhaupt auf chemische und mechanische Einflüsse bei der Herstellung und während des Betriebes zugleich Rücksicht zu nehmen.

Es ist einleuchtend, daß alle chemischen und mechanischen Einflüsse, welche eine Veränderung der Lage und Beschaffenheit der materiellen Atome eines Körpers hervorbringen, auch die Elasticität und Festigkeit desselben verändern müssen. Als einige wichtige technologische Notizen*) hinsichtlich dessen heben wir hervor, daß Hämmern, Walzen und Drahtziehen die Elasticität und Festigkeit der Metalle etwas erhöhen, die Dehnbarkeit hingegen vermindern. Der Stahl wird durch Härtung etwas fester, ingleichen auch das Eisen durch Verminderung des Phosphor- und Kohlenstoffgehaltes. Ausglühen vermindert die Festigkeit, erhöht dafür aber die Dehnbarkeit. Sehr niedrige Temperatur (— 33° C.) erhöht die Elasticitätsgrenze bei Eisen und Stahl; hohe Temperatur (+ 140° C.) drückt dieselbe herab. Der Elasticitätsmodulus des Schmiedeeisens und Stahles wächst um 0,03% ÷ 0,05% pro 1 Grad C. abnehmende Temperatur.

Auf die absolute Festigkeit hat eine Temperatur-Differenz von — 33° C. und + 200° C. bei Stahl, von — 33° C. und + 100° bei Schmiedeeisen keinen Einfluß. Zwischen + 100° C. und 200° C. nimmt das Schmiedeeisen bis zu 20° an Zugfestigkeit zu, wird aber in dunkler Rothglühhitze (600 bis 700° C.) um die Hälfte bis Zweidrittheile geringer.

Die absolute Festigkeit des Kupferbleches wird mit steigender Temperatur geringer und sinkt bei + 400° C. auf die Hälfte derjenigen bei 0°.

I. Zug- und Druckfestigkeit.

Den Begriff „Festigkeit eines Körpers" erklärten wir pag. 4 allgemein als den Widerstand (Kraft), welchen derselbe einer Verschiebung und Trennung seiner einzelnen Theile entgegensetzt. Die Festigkeit ist also eine Eigenschaft der Körper, welche sich sofort bemerkbar macht, wenn dieselben der Einwirkung einer außerhalb ihrer Masse liegenden Ursache (Kraft, Inanspruchnahme) unterstellt werden.

*) „Hütte", d. Ing.-Taschenbuch 1869, pag. 215.

Digitized by Google

Ist nun speciell die von außen auf den (vorläufig als prismatisch, stabförmig angenommenen) Körper einwirkende Kraft so gerichtet, daß sie mit der geometrischen (Schwerpunkts-) Axe des Körpers zusammenfällt, so wird derselbe entweder a), wenn die Kraft vom Körper abgewendet ist (Fig. 59, pag. 6), ausgedehnt oder b), wenn die Kraft dem Körper zugewendet ist (Fig. 60ª, pag. 6), zusammengedrückt werden, und es entsteht im Körper eine Reaction (Gegenwirkung), welche stets das Gegentheil von dem zu bewirken sucht, was die von außen wirkende Kraft mit dem Körper vornimmt. Im ersten Falle a) nennen wir diesen Widerstand **Zugfestigkeit**, im zweiten b) **Druckfestigkeit**. Wir definiren daher weiter:

„Zugfestigkeit" ist der Widerstand eines Körpers, welchen derselbe einer durch äußere mechanische Kräfte verursachten Ausdehnung,

„Druckfestigket" derjenige, welchen er einer derartigen Zusammendrückung entgegensetzt.

Die im Körper entstehende Reaction bezeichnen wir für diese besonderen Fälle als „Zug"- resp. „Druckspannung" und wissen, daß — so lange nicht eine vollständige Trennung der Körpers erfolgt und sobald Zustand der Ruhe oder Aufhören der Formänderung eingetreten ist — Gleichgewicht zwischen der den Körper von außen beanspruchenden Kraft und der im Körper erregten Spannung (Festigkeit) besteht.

Verstehen wir aber ein für allemal unter s die Größe (Intensität) der in der Flächeneinheit (Quadratmillimeter) des Stabquerschnittes auftretenden Spannung, unter P die Größe der von außen auf den Körper einwirkenden Kraft und nehmen wir an, der Körper bestehe in allen (congruenten) Querschnitten aus F Flächeneinheiten, so läßt sich jener Gleichgewichtszustand (ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht des Körpers) in der einfachen Gleichung ausdrücken:

$$P = Fs \quad \ldots\ldots \quad (1.),$$

d. h. die den Körper beanspruchende Kraft ist gleich der Anzahl der Flächeneinheiten des zur Kraftrichtung normalen (kleinsten) Querschnittes, multiplicirt mit der Größe der in der Flächeneinheit dieses Querschnittes auftretenden Spannung. Umgekehrt ist aus Gleichung (1.):

$$F = \frac{P}{s} \quad \ldots\ldots \quad (2.),$$

d. h. man erhält die Größe der Querschnittsfläche eines durch die Kraft P auf Zug oder Druck in Anspruch genommenen Stabes, indem man die Kraft P (Anzahl Kilogr. der Belastung) durch die Größe der Spannung (s) dividirt, welche in der □Einheit der (kleinsten) Querschnittsfläche eintreten darf. Oder löst man die Gleichung (1.) für s auf:

$$s = \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots \quad (3.),$$

so ergiebt sich eine Formel, welche direct zur Berechnung der in 1 □^{mm} des Stabquerschnittes eintretenden Spannung benutzt werden kann. — Diese Formeln gelten ganz allgemein für die Gleichgewichtszustände eines gezogenen oder gedrückten Körpers, ohne Rücksicht darauf, ob der Körper von Holz, Eisen oder Stein ꝛc. ist, ob er „zulässig", „bis zur Elasticitätsgrenze" oder „bis zum Bruche"

Digitized by Google

belastet ist. Die specielle Aufgabe, zu deren Lösung eine der drei Formeln verwendet werden soll, muß demnach bestimmt vorschreiben, aus welchem Materiale der fragliche Körper besteht, ob die Kraft ziehend oder drückend wirkt und endlich ob der Körper innerhalb der Grenzen beansprucht werden soll, welche für das Material und für den speciellen Zweck der Körpers als „zulässig" zu betrachten sind oder ob er bis zur bleibenden Formänderung oder gar „bis zum Bruche" belastet werden soll. Darnach haben wir die Größe s gleich einer Zahl der in der Tabelle I mit ZD, ZD oder Z'D' überschriebenen Rubriken zu setzen. — Ferner muß selbstverständlich noch eine der Größen P oder F in Zahlen gegeben sein oder wenigstens Bedingungen, aus denen sie berechnet werden können, wenn überhaupt eine der drei Formeln lösbar sein soll.

Wir befolgen bei der Abhandlung der einzelnen Festigkeitsarten eine andere Reihenfolge als seiner Zeit in der Einleitung beobachtet wurde. Dort gaben wir eine Eintheilung, nach Art der Inanspruchnahme geordnet. Hier müssen wir dagegen den Stoff in der Weise verarbeiten, wie es die Aehnlichkeit der mathematischen und mechanischen Ableitung anzeigt. Während wir daher in der Eintheilung Zug- und Druckfestigkeit von einander trennten, weil sie rücksichtlich der Art der Inanspruchnahme gerade entgegengesetzt sind, fassen wir hier beide zusammen, weil das obige Gleichgewichtsgesetz allgemein für beide gilt und nur die Formänderungen sich wie positive und negative Größen verhalten. Aehnlich ist es bei den übrigen Arten der Festigkeit.

Bei einer Festigkeitsaufgabe überhaupt, die in der Praxis als ein zu lösendes Problem an uns herantritt — die wir unbedingt lösen müssen, wenn wir die Theile einer Maschine oder eines Bauwerkes materiell so ausführen wollen, wie es der unlösbare oder unveränderliche geometrische Zusammenhang, wie es vielleicht die Sicherheit für das Leben von Menschen und Thieren unbedingt erfordern — ist zuerst zu untersuchen, welcher Art die einzelnen Theile in Anspruch genommen werden: zu ergründen, in welcher Richtung die Kräfte hinsichtlich der Gestalt und Befestigung des Körpers wirken, wie und wo sie an demselben angreifen. Dabei kommt es zunächst häufig vor, daß ein und derselbe Körper durch mehrere Kräfte gleichzeitig in Anspruch genommen wird. Bevor man da die Lösung der eigentlichen Festigkeitsaufgabe vornehmen kann, muß zuerst eine Vorarbeit, nämlich die Ermittelung der Resultirenden (s. Mechanik) nach Größe, Richtung und Angriffspunkt aus den gegebenen Einzelkräften ausgeführt werden, und sollte dabei der Fall eintreten, daß die sich ergebende Resultirende eine von der im Fundamentalbeispiele (pag. 6 :–8) der betreffenden Festigkeitsart etwas abweichende Richtung hat, so muß man auch die Resultirende wieder zerlegen und davon diejenige Componente in die Festigkeitsrechnung einführen, welche die durch das Fundamentalbeispiel vorgeschriebene Richtung hat. Die hierbei zu beobachtenden Regeln und Verfahrungsweisen lehrt die Mechanik. — Ferner kommt es vor, daß ein und derselbe Körper entweder abwechselnd oder gleichzeitig auf die eine oder andere Art seiner Festigkeit beansprucht wird. Hier hat man, wenn sich die ungünstigste der Beanspruchungsweisen nicht sofort erkennen läßt, im ersten Falle den Körper hinsichtlich der möglichen Beanspruchungen durch die bezügliche Rechnung zu untersuchen und ihm die größten von den in den einzelnen Rechnungen gefundenen Dimensionen zu geben. Widersteht er dann der für ihn ungünstigsten Art der Inanspruchnahme, so ist man sicher, daß er auch in den übrigen Fällen genügende Sicherheit bietet. Ein deutliches Beispiel hierzu liefern alle Kolbenstangen doppelt-wirkender Dampfmaschinen und Pumpen; sie werden abwechselnd gezogen und gedrückt.

Wirken z. B. auf eine Welle, welche eine Kraft überträgt, also auf Torsion oder Verdrehung beansprucht ist, auch noch Gewichte (z. B. von Rädern), welche dieselbe gleichzeitig biegen, so muß man derselben solche Stärke geben, wie sich aus der Rechnung für Torsion und Biegung zusammen ergiebt. — Einen derartigen Fall hat man überdies allemal dann, wenn das Eigengewicht des zu berechnenden Körpers mit als Belastung für dieselben einzuführen ist.

Der Zweck und etwaige besondere Einflüsse eines zu berechnenden Organes müssen erkennen lassen, ob man viel oder wenig Sicherheit anzunehmen, ob man also einen

Digitized by Google

kleinen oder größeren Theil der Bruchbelastung (Z', D', S', Tab. I) als zulässige Spannung vorauszusetzen hat.

Ebenso, und das ist leicht zu erkennen, stellen sich die Aufgaben in der Weise verschieden, daß in einem Falle für die allgemeine Größe s der Spannung die Bruchbelastung gesetzt werden muß, in einem andern die Belastung an der Elasticitätsgrenze und in einem dritten, am meisten vorkommenden Falle nur die zulässige Belastung. Danach hat man die Zahlen aus einer der ersten neun Rubriken der Tab. I zu wählen.

Endlich wollen wir in diesem allgemeinen Hinweise noch auf einen sehr wichtigen Punkt zum Voraus aufmerksam machen. Er betrifft die Ermittelung des sogenannten „gefährlichen Querschnittes" in den einzelnen Beispielen der Inanspruchnahme. Mit dem Namen „gefährlicher Querschnitt" bezeichnet man in der Festigkeitslehre den Ort (Bruch-Querschnitt) an einem zu untersuchenden Körper, an welchem unter den gegebenen Bedingungen der Bruch erfolgt, für welchen also die den Bruch herbeiführenden Ursachen und Umstände ihren ungünstigsten Einfluß üben, oder, mit anderen Worten, wo die Spannung der Materialfasern ihren größten Werth hat.

Die Auffindung des gefährlichen Querschnitts macht selten — nur bei gleichzeitig mehrfacher Inanspruchnahme eines und desselben Körpers — große Schwierigkeiten, und wird die Lage desselben meistens sofort ohne Rechnung erkannt. Bei einem auf Zug beanspruchten Körper von prismatischer Form haben — wenn man die Materie desselben als an allen Punkten gleich widerstandsfähig voraussetzt und von der Belastung durch das eigene Gewicht absieht — alle Querschnitte dieselbe Widerstandsfähigkeit; denn es sind die Querschnitte alle einander gleich, sie enthalten alle dieselbe Anzahl Flächeneinheiten, und auf jeden derselben wirkt dieselbe Größe der Kraft.

Nicht-prismatische Körper haben dagegen, auch ohne Rücksicht auf ihr Eigengewicht, stets einen gefährlichen Querschnitt. Bei Zug- und Druckbelastung z. B. ist es im Allgemeinen der kleinste von den Querschnitten. Dort muß deshalb die Spannung im Materiale am größten sein, weil sich die Belastung auf die geringste Anzahl von Flächeneinheiten vertheilt, auf jede dieser also eine größere Belastung kommt als auf die Flächeneinheit in einem der größeren Querschnitte.

Aehnlich wie bei Zug und Druck ist es auch bei Abscheerung und Torsion. Dahingegen sind die Beispiele für Biegungs- und Knickungsfestigkeit in der Praxis so verschiedenartig, daß die Ermittelung des gefährlichen Querschnittes nicht selten durch Rechnung erfolgen muß, und wir werden deshalb gerade bei diesen Arten der Festigkeit später ausführlich auf die Eigenthümlichkeiten, welche die Lage des gefährlichen Querschnittes der Widerstandsfähigkeit eines Körpers ertheilt, zu sprechen kommen.

Hier wollen wir der Vollständigkeit halber nur noch darauf hinweisen, daß man es umgekehrt in vielen Fällen vollständig in der Hand hat, dem betr. Körper solche Formen zu geben, daß in allen Querschnitten genau oder nahezu dieselbe Widerstandsfähigkeit gegen eine oder mehrere Arten der Inanspruchnahme eintritt. Alsdann erhält man sogenannte „Körper von gleicher Festigkeit oder — Widerstandsfähigkeit", oder was dasselbe ist, Körperformen für constante Materialspannung in allen Querschnitten und erzielt mit deren Anwendung auf Meschinen- und Bauconstructionstheile jederzeit eine Ersparniß an Material gegenüber anderen, z. B. prismatischen Formen.

Beispiele.

1. Aufgabe. Ein prismatischer Stab von Eichenholz, an der festen Fläche MN befestigt, wird in Richtung seiner geometrischen Axe AB durch eine Kraft P gezogen (auf Zugfestigkeit in Anspruch genommen). Der Querschnitt des Stabes

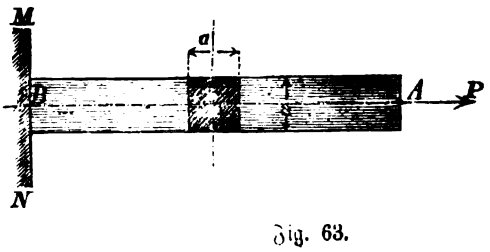


Fig. 63.

Digitized by Google

ist ein Quadrat von der Seitenlänge $a = 70^{mm}$. Wie groß wird die Kraft P sein, welche den Stab

a) zulässig belastet?

b) bis an die Elasticitätsgrenze (bis zur bleibenden Formänderung) beansprucht?

c) zerreißt (bis zum Bruche belastet)?

Auflösung a). Da hier in allen drei Fragen die Belastung P zu suchen ist, so werden wir Formel (1) pag. 17 anzuwenden haben, und es sind für die Größen F und s Zahlenwerthe einzuführen.

Der Querschnitt F des Stabes ist nach der Aufgabe

$$F = a^2 = 70^2 = 4900 \square^{mm}.$$

Für die Größe s, welche allgemein Spannung bedeutet, ist in vorliegender Aufgabe, weil wir Zugfestigkeit vor uns haben und im ersten Falle a) der Körper „zulässig belastet" werden soll, die Zahl aus der ersten mit „Z" (Zug) überschriebenen Rubrik der Tabelle I zu nehmen, welche dem Eichenholze zukommt. Die allgemeine Formel (1) heißt demnach, für das vorliegende Beispiel besonders vorbereitet:

$$P = FZ.$$

Z, die zulässige Belastung eines Quadratmillimeters des Querschnittes, ist aber nach der Tabelle I für Eichenholz: $Z = 1{,}1$. $F = 4900$; demnach erhalten wir

$$P = 4900 \,.\, 1{,}1 = 5390.$$

Die Zugbelastung, welche der angegebene Eichenstab mit genügender Sicherheit auszuhalten vermag, beträgt also $P = 5390^k$.

Auflösung b). Wenn in der zweiten Frage die Zugbelastung gesucht werden soll, welche der Elasticitätsgrenze bei Eichenholz entspricht, so haben wir in der allgemeinen Formel (1) für die Spannung s den Modulus Z einzuführen, und dieser ist nach der vierten Rubrik $Z = 2{,}8$. Die Größe F bleibt dieselbe wie unter a). Wir erhalten demnach

$$P = FZ = 4900 \,.\, 2{,}8$$

$$P = 13720^k$$

als diejenige Kraft, welche der Stab zwar noch zu tragen vermag, welche ihn aber schon soweit ausdehnt, daß er seine ursprüngliche Form nach Aufhören der Kraftwirkung (selbst nahezu) nicht wieder annimmt.

Auflösung c). In der dritten Frage ist endlich die Kraft zu ermitteln, welche gerade hinreicht, den genannten Stab zu zerreißen. Da haben wir für die Spannung s den Zugmodulus einzuführen, welcher unter „Bruchbelastung" in der Tabelle I sich vorfindet. Das ist allgemein $s = Z'$ und speciell für Eichenholz $Z' = 10^{k*})$ pro $\square^{mm}$. Also ist jetzt

---

*) In der 7. Rubrik (unter Z') steht für Eichenholz unter der „10" noch eine zweite Zahl „0,5". Ist man hier im Zweifel, welche von beiden zu nehmen sei, so braucht man nur unter der Rubrik „Bemerkungen" nachzusehen, wo für die obere Reihe steht: „Parallel zur Faserrichtung" und für die untere: „normal zur Faserrichtung"; d. h. die Kraft wirkt entweder parallel oder normal zur Faserrichtung des Holzes. Der letztere Fall wird jedoch bei Zug höchst selten eintreten, vielmehr wird man die Stäbe immer so anordnen, daß die Holzfasern in ihrer Länge gezogen und nicht normal von einander losgerissen werden. Für diesen letzteren Fall ist natürlich die Widerstandsfähigkeit viel geringer.

Digitized by Google

$$P = Fs = FZ' = 4900 \cdot 10$$
$$P = 49000^k.$$

2. Aufgabe. Welchen Durchmesser (d) hat man dem Kreisquerschnitte eines schmiedeisernen prismat. (cylindr.) Stabes zu geben, wenn dieser

a) eine Zugbelastung $P = 10000^k$ mit gewöhnlicher Sicherheit tragen soll?

b) durch die Kraft $P = 10000^k$ bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll?

c) durch die Kraft $P = 10000^k$ bis zum Bruche belastet sein soll?

Auflösung a). Auch hier haben wir in allen drei Fragen wieder Zugfestigkeit vor uns und demnach die Moduli aus den Rubriken „$\mathfrak{Z}$" resp. „Z" und „Z'" zu entnehmen und für s in die allgemeine Formel zu setzen. Es ist jedoch hier nicht nach der Belastung gefragt, sondern nach d, dem Durchmesser des Kreisquerschnittes des cylindrischen Stabes. Demnach haben wir Formel (2) pag. 17 zu Grunde zu legen,

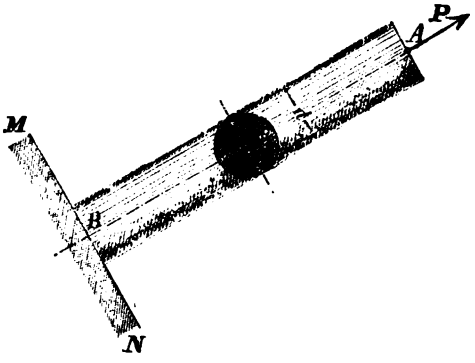


Fig. 64.

welche den Werth F aus Formel (1) abgeleitet enthält. Es ist also allgemein

$$F = \frac{P}{s} \text{ oder für a) } F = \frac{P}{\mathfrak{Z}}.$$

Für F bestimmt die Aufgabe, daß es eine Kreisfläche vom Durchmesser d sein soll; also setzen wir (nach der Geometrie)

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 \text{ und erhalten}$$
$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{\mathfrak{Z}} \text{ oder } d^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P}{\mathfrak{Z}} \text{ und}$$
$$d = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{Z}}} \text{ oder}$$
$$d = \frac{2}{1{,}772} \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{Z}}}$$
$$d = 1{,}13 \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{Z}}}.$$

Nach der Aufgabe ist $P = 10000$ und nach der Tabelle I für „Schmiedeisen in Stäben gewalzt": $\mathfrak{Z} = 7$; also

$$d = 1{,}13 \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{7}} = 1{,}13 \frac{100}{2{,}645}$$
$$d = 42{,}7^{mm}.$$

Auflösung b). Die zweite Frage können wir nun sehr leicht beantworten, da bis auf den Modulus, den wir für s in der allgemeinen Formel zu setzen haben, Alles dasselbe bleibt. Es wiederholt sich demnach hier dieselbe Rechnung wie unter a) bis zu der Formel $d = 1{,}13 \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{Z}}}$, und wir haben hier anstatt $\mathfrak{Z}$ zu setzen Z; also ist:

Digitized by Google

$$d = 1{,}13\sqrt{\frac{P}{Z}}.$$

Nach Tabelle I ist für Schmiedeisen $Z = 15$; dann ist

$$d = 1{,}13\sqrt{\frac{10000}{15}} = \frac{1{,}13 \cdot 100}{3{,}872}$$

$$d = 29{,}15^{mm}.$$

Auflösung c). Ebenso haben wir für den dritten Fall anstatt $\mathfrak{Z}$ in der Formel $d = 1{,}13\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{Z}}}$ zu setzen den Bruchmodulus Z' aus Tabelle I, welcher daselbst für Schmiedeisenstäbe verzeichnet ist zu $Z' = 40^{k}$ pro $\square^{mm}$. Also ist

$$d = 1{,}13\sqrt{\frac{P}{Z'}} = \frac{113{,}0}{\sqrt{40}}$$

$$d = 17{,}8^{mm}.$$

Darnach würde also ein Rundeisenstab von $17{,}8^{mm}$ Dicke bei einer Zugbelastung von 10000^{k} oder 200 Centner gerade zerreißen; ein solcher von $29{,}15^{mm}$ Stärke würde die genannte Belastung zwar tragen, sich dabei aber sehr stark und bleibend ausdehnen, während man demselben einen Durchmesser von $42{,}7^{mm}$ geben müßte, wenn er eine ruhige (stoßfreie) Zugbelastung von 10000^{k} mit Sicherheit tragen soll. —

Anmerkung 1). Die Größe oder den Grad der Sicherheit (pag. 16), mit welcher in einem besonderen Falle der betreffende Körper der beanspruchenden Kraft Widerstand leistet, drückt man als Quotient aus und dividirt entweder die bei bezüglichen Rechnungen gegebenen und gefundenen Kräfte durch einander oder sofort den Modulus Z', D' oder S' für Bruchbelastung durch den Modulus für zulässige Belastung $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{S}$. Bezeichnen wir also den Sicherheitsgrad mit σ, so ist allgemein

für Zug $\quad \sigma = \frac{Z'}{\mathfrak{Z}}$,

„ Druck $\quad \sigma = \frac{D'}{\mathfrak{D}}$ und

„ Abscheerung $\quad \sigma = \frac{S'}{\mathfrak{S}}$,

Man sagt alsdann: Der Körper ist auf σ-fache Sicherheit berechnet. So haben wir in der 1. Aufgabe:

$$\sigma = \frac{49000}{5390} = 9{,}1 \text{ oder } \sigma = \frac{Z'}{\mathfrak{Z}} = \frac{10}{1{,}1} = 9{,}1;$$

also 9-fache Sicherheit.

In der 2. Aufgabe:

$$\sigma = \frac{40}{7} = 5{,}7; \text{ also beinahe 6-fache Sicherheit.}$$

Die Verschiedenheit beider Sicherheitsgrade hat ihren Grund in der mehr oder weniger gleichartigen Beschaffenheit der Materiale. Schmiedeisen kann in den einzelnen Producten gleichartiger hergestellt werden, als man die einzelnen Eichenhölzer vorfindet. Daher muß bei letzteren für Aufstellung eines Mittelwerthes für die zulässige Belastung mehr Sicherheit (ein kleinerer Theil der Bruchbelastung) vorausgesetzt werden als z. B. bei Schmiedeisen. Aehnlich verhält sich auch das Gußeisen zum Schmiedeisen.

Digitized by Google

Anmerkung 2). Die Größen, welche bei der Berechnung auf Zug- und Druckfestigkeit in Betracht kommen, sind nach der Fundamentalformel 1) die belastende Kraft P, die Querschnittsgröße F des Körpers und die Materialspannung s. Dieselben sind auf höchst einfache Weise zu einer algebraischen Gleichung verbunden, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Größen ohne Weiteres erkennen läßt. So heißt Formel 1) $P = F \cdot s$, wo jede der drei Größen als Factor auftritt, in Worte übersetzt: Die Zug- oder Druckbelastung eines Körpers ist um so größer, je größer der Inhalt des Querschnittes ist und je größer die Materialspannung angenommen wird, oder die Belastung ist direct proportional dem Querschnitte und der Materialfestigkeit.

Formel 2) $F = \frac{P}{s}$ besagt nun offenbar ganz dasselbe in anderer Weise, da die Gleichung immer noch denselben Sinn hat wie Formel 1) und nur die Größen anders zu einander gestellt sind. Daselbst heißt es: Der Flächeninhalt eines auf Zug oder Druck beanspruchten Körpers ist um so größer, je größer die ziehende (resp. drückende) Kraft und je kleiner (s tritt als Divisor auf) die Materialspannung oder je größer die Sicherheit ist.

Ebenso lesen wir Formel 3) $s = \frac{P}{F}$: die Materialspannung ist direct proportional der Belastung und umgekehrt proportional dem Querschnitte.

In dieser Weise erscheint die Uebereinstimmung der Formeln mit unseren Beobachtungen in der Natur, in der Wirklichkeit leichter verständlich, und lassen sich dieselben so dem Gedächtnisse besser einprägen.

In diesen Fundamentalformeln vermissen wir aber noch mehrere Größen, die wir in der Einleitung im Allgemeinen als bei Festigkeitsaufgaben wesentlich bezeichneten und welche demnach, da sie im vorliegenden Falle fehlen, hier keinen Einfluß haben können. Dahin gehört zunächst die Form des Querschnittes. Es ist in der That sofort einleuchtend, daß es bei Zug- und Druckbelastung auf diese nicht ankommen kann; denn es ist ganz gleichgiltig, was für eine Flächengestalt die Flächeneinheiten zusammen darstellen, sie brauchen (wie bei Seilen und Gurten von Hanf oder Draht) nicht einmal alle in natürlichem Zusammenhange zu stehen, wenn nur die genügende Anzahl von Flächeneinheiten vorhanden ist und die Gesammtbelastung sich gleichmäßig über dieselben vertheilt.

Die Länge des Körpers, d. i. die Dimension in Richtung der ziehenden Kraft, hat, so lange wir von dem Einflusse des Eigengewichtes absehen, ebenfalls keinen Einfluß auf die Tragfähigkeit eines auf Zug oder Druck beanspruchten Körpers. — Auch schon bei Druck erleidet die Länge insofern eine Beschränkung, als (pag. 6 und 7) bei hervorragender Größe derselben gegenüber dem Querschnitte der Stab nicht zerdrückt, sondern gebogen und zerknickt wird.

Ebenso verhält es sich mit der Befestigungsweise des Körpers. Wenn sein eigenes Gewicht nicht in Frage kommt, ist es bei Zug und Druck, wie überhaupt bei allen Festigkeitsarten ganz dasselbe, ob man einen Stab in verticaler, in horizontaler oder schräger Lage vor sich hat. Wesentlich ist bei Zug und Druck nur, daß die in Frage kommende Kraft — sei es als Resultirende selbst oder als ein Antheil derselben — dieselbe Richtung hat wie die Dimension normal zum fraglichen Querschnitte.

3. Aufgabe. Es ist zu untersuchen, a) welche Materialspannung für Schrauben vorausgesetzt wird, deren Spindeldurchmesser nach Formel (46) pag. 69 Maschinenbau, Bd. I, für eine Zugbelastung von $P = 1824^k$ berechnet

Digitized by Google

sind und b) wie vielfache Sicherheit sich bei Anwendung der Formeln (46) oder (44) ergiebt.

Auflösung a). Der Spindeldurchmesser einer Schraube, welche z. B. wie die Spannstange in Fig. 5, Bl. XII durch Anziehen des Klobens mit einer Kraft von 1824^k in ihrer Längenrichtung gezogen wird, ist nach Formel (46):

$$d = 0{,}77\sqrt{P} + 1{,}42$$
$$d = 0{,}77\sqrt{1824} + 1{,}42 = 0{,}77 \,.\, 42{,}7 + 1{,}42$$
$$d = 34{,}3.$$

Nach Tab. III, pag. 107 Bd. I würden wir also Nr. 12 des Whitworth'schen Gewindes, d. h. eine Schraube von 35^{mm} Durchmesser zu nehmen haben, welcher, wie man aus der letzten Rubrik (rechts) der Tabelle ersieht, eine Belastung von der obigen Größe entspricht. Aus der 4. Rubrik dieser Tabelle erhält man sofort den zugehörigen Kerndurchmesser $d_1 = 30{,}2$, welchen man überdies auch nach Formel (44) pag. 69 berechnen kann.

Unsere Fundamentalformel (3) für die Berechnung der Spannung s heißt:

$$s = \frac{P}{F}.$$

Der Querschnitt, welcher bei einer Schraube als kleinster oder gefährlicher Querschnitt in Frage kommt, ist eine Kreisfläche vom Durchmesser des Kernes $= d_1$. Also haben wir im vorliegenden Falle

$$F = \frac{\pi}{4} d_1^{\,2} = \frac{\pi}{4} \cdot \overline{30{,}2}^{\,2} = 0{,}785 \,.\, 912{,}04 = 716 \,\square^{mm}.$$

Dividiren wir nun die Gesammtlast von 1824^k durch die Anzahl Querschnittseinheiten, auf welche sich dieselbe vertheilt, so erhalten wir die auf 1 $\square^{mm}$ kommende Belastung oder die Materialspannung

$$s = \frac{1824}{716} = 2{,}547^k \text{ pro } \square^{mm}.$$

Auflösung b). Die Ermittelung des Sicherheitsgrades geschieht durch Division mit der als zulässig eingeführten Spannung in die Bruchbelastung. Letztere ist für Schmiedeisen nach Tabelle I pag. 14, $Z' = 40$.

Für unsere Schraube ermittelten wir $\mathfrak{Z} = 2{,}547$; also ist

$$\sigma = \frac{40}{2{,}547} = 15{,}5.$$

4. Aufgabe. Die Decke eines Magazins ist durch eine Reihe Säulen am Unterzuge zu stützen. Die Belastung der Decke ist eine ruhige, da das darüber befindliche Local ebenfalls als Lagerraum verwendet werden soll, und ist die größte mögliche Belastung zu 240000^k calculirt worden, wovon wir $^5/_8$, also 150000^k als auf die Säulen abgesetzt annehmen. Wir ordnen 5 Säulen an, sodaß jede mit 30000 Kilogr. auf Druck beansprucht wird. Welche Querschnittsdimensionen erhält demnach

a) eine Säule von Tannenholz mit quadratischem Querschnitte (Fig. 65^a) bei 10facher,
b) eine Säule von Walzeisen in Doppel-T-Querschnitt (Fig. 65^b) bei 6facher
c) eine Säule von Hohlgußeisen in Kreisring-Querschnittsform (Fig. 65^c) bei 14-facher Sicherheit, und

Digitized by Google

d) welches sind die Gewichte von je einer der drei verschiedensn Säulen, wenn jede eine Länge von 3,5^{m} hat?

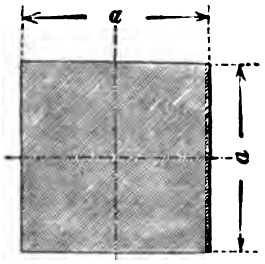


Fig. 65a.

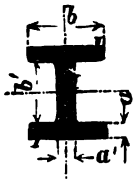


Fig. 65b.

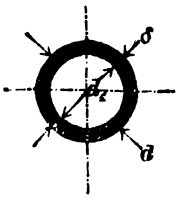


Fig. 65c.

Auflösung a). Bei Druckfestigkeit kommen dieselben drei Größen P (Belastung), F (Querschnittsinhalt) und s (Materialspannung) in Betracht, und ist ihre gegenseitige Abhängigkeit hier dieselbe wie bei Zug. Wir haben daher dieselbe Fundamentalformel (1) pag. 17 der Berechnung zu Grunde zu legen, und zwar — da in der vorliegenden Aufgabe nach dem Querschnitte gefragt wird — in der Gestalt der Formel (2): $F = \frac{P}{s}$.

Für F haben wir im Falle a) allgemein nach der Bezeichnung in Fig. 65a zu setzen den Inhalt eines Quadrates von der Seitenlänge = a, also $F = a^2$. Dann heißt die Formel:

$$a^2 = \frac{P}{s}, \text{ oder beiderseits die Wurzel gezogen:}$$

$$a = \sqrt{\frac{P}{s}}.$$

Nach der Aufgabe ist P = 30000, und für die Größe s = D (Tab. I pag. 14 u. 15) der zulässigen Druckspannung haben wir im 1. Falle bei 10facher Sicherheit zu setzen den zehnten Theil der Bruchbelastung D'; also für Tannenholz $D = 0{,}1 \cdot 5 = 0{,}5^{k}$ pro $\square^{mm}$ (Dieselbe zulässige Belastung findet sich auch in der Tab. I unter D für Tannenholz). Unsere Gleichung heißt nun numerisch:

$$a = \sqrt{\frac{30000}{0{,}5}} = \sqrt{60000}$$

$$a = 244{,}9 \sim = 245^{mm}.$$

Auflösung b). Im vorliegenden Falle haben wir zum ersten Male eine Aufgabe, welche zunächst unlösbar ist, so lange nicht weitere Bestimmungen getroffen werden. Es ist auch hier nach dem Inhalte des Querschnittes gefragt; dieser läßt sich aber nicht mehr durch eine einzige abhängige Größe ausdrücken, sondern ergiebt (bei symetrischer Anordnung) einen Ausdruck von mindestens zwei Gliedern und vier verschiedenen Größen. Nun macht man praktisch die Lösung gewöhnlich so, daß man einfach den Inhalt F des Querschnittes nach Formel (2) für die gegebene Belastung ausrechnet und dann durch Probiren auf die Querschnittsform vertheilt; denn nach dem Früheren ist es bei Zug- und Druckfestigkeit ganz gleichgiltig, welche Form (ganz abnorme Verhältnisse sind hier ausgeschlossen) der Querschnitt des beanspruchten Stabes hat, verlangt wird nur eine gewisse Anzahl Flächeneinheiten. — Mehr wissenschaftlich ist jedoch

Digitized by Google

die Methode, nach welcher man für eine Gleichung ebensoviel Bedingungen giebt als unbekannte Größen vorhanden sind. Wir wollen die Frage b) auf die erstere, elementare und praktische Weise lösen und bei Frage c) erst die rationelle und wissenschaftliche anwenden.

Wir haben vorliegend die numerischen Werthe zu setzen: Für $P = 30000$ und für $s = \mathfrak{D} = \frac{1}{6} D'$; d. i. bei Schmiedeisen in gewalzten Stäben $= \frac{1}{6} . 35 \sim^{*}) = 6^{k}$ pro $\square^{mm}$. Also ist:

$$F = \frac{30000}{6} = 5000 \square^{mm}.$$

Die Fläche Fig. 65b läßt sich in Rechtecke zerlegen. Nehmen wir dieselben zunächst von derselben Größe $\left(\frac{F}{3}\right) = f$ an, so hat jedes einen Inhalt von circa 1666,6 $\square^{mm}$ zu bekommen, und ist ferner das Verhältniß der Seiten eines solchen Rechteckes $= 1 : 6$ als günstig anzusehen, so berechnen sich nun die Größen b und a wie folgt:

Der Inhalt eines Rechteckes ist $f = a . b$, und nach obiger Voraussetzung soll sich verhalten $a : b = 1 . 6$.

Daraus a zweimal ausgerechnet, giebt:

$$a = \frac{f}{b} \text{ und } a = \frac{b}{6}.$$

Demnach

$$\frac{b}{6} = \frac{f}{b} \text{ oder } b^2 = 6f \text{ und}$$

$$b = \sqrt{6 . f} = \sqrt{6 . 1666,6} = \sqrt{10000}$$

$$b = 100^{mm},$$

und nach der zweiten Gleichung

$$a = \frac{b}{6} = \frac{100}{6}$$

$$a = 16,6.$$

Wollen wir schließlich der Wirklichkeit etwas näher kommen, so machen wir das mittlere Rechteck (II) etwas kürzer und dafür breiter. Wir setzen z. B. $a' = 20^{mm}$; dann wird $b' = \frac{1666,6}{20} = 83,3$.

Auflösung c). $P = 30000$; $s = \mathfrak{D} = \frac{D'}{14} = \frac{70}{14} = 5^{k}$ pro $\square^{mm}$. (In der Tab. I ist $\mathfrak{D} = 6$ verzeichnet).

Der Flächeninhalt F ist mit Berücksichtigung der Bezeichnung Fig. 65c gleich der Differenz zweier Kreisflächen vom Durchmesser d und d_1; also

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 - \frac{\pi}{4} d_1^{\,2} = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^{\,2}).$$

Setzen wir diesen Werth für F in die allgemeine Gleichung (2) pag. 17 ein, so erhalten wir

$$d^2 - d_1^{\,2} = \frac{4}{\pi} . \frac{P}{s} = \frac{4}{\pi} . \frac{P}{\mathfrak{D}}.$$

Darin sind jedoch noch zwei unbekannte Größen: d und d_1. Wir geben

*) $\sim$ vor = bedeutet „annähernd".

Digitized by Google

deshalb noch die Bedingung, daß $d_1 = \frac{3}{4} d$ sein soll. Es ist dann $d_1^2 = \frac{9}{16} d^2$, und dieser Werth eingeführt:

$$d^2 - \frac{9}{16} d^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P}{D} = \frac{16 d^2 - 9 d^2}{16}$$

$$\frac{7}{16} d^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P}{D}$$

$$d = \sqrt{\frac{16 \cdot 4}{7 \cdot \pi}} \sqrt{\frac{P}{D}} = \frac{8}{1{,}772 \cdot 2{,}645} \sqrt{\frac{P}{D}}$$

$$d = 1{,}7 \sqrt{\frac{P}{D}}.$$

Für P und D die obigen Werthe eingesetzt:

$$d = 1{,}7 \sqrt{\frac{30000}{5}} = 1{,}7 \sqrt{6000} = 1{,}7 \cdot 77{,}45 = 131{,}66$$

$$d = 132^{mm}.$$

Dann ist d_1 nach obiger Bedingung:

$$d_1 = \frac{3}{4} \cdot 132 = 99 = \sim 100^{mm}.$$

Daraus ergiebt sich eine Wandstärke der hohlcylindrischen Säule:

$$\delta = \frac{d - d_1}{2} = \frac{132 - 100}{2} = 16^{mm}.$$

Auflösung d). Das absolute Gewicht eines Körpers findet man, indem man das Volumen des Körpers mit dem spec. Gewichte multiplicirt. Die Gewichtsberechnung ist am einfachsten, wenn man die Dimensionen des Körpers direct in Decimetern, das Volumen also in Cubikdecimetern ausdrückt, da 1 Cbkdecimeter = 1^l Wasser 1^k wiegt und demnach die spec. Gewichte γ (Tab. I, pag. 14 u. 15) sofort mit dem in Cubikdecimetern ausgedrückten Volumen zu multipliciren sind.

Im 1. Falle a) haben wir ein Prisma von $3{,}5^m = 35^{dm}$ Länge, $245^{mm} = 2{,}45^{dm}$ Breite und eben so großer Dicke. Also ist das Volumen

$$V = 35 \cdot 2{,}45 \cdot 2{,}45 = 210{,}0875 \sim = 210{,}1 \text{ Cbk}^{dm}.$$

Das specif. Gewicht für Tannenholz ist nach Tab. I im Mittel $\gamma = 0{,}62$. Das absolute Gewicht der Säule also

$$G = 130{,}262^k. —$$

Im 2. Falle b) hatten wir einen Querschnittsinhalt von 5000 $\square^{mm}$; d. s. 0,5 $\square^{dm}$, multiplicirt mit der Länge 35^{dm} giebt:

$$V' = 17{,}5 \text{ Cbk}^{dm}. \text{ Für Schmiedeisen ist im Mittel } \gamma = 7{,}7$$

$$G = 17{,}5 \cdot 7{,}7 = 134{,}75^k. —$$

Im Falle c) bei Gußeisen ist der Querschnitt der hohlen Säule:

$$F = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) = 0{,}7854 \left(\overline{1{,}32}^2 = \overline{1{,}00}^2\right) = 0{,}583 \square^{dm}.$$

Das Volumen bei 35^{dm} Länge:

$$V = 0{,}583 \cdot 35 = 20{,}4 \text{ Cbk}^{dm}$$

und das absolute Gewicht der hohlcylindrischen Säule:

$$G = 20{,}4 \cdot 7{,}4 = 151^k. —$$

Dabei ergiebt sich also das eigenthümliche Resultat, daß trotz der sehr verschiedenen Widerstandsfähigkeiten und der sehr abweichenden spec. Gewichte der drei in Frage kommenden Materiale die absoluten Gewichte der für dieselbe Belastung

Digitized by Google

ausgemittelten Gegenstände nicht bedeutend von einander abweichen. Es läßt dies auf einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen Festigkeit und Schwere, mit anderen Worten, zwischen der Anordnung der Molecüle und der Festigkeit bei gewissen Körpern schließen.

5. Aufgabe. Mittelst einer Steinbrechmaschine — deren wesentliche Wirkungsweise darin besteht, daß ein beweglicher Backen von Eisen (mit Hartguß- oder Stahlplatte belegt) sich normal gegen einen dergleichen festen hinbewegt und die dazwischen gebrachten Körper zerdrückt — soll Basalt zerkleint werden. Welche Kraft ist zur Bewegung des Backens nothwendig, wenn die wirksame Druckfläche desselben 400^{mm} lang und 300^{mm} breit ist und angenommen wird, daß diese ganz mit Steinen überdeckt ist?

Auflösung. In diesem Falle ist der Querschnitt der zu zerdrückenden Masse (angenommen, sie bilde einen einzigen festen Körper) $F = 120000\ \square^{mm}$. Die Bruchbelastung des Basaltes ist bei Wirkung auf Druck $D' = 12^k$ pro $\square^{mm}$. Also ist

$$P = 120000 \,.\, 12$$

$$P = 1440000^k = 28800 \text{ Ctr.}$$

Dieser Druck läßt sich natürlich nur durch überaus große Uebersetzung in dem Mechanismus zwischen den Angriffspunkten der Kraft und der Last erreichen, und zwar geschieht dies entweder durch die hydraulische Presse oder durch Kniehebel.

Festigkeit gezogener und gedrückter (prismatischer) Körper mit Rücksicht auf deren Eigengewicht.

Bei Körpern, welche entweder vertical frei aufgehängt (Fig 59 pag. 6) oder auf einer horizontalen Ebene gestützt (Fig. 60a daf.) sind, wird man das Eigengewicht (G) des betr. Körpers einfach auf die Weise in Rechnung bringen, daß man dieses (in derselben Gewichtseinheit) zu der übrigen Belastung (P) addirt. Wir werden also dann in der Fundamentalformel (1.) anstatt P zu setzen haben:

$$(P + G) = Fs.$$

Darin bedeutet G das Gewicht des auf Zug oder Druck in Anspruch genommenen Körpers, soweit es nnterhalb (resp. oberhalb) des zu berechnenden Querschnittes als Belastungsgewicht bei der Inanspruchnahme in Frage kommt. Unregelmäßige Körper (mit verschieden großen Querschnitten) wird man in der That auf diese elementare Weise berechnen. Für prismatische Körper hingegen läßt sich die Fundamentalformel in einer Weise umgestalten, daß man nicht das vorher zu bestimmende, in Kilogr. ausgedrückte (absolute) Eigengewicht des Körpers einzuführen braucht, sondern direct die Dimensionen desselben und das Gewicht der Cubikeinheit des Stabmaterials. Der Querschnitt (F) des betreffenden Stabes ist ohnehin schon in der Formel (1) enthalten; also kommen nur noch die Länge und das Gewicht der Cubikeinheit des den Stab ausmachenden Stoffes hinzu.

Ein prismatischer Stab AN Fig. 66 sei vertical frei aufgehängt, bei N festgehalten (eingemauert) und am unteren Ende bei A durch eine Kraft P auf Zug belastet. (Ganz dieselbe Betrachtung und dieselben Formeln gelten auch für Druck). Wir denken uns den Stab seiner Länge (l) nach in n gleiche Theile getheilt und die Länge eines solchen Stabtheiles sei $= x$. Wäre nun einmal der Stab bei B, am Ende des ersten x eingemauert, so hätten wir an dieser Stelle eine Belastung

Digitized by Google

gleich der angehängten Last P plus dem Gewichte des unter B befindlichen Stabtheiles. Das Gewicht der Cubikeinheit des letzteren bezeichnen wir allgemein mit ε. Das Volumen eines prismatischen Körpers ist gleich dem Querschnitte (F), multiplicirt mit der Länge, hier x. Also ist für den Querschnitt bei B als Einmaurungsstelle die Belastung $= P + Fx\varepsilon$; für den Punkt C, welcher um $2x$ über A liegt, ist dieselbe $= P + F \cdot 2x\varepsilon$; für D ist sie $= P + F \cdot 3x\varepsilon$ u. s. f. Wir erhalten für die Stelle N entsprechend: $P + F \cdot nx\varepsilon$. Da nun $nx = l$, so ist als Zugbelastung für den Querschnitt bei N zu setzen: $P + Fl\varepsilon$.

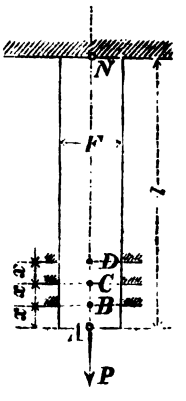


Fig. 66.

Diese Belastung muß nun der Stab an seiner Befestigungsstelle (dieselbe ist bei prismatischen Körpern zugleich „gefährlicher Querschnitt") mit der Widerstandsfähigkeit gegen Zug das Gleichgewicht halten. Das geschieht aber offenbar auf dieselbe Weise wie in der Fundamentalgleichung (1). Also erhalten wir, indem wir dort anstatt P setzen $P + Fl\varepsilon$:

$$P + Fl\varepsilon = Fs.$$

Daraus ist: $P = Fs - Fl\varepsilon$, oder F als gemeinschaftlicher Factor gezogen:

$$P = F(s - l\varepsilon) \ldots (4.)$$

Das ist die Belastnng, welche ein prismatischer Körper von der Länge l und dem Querschnitte F an der Einmauerungsstelle (um l oberhalb des unteren Endes) außer seinem Eigengewichte, aber mit Rücksicht auf dasselbe zu tragen vermag.

Daraus finden wir den Querschnitt:

$$F = \frac{P}{s - l\varepsilon} \ldots . (5.)$$

und die Materialspannung s aus der Gleichung:

$$P = Fs - Fl\varepsilon$$

$$Fs = P + Fl\varepsilon, \text{ und durch F dividirt:}$$

$$s = \frac{P}{F} + l\varepsilon \ldots (6.)$$

Das Eigengewicht übt streng genommen bei allen Körpern, sie mögen auf irgend welche Art beansprucht und irgendwie befestigt sein, als vertical abwärtswirkende Kraft (Schwere) seinen Einfluß aus. Dennoch bringt man dasselbe in der Praxis nur dann in Rechnung, wenn es voraussichtlich zur übrigen Belastung eine namhafte Größe hat. —

In der Tab. I pag. 14 und 15 ist eine Rubrik „Specifisches Gewicht" für die in dieser Tabelle aufgeführten, in der Maschinen- und Bautechnik am häufigsten verwendeten Materiale enthalten. Dasselbe hat man für den Gebrauch der Formeln (4.) bis (6.) in absolutes pro Kubikeinheit umzuwandeln. Das geschieht im Decimalmaße sehr einfach folgenderweise:

Laut pag. 202*) des 1. Bandes wiegt 1 Liter $= 1$ kb^{dm} destillirtes ꝛc. Wasser $= 1^k$. Das specif. Gewicht fester und flüssiger Körper ist auf Wasser bezogen, also ist, wenn ein kb^{dm} Material γ^k wiegt:

*) Daselbst ist fälschlicher Weise Zeile 12 und 17 in den drei Decimalbrüchen eine Null zuviel gesetzt worden.

Digitized by Google

Das absolute Gewicht ein. Körpers v. Volumen V, ausgedrückt in $kb^{dm} = V.\gamma^k$
" " " " " " " V, " " $kb^{cm} = V.0{,}001\gamma^k$
" " " " " " " V, " " $kb^{mm} = V.0{,}000001\gamma^k$
" " " " " " " V, " " $kb^m = V.1000\gamma^k$.

Das Volumen wird aber in obigen Formeln für prismatische Stäbe ausgedrückt durch $V = F \cdot l$,
und das absolute Gewicht ist, wenn ε das Gewicht der Körper- oder Volumeneinheit ist, allgemein:

$$G = V\varepsilon = Fl\varepsilon.$$

Bei Einführung des specif. Gewichtes hat man demnach zu setzen,
wenn F in □Decim. nnd 1 in Decim. gegeben: $\varepsilon = \gamma$
" F " □Centim. " 1 " Centim. " : $\varepsilon = 0{,}001\gamma$
" F " □Millim. " 1 " Millim. " : $\varepsilon = 0{,}000001\gamma$
" F " □Meter " 1 " Meter " : $\varepsilon = 1000\gamma$.

Daraus ersieht man, daß es für die Berechnung von Körpergewichten am einfachsten ist, wenn man die Dimensionen desselben in Decimetern angiebt oder mißt, da in solchem Falle $\varepsilon = \gamma$, d. h. $G = V\gamma^k = Fl\gamma^k$. Man hat alsdann nur den körperlichen Inhalt mit der in Tab. I unter „spec. Gew." enthaltenen Zahl zu multicipliren. —

In den meisten technischen Handbüchern und Tabellenwerken findet man das Gewicht von gewissen Materialien in prismatischer Form (Drahtseile, Walzeisen, Röhren, Hölzer ꝛc.), als sogenanntes „Laufendes Gewicht" oder „Gewicht pro laufende Längeneinheit", angegeben. Das ist für den praktischen Gebrauch und besonders für die Calculation sehr bequem. Wäre das absolute Gewicht pro laufende Längeneinheit z. B. für ein solches Material $= G_0$, so hätten wir in der Formel $P + Fl\varepsilon = Fs$ zu setzen $G_0 l$ an Stelle des 2. Gliedes; also wäre:

$$P + G_0 l = Fs \text{ und alsdann}$$
$$P = Fs - G_0 l \ldots . \quad (7.)$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Welche Belastung trägt mit Sicherheit ein prismatischer, vertical-freihängender Stab von weichem Gußstahl, dessen Querschnitt ein reguläres Sechseck (Fig. 67) mit der Seitenlänge $b = 12^{mm}$, und dessen freie Länge (vom unteren Ende bis zur Befestigungsstelle) $l = 5^m$ mißt?

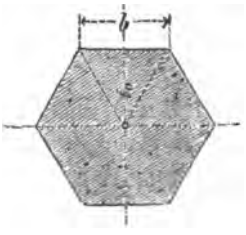


Fig. 67.

Auflösung. Den Flächeninhalt des regelmäßig-sechseckigen Querschnittes finden wir mit Rücksicht auf die Fig. 1 pag. 43 und Tab. I pag. 44 Bd. I, indem wir das Sechseck in seine 6 congruenten gleichseitigen Dreiecke mit je 60° Spitzenwinkel zerlegt denken, zu:

$$F = 6 \cdot \frac{bt_0}{2}$$

$t_0 = 0{,}866 \cdot b$; also $F = 3 \cdot 0{,}866 b^2 = 2{,}598 b^2$.
Dann ist nach Formel (4) pag. 29

$$P = 2{,}598 \cdot b^2 (s - l\varepsilon).$$

Digitized by Google

Für die zulässige Materialspannung s haben wir vorliegend nach Tab. I pag. 14 und 15 zu setzen: $s = \beta = 16^k$ pro $\square^{mm}$; $l = 5^m = 5000^{mm}$ und, da wir alle Dimensionen in Millimetern ausdrücken, $\varepsilon = 0{,}000001\ \gamma$. Für weichen Gußstahl steht in der Tab. I: $\gamma = 7{,}5 \div 7{,}8$. Nehmen wir $\gamma = 7{,}7$, so ist

$$P = 2{,}598 \,.\, \overline{12}^2\ (16 - 5000 \,.\, 0{,}000001 \,.\, 7{,}7) = 2{,}598 \,.\, 144 \,.\, 15{,}9615$$
$$P = 5971{,}4^k.$$

Dasselbe Resultat werden wir erhalten, wenn wir die Dimensionen des Stabes in Decimetern ausdrücken. Dann ist aber s nicht = 16 zu setzen, sondern die Spannung pro $\square^{dm}$ einzuführen, welche im Verhältniß von 1 $\square^{mm}$ zu 1 $\square^{dm}$ größer ist; also $s = \beta = 16 \,.\, 100 \,.\, 100 = 160000^k$ pro $\square^{dm}$. Dagegen wird $\varepsilon = \gamma$, und es ist:

$$P = 2{,}598 \,.\, 0{,}12^2\ (160000 - 50 \,.\, 7{,}7) = 5971{,}4^k.$$

Wollen wir schließlich den Einfluß kennen lernen, welchen die Rücksicht auf das Eigengewicht in dem Resultate veranlaßt, so haben wir in der Gleichung (4) pag. 29 zu setzen $1 = 0$. Dann fällt das Glied $l\varepsilon$ weg, und wir erhalten wie aus Formel (1) pag. 17

$$P = Fs$$
$$P = F \,.\, \beta = 2{,}598 \,.\, \overline{12}^2 \,.\, 16$$
$$P = 5985{,}8^k$$

die Belastung, welche derselbe Stab aus demselben Materiale ohne Rücksicht auf sein Eigengewicht tragen würde. Die Differenz $= 5985{,}8 - 5971{,}4 - 14{,}4^k$ ist hier deshalb verhältnißmäßig gering, weil die Festigkeit des Gußstahles verhältnißmäßig groß ist. Es wird also der Einfluß des Eigengewichtes um so größer sein, je größer die Länge oder je höher das specifische Gewicht des belasteten Körpers ist, d. h. je kleiner der Subtrahent in der Klammer Formel (4) ist.

2. Aufgabe. Welche Belastung P trägt ein Eisendrahtseil von 36 Drähten, wenn ein Draht $\delta = 3^{mm}$ Durchmesser hat und dasselbe auf eine Länge von 300^m frei hängt?

Auflösung. Der äußere Durchmesser d (des umschreibenden Kreises) eines 36-drähtigen Seiles ist ungefähr 8 mal so groß als der Durchmesser eines Drahtes, also hier $d = 8 \,.\, 3 = 24^{mm}$, und das Gewicht eines laufenden Meter ist ungefähr 0,7*) vom laufenden Gewichte eines Rundeisenstabes von demselben Durch-

*) Zu diesem der Wirklichkeit sich nähernden Resultate gelangen wir durch folgende Calculation:

Ist F der Querschnitt eines vollen cylindrischen Eisenstabes vom Durchmesser d und F' der Querschnitt eines Drahtseiles — den Inhalt desselben gleich der Summe von den einzelnen Drahtquerschnitten gesetzt — von 36 Drähten, von denen jeder eine Stärke δ hat, so verhält sich

$$F : F' = \frac{\pi}{4} d^2 : 36 : \frac{\pi}{4} \delta^2$$
$$= d^2 : 36\delta^2.$$

Da nun für diesen Fall $d = 8\delta$ gesetzt werden kann, so ist

$$F : F' = (8\delta)^2 : 36\delta^2 = 64\delta^2 : 36\delta^2$$
$$F : F' = 16 : 9.$$

Digitized by Google

messer d. Das Gewicht eines laufenden Meter Rundeisen von 24^{mm} Stärke ist $G_0 = 3{,}52^k$ (Ingen.-Kalender 1874, pag. 50), also das Gewicht eines Meter Eisendraht $G'_0 = 0{,}7 \,.\, 3{,}52 = 2{,}464^k \sim = 2{,}5^k$.

Mit Benutzung der Formel (7) erhalten wir $P = Fs - G'_0 l$, und numerisch:

$$P = 36 \,.\, \frac{\pi}{4} \delta^2 \,.\, 12000000 - 2{,}5 \,.\, 300 = 9 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 0{,}000009 \,.\, 12000000 - 750$$

$$= 3053{,}64 - 750 = 2303{,}64 \sim =$$

$$P = 2300^k.$$

Probe. Prüfen wir einmal dieses Resultat auf seine Richtigkeit, indem wir umgekehrt die Aufgabe lösen: Für eine angehängte Last $P = 2300^k$ ist ein 36-drähtiges Eisendrahtseil zu berechnen, unter der Voraussetzung, daß dasselbe (z. B. in einem Schachte) auf 300^m vertical freihängt. —

Wir haben alsdann die Formel (7):

$$P = Fs - G_0 l \text{ für die Drahtdicke } \delta \text{ aufzulösen.}$$

Es ist: $P = 36 \,.\, \frac{\pi}{4} \delta^2 s - G'_0 l.$

Für G'_0 setzen wir wieder beim 36-drähtigen Seile $G'_0 = 0{,}7 G_0$.

$$P = 36 \,.\, \frac{\pi}{4} \delta^2 s - 0{,}7 G_0 l.$$

Dieses G_0 läßt sich aber allgemein folgenderweise ausdrücken:

$$G_0 = \frac{\pi}{4} d^2 \,.\, 1 \,.\, 1000\gamma,$$

und für d gilt nach obiger Voraussetzung beim 36-drähtigen Seile wieder

$$d = 8\delta; \; d^2 = 64\delta^2.$$

Also ist

$$P = 36 \frac{\pi}{4} \delta^2 \,.\, s - 0{,}7 \,.\, \frac{\pi}{4} \delta^2 64 \,.\, 1000\gamma \,.\, l.$$

$$P = 4 \frac{\pi}{4} \delta^2 [9 \,.\, s - 0{,}7 \,.\, 16 \,.\, 1000\gamma \,.\, l]$$

$$P = \pi \delta^2 [9 \,.\, s - 11200 \,.\, l]$$

$$\delta = \sqrt{\frac{P}{\pi (9 \,.\, s - 11200\gamma \,.\, l)}}.$$

Diese Formel gilt allgemein für ein 36-drähtiges Eisenseil in Metermaß.

Die Volumen V und V' von 2 cylindrischen Stäben mit den Querschnitten F und F' und derselben Länge $= 1^m$ verhalten sich dann ebenso:

$$V : V' = F : F' = 16 : 9,$$

und wenn wir endlich das specif. Gewicht von Walzeisen gleich dem von Eisendraht annehmen — sie sind nur wenig verschieden (Tab. I pag. 14 und 15) — so ergiebt sich für die laufenden Gewichte von 1^m Rundeisen (G_0) und 1^m Eisen-Drahtseil (G'_0) die Proportion:

$$G_0 : G'_0 = 16 : 9$$

$$G'_0 = \frac{9}{16} G_0.$$

In Wirklichkeit wird G'_0 etwas größer ausfallen, da bei einem Querschnitte durch ein Drahtseil wir nicht genau Kreise vom Durchmesser δ erhalten, sondern etwas größere Ellipsen. Nehmen wir dazu noch das geringe Mehr vom specif. Gewichte des Eisendrahtes und etwa vorkommende Hanfseelen, so kann man setzen: $G'_0 = 0{,}7 \, G_0$. — Für ein 72-drähtiges Seil wäre dann $G'_0 = 0{,}5 \, G_0$.

Digitized by Google

Die Werthe eingesetzt: $\delta = \sqrt{\frac{2300}{3{,}1416\,(9\,.\,12000000 - 11200\,.\,7{,}8\,.\,300)}}$

$$\delta = \sqrt{0{,}000009} = 0{,}003^{m}$$

$$\delta = 3^{mm} \text{ und } d = 24^{mm}. —$$

Wollen wir endlich wissen, bei welcher freien Länge (l) das Seil durch sein Eigengewicht schon derart in Anspruch genommen wird, daß es eine andere Belastung außerdem nicht tragen kann, so haben wir in der allgemeinen Formel (7) P = Null zu setzen und die Gleichung für l aufzulösen:

$$0 = Fs - G_0 l$$

$$Fs = G_0 l$$

$$\frac{86}{9} \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 s = 0{,}7 \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot 64 \cdot 1000\gamma l$$

$$9s = 0{,}7 \cdot 16 \cdot 1000\gamma l$$

$$l = \frac{9s}{11200\,.\,\gamma} = \frac{9\,.\,12000000}{11200\,.\,7{,}8} = \frac{108000000}{87360} = 1236^{m}.$$

Diese Länge bezeichnet man bei Seilen mit dem Namen „Traglänge", und es wird allgemein — wie man aus dem Gange der Rechnung sieht, haben die Seildicke und die Drahtdicke keinen Einfluß — dieselbe für Drahtseile zu 1000^{m} angenommen. Ueber 1000 Meter hinaus läßt sich also ein Seil, welches auf diese Länge freihängt, nicht mehr als Zug- oder Triebseil verwenden, da die Festigkeit desselben durch das Eigengewicht schon vollständig in Anspruch genommen wird und demnach eine fremde Last nicht tragen oder eine Arbeit dann nicht mehr leisten kann.

3. Aufgabe. Ein Körper von Blei (Fig. 68ᵃ) soll für eine Zugbelastung von $P = 10^{k}$ berechnet werden, sodaß derselbe an fünf gleichweit entfernten Stellen seiner Länge ($l = 1^{m}$) diese Last P und sein eigenes Gewicht mit derselben Sicherheit trägt. Der Querschnitt desselben sei durchweg quadratisch. Wie groß ist die Seitenlänge des Querschnittes an den betreffenden fünf Stellen?

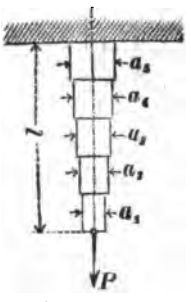


Fig. 68ᵃ.

Auflösung. Wir benutzen Formel (5)

$$F = \frac{P}{s - l\varepsilon}$$

und setzen für F der Reihe nach $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2$.

Die zulässige Belastung für Blei ist nach Tab. I $s = \beta = 0{,}2^{k}$ pro $\square^{mm}$. Die Länge des ersten (untersten) Stückes ist $= 1000 : 5 = 200^{mm}$ und das Eigengewicht

$$\varepsilon = 0{,}000001\gamma = 0{,}000001\,.\,11{,}4.$$

Also ist 1) $a_1 = \sqrt{\frac{P}{\beta - 1\,.\,0{,}000001\gamma}}$

$$a_1 = \sqrt{\frac{10}{0{,}2 - 200\,.\,0{,}000001\,.\,11{,}4}}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{10}{0{,}2 - 0{,}00228}}$$

$$a_1 = \sqrt{50{,}58}$$

$$a_1 = 7{,}1^{mm}.$$

Digitized by Google

Das absolute Gewicht dieses Theiles ist

$G = 50{,}58 \,.\, 200 \,.\, 0{,}000001 \,.\, 11{,}4 = 50{,}58 \,.\, 0{,}00228 = 0{,}1153^k.$

Die Belastung des nächstfolgenden Theiles ist also

$P = 10 + 0{,}1153^k$, und wir bekommen für a_2:

$$a_2 = \sqrt{\frac{10{,}1153}{0{,}2 - 0{,}00000 \,.\, 11{,}4 \,.\, 200}} = \sqrt{\frac{10{,}1153}{0{,}1977}} = \sqrt{51{,}16}$$

$$a_2 = 7{,}15^{mm}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir noch

$$a_3 = 7{,}19$$
$$a_4 = 7{,}23 \text{ und}$$
$$a_5 = 7{,}27$$

Aus der Vergleichung dieser einzelnen Resultate ersieht man, daß die Querschnitte nach der Befestigungsstelle hin zunehmen. Das Gesetz der Zunahme läßt sich jedoch daraus nicht erkennen, und es ist überhaupt in den gewöhnlichen Fällen der Praxis der Unterschied zwischen dem untersten Querschnitte (bei Zug, obersten bei Druck) und dem an der Befestigungsstelle sehr unbedeutend. Wir haben ausdrücklich im obigen Beispiele die Verhältnisse ungünstig gewählt — wir haben einen Körper mit sehr geringer Tragfähigkeit und hohem specifischem Gewichte angenommen — und dennoch erstreckt sich die Differenz nur auf die 2. Decimalstelle der in Millimetern ausgedrückten Querschnittsdimensionen. Die Materialersparniß gegenüber einem prismatischen Körper von derselben Festigkeit im gefährlichen Querschnitte ist nicht groß, und eher bringt die leichtere Herstellung der letzteren größeren Vortheil, weshalb man sich bei gezogenen oder gedrückten Körpern mit der Berechnung des gefährlichen Querschnittes begnügt.

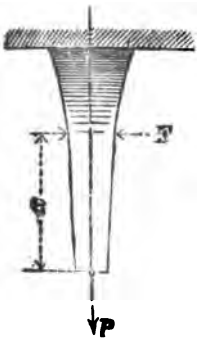


Fig. 68b.

Nur der Vollständigkeit halber führen wir an, daß man einen Körper von constanter Zug- und Druckfestigkeit in allen Querschnitten erhält, wenn man die Querschnittsflächen in mehreren um eine variable Größe x vom freien Ende abstehenden Punkten berechnet nach der Gleichung:

$$F = \frac{P}{s} e^{\frac{s}{s} x} \text{ oder für logarithm. Rechnung:}$$

$$\log F = \log \frac{P}{s} + 0{,}434 \frac{s}{s} x.^*)$$

Darin ist e = Basis der natürlichen Logarithmen = 2,71828... Das Profil dieses Körpers, der übrigens eine beliebige Querschnittsform haben kann, ist begrenzt durch zwei krumme Linien, welche einer sogenannten Logistik angehören.

Formänderung gezogener und gedrückter (prismatischer) Stäbe.

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Querschnitte eines nach Art der Fig. 69a oder 69b beanspruchten Stabes unter einander congruent sind, daß das Material durchgehends gleiche Dichtigkeit und dieselbe Festigkeit zeigt und daß die Richtung der geometrischen (Schwerpunkts-) Axe (geradlinig) ununterbrochen dieselbe ist und mit der der einwirkenden Kraft und denjenigen der Spannungen parallel läuft.

*) Siehe Reuleaux, Constr. 1869, pag. 8.

Digitized by Google

Alsdann bekommen wir bei Zug (Fig. 69a) für die Länge l des Stabes eine gewisse Verlängerung λ und bei Druck (Fig. 69b) entsprechend eine Verkürzung λ', pro Längeneinheit des Stabes also eine sogenannte relative Längenänderung $\frac{\lambda}{l}$ resp. $\frac{\lambda'}{l}$ (s. Tab. I, pag. 14 u. 15), d. h. der Stab dehnt sich in Folge der ziehenden Wirkung einer Kraft P bei einem Querschnittsinhalte von F□mm und bei einer Länge von l^{mm} um eine Größe λ^{mm} aus und er verkürzt sich bei Druck unter denselben Verhältnissen um λ'^{mm}.

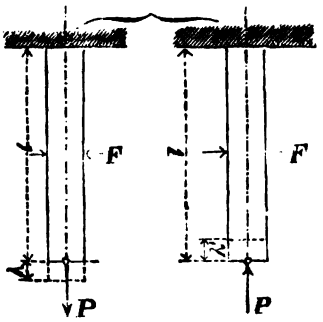


Fig. 69a. Fig. 69b.

Die relative Verlängerung $\frac{\lambda}{l}$ ist bei einem und demselben Materiale meistens verschieden von der relativen Verkürzung $\frac{\lambda'}{l}$. Ausgenommen ist z. B. Schmiedeisen, bei dem nahezu $\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda'}{l}$, während bei Gußeisen $\frac{\lambda'}{l} = 2\frac{\lambda}{l}$ (siehe Tab. I, Rubrik: „Ausdehnung und Zusammendrückung an der Elasticitätsgrenze").

Die Formänderung gezogener oder gedrückter Stäbe besteht aber außer der genannten Längenänderung noch in einer Querschnittsänderung: Die Seitenflächen des den Stab begrenzenden Prisma's machen eine Bewegung gegen, resp. von einander, und es entsteht eine Einziehung bei Zug und eine Ausbauchung bei Druck. Die Querschnittsänderung ist verhältnißmäßig geringer als die Längenänderung, und es entspricht stets einer positiven Längenänderung eine negative Querschnittsänderung nnd umgekehrt. Wenn also die relative Längenänderung ist $\frac{\lambda}{l}$, so ist (nach Grashof) die Querschnittsänderung $= -\frac{\lambda}{l} \cdot \frac{1}{a}$, und darin bedeutet a eine vom Materiale des Stabes abhängige Constante, welche im Allgemeinen gleich $3 \div 4$ hesetzt werden kann. Es entspricht demnach einer Verlängerung $\frac{\lambda}{l}$ eine Quereinziehung $\frac{\lambda}{31} \div \frac{\lambda}{41}$. —

Die Abhängigkeit der Formänderung prismatischer Stäbe von der Belastung, der Länge und der Querschnittsgröße hat man durch Versuche (Wertheim) ergründet und ist dabei zu dem Resultate gelangt, daß die Längenänderung (λ resp. λ') direct proportional ist 1) der Belastung P, 2) der ursprünglichen Länge l und 3) umgekehrt proportional dem Querschnitte F. In allgemeinen Größen ausgedrückt würde also die Beziehung lauten, z. B. für Verlängerung:

$$\lambda = A \cdot \frac{Pl}{F}.$$

Als ein Gesetz läßt sich dies jedoch nur dann betrachten, wenn man mit der Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibt; denn über dieselbe hinaus findet die genannte Proportionalität nicht mehr statt. Da jedoch in den Fällen, wo es sich um Dimensionsberechnung von Maschinen- und Bauconstructionstheilen handelt, eine Beanspruchung über diese Grenze hinaus niemals stattfinden darf, da vielmehr die zulässige Beanspruchung nur ein kleiner Theil der

Digitized by Google

Belastung an der Elasticitätsgrenze ist, kann man ohne Bedenken obige Regel als Gesetz verwerthen.

In obiger Formel ist A ein constanter Materialfactor, dessen Werthe für die verschiedenen Materiale durch Versuche in der Weise festgestellt ist, daß man die Größe $\frac{1}{A}$ mittelst obiger Formel berechtnet hat zu:

$$\frac{1}{A} = \frac{P \cdot l}{F \cdot \lambda'}$$

und diese Größe = E gesetzt, giebt den sogenannten Elasticitätsmodulus des Materiales, unter welchem Namen und Zeichen er in der Tabelle I, pag. 14 u. 15 enthalten ist. Mit Einführung der Größe $E = \frac{1}{A}$ geht die Formel in folgende über:

$$\lambda = \frac{Pl}{FE} \quad \ldots \quad (8.)$$

Man findet also die Verlängerung resp. Verkürzung, welche ein prismatischer Stab von der Länge l und vom Querschnitte F bei einer Belastung P ($\leqq$ Z oder $\leqq$ D) erleidet, indem man das Produkt aus Belastung und ursprünglicher Länge dividirt durch das Produkt aus dem Querschnitt des Stabes und dem Elasticitätsmodulus des Materiales. —

Mit Einführung der Größe s aus Formel (1) pag. 17 lautet die Formel (8)

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{s}{E} \quad \ldots \quad (9).$$

D. h., ist in einem Stabe eine Spannung s pro $\square^{mm}$ des Querschnittes, so ist die relative Längenänderung desselben $= \frac{s}{E}$. Auf diese Weise sind in der Tab. I die Werthe $\frac{\lambda_0}{l}$ und $\frac{\lambda'_0}{l}$ berechnet; und zwar ist für s, weil dort $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{\lambda'}{l}$ an der Elasticitätsgrenze gilt, die Spannung Z resp. D zu setzen.

Auch über die Bedeutung der Größe E des Elasticitätsmodulus giebt uns obige Formel (8) Aufschluß. Setzen wir nämlich darin beispielsweise

$F = 1$ und $\lambda = l$, so entsteht

$$E = P.$$

Das heißt nun: Der Elasticitätsmodulus eines Materiales bedeutet diejenige Kraft, welche einen prismatischen Stab vom Querschnitte = der Flächeneinheit um eine Größe λ gleich der ursprünglichen Länge l verlängern würde, vorausgesetzt, daß er eine solche Aenderung innerhalb der Elasticitätsgrenze ertragen könnte (s. pag. 13.)

Beispiele.

1. Aufgabe. a) Welche Verlängerung erleidet ein Messingdraht von 5^m Länge und $0{,}74^{mm}$ Durchmesser bei einer Anspannung von $P = 4{,}3^k$ und b) wie groß ist die absolute Verlängerung desselben an der Elasticitätsgrenze?

Auflösung a) Es ist im vorliegenden Falle $P = 4{,}3^k$, $l = 5000^{mm}$ und $F = 0{,}43\ \square^{mm}$. Nach Tab. I ist für Messingdraht $E = 10000$.

$$\lambda = \frac{4{,}3 \cdot 5000}{0{,}43 \cdot 10000} = 5^{mm}.$$

Digitized by Google

Auflösung b) Wir setzen in Formel (8) für $P = Z = 13$ und erhalten

$$\lambda_0 = \frac{13 \,.\, 5000}{0{,}43 \,.\, 10000} = 15^{mm}.$$

2. Aufgabe. Wie groß ist der Horizontalschub P, welcher auf die schmiedeiserne Spannstange ab eines Pultdaches (Fig. 70) durch das Sturm-, Schnee- und Eigengewicht auf die Sparren abgesetzt wird, wenn die normale Länge der Stange vor dem Einbauen $l = 10^m$, der Durchmesser derselben $= 20^{mm}$ beträgt und dieselbe unter der Belastung eine Länge von $10{,}003^m$ aufweist?

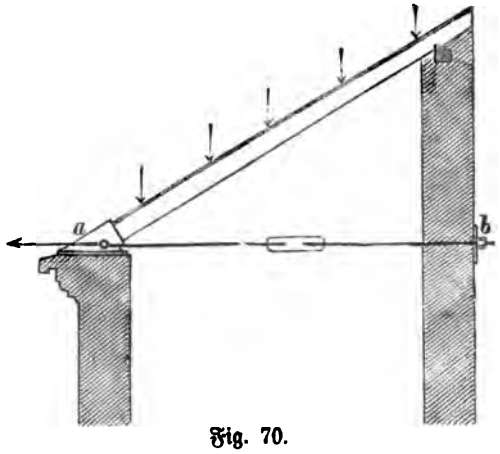


Fig. 70.

Auflösung. Die Verlängerung beträgt also nach genauer Messung $= 10{,}003 - 10 = 3^{mm}$, der Querschnitt (kreisförmig) $F = 314{,}16$. Nun ist nach Formel (8)

$$P = FE \,.\, \frac{\lambda}{l} = \frac{314{,}16 \,.\, 20000 \,.\, 3}{10000} = 1885^k.$$

3. Aufgabe. Um wieviel verkürzt sich ein Würfel von Gußeisen, dessen Seitenlänge $a = 30^{mm}$ beträgt, unter einem Gewichte von 200 Ctr.?

Auflösung. In Formel (8) haben wir für diesen Fall zu setzen: $P = 10000^k$, $l = 30$, $F = 30 \,.\, 30 = 900$ und $E = 10000$. Also ist:

$$\lambda = \frac{10000 \,.\, 30}{900 \,.\, 10000} = 0{,}0333^{mm}.$$

Wir haben im Vorstehenden das Eigengewicht des Stabes außer Betracht gelassen. Kommt es darauf an, die Längenänderung unter dem Einflusse des Materialgewichtes zu bestimmen, so bedient man sich folgender Formel:

$$\lambda = [P + \tfrac{1}{2} G] \frac{l}{FE},$$

und es ist G das Eigengewicht des in Frage kommenden Stabes in Kilogrammen oder $G = F \,.\, l \,.\, \varepsilon$.

Mit Einführung dieses ist dann

$$\lambda = \frac{Pl}{FE} + \frac{F\varepsilon}{FE} \cdot \frac{l^2}{2}.$$

II. Schub- oder Scheerfestigkeit.

Ist ein Körper nach Art der Fig. 61[a], pag. 7 befestigt und wirkt auf denselben eine in unmittelbarer Nähe der festen Fläche angreifende Kraft parallel derselben ein, so findet eine Beanspruchung auf Schub- oder Scheerfestigkeit statt. Denken wir uns also in der Ebene der festen Fläche einen Querschnitt durch den Körper gelegt und in unendlich geringer Entfernung davon einen zweiten, dem ersten parallelen, in dessen Ebene die Kraft wirkt, so werden sich diese beiden Querschnitte parallel an einander verschieben. Von

Digitized by Google

dem Verhältnisse der äußeren Kraft zur Widerstandsfähigkeit des Materiales hängt es dann ab, ob nur eine Anspannung der Materialfasern oder eine Trennung derselben erfolgt. So geschieht es z. B., wenn man einen Gegenstand mittelst der Scheere durchschneidet: Der eine Backen der Scheere repräsentirt die feste Fläche und der andere enthält (überträgt) die scheerende Kraft; beide sind hier einander unendlich nahe, und es findet auch eine vollständige Trennung des Körpers statt. Ebenso werden die Nieten einer Blechverbindung Fig. 7 und 8 ꝛc., Bl. XIII oder wird der Keil einer Stangenverbindung Fig. 5, Bl. XXIV Bd. 1 auf Schub- oder Scheerfestigkeit in Anspruch genommen.

Die Bedingungen für den Fall dieser Inanspruchnahme lassen sich also mit Rücksicht auf die erwähnten allgemeinen Beispiele folgenderweise charakterisiren: Die Ebene, in der der Körper festgehalten wird und diejenige, in welcher die beanspruchende Kraft wirkt, sind parallel zu einander und liegen einander unendlich nahe. Wie groß nun in einem besonderen Falle die in Frage kommende Querschnittsfläche ist, wieviele einzelne Querschnitte einer Verbindung gleichzeitig und vielleicht gleich stark in Anspruch genommen werden, wie groß überhaupt die Inanspruchnahme in jedem einzelnen Falle ist, bleibt der Beurtheilung des Rechnenden vorbehalten.

Den Vorgang im Innern eines solcherweise beanspruchten Körpers kann man sich am einfachsten so vorstellen: die Fasern des betreffenden Querschnittes werden normal zu diesem abgescheert und eben dabei jede einzelne oder gewisse Faserschichten gleichzeitig gezogen und gedrückt. Zug und Druck, resp. Abreißen und Zerdrücken werden sich hierbei aber um so deutlicher von einander unterscheiden, sie werden sich auf um so größere Faserschichten vertheilen, je weiter die beanspruchende Kraft normal von der festen Fläche absteht. Je größer aber dieser Abstand, wenn er überhaupt eine meßbare Größe erreicht hat, wird, desto mehr nähert sich die Beanspruchung derjenigen „auf Biegungsfestigkeit", wo Zug und Druck zwei durch die neutrale Schicht getrennte Gebiete des Querschnittes einnehmen.

Das Gleichgewicht zwischen der beanspruchenden Kraft und der Festigkeit des betreffenden Körpers gegen Abscheeren stellt sich für die gewöhnlichen Fälle der praktischen Technik in derselben Weise dar wie bei Zug und Druck, d. h. es ist die Widerstandsfähigkeit eines auf Schub- oder Scheerfestigkeit beanspruchten Körpers direct proportional dem Querschnitte.

Ist der Inhalt des fraglichen Querschnittes = F Flächeneinheiten und die Spannung pro Flächeneinheit desselben allgemein = s, so erhalten wir die Gleichung

$$P = Fs, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

oder es ist der Flächeninhalt $F = \frac{P}{s}$ $\ldots\ldots$ (11)

Für s würden wir nun in dem vorliegenden Falle einen der drei Coefficienten S, S oder S' aus Tab. I, pag. 14 und 15 zu setzen haben, je nachdem die Beanspruchung ist oder sein soll entsprechend der zulässigen Belastung, der Belastung an der Elasticitätsgrenze oder dem Bruche. Hinsichtlich dieser Werthe sei nur erwähnt, daß im Allgemeinen S (Belastung an der Elasticitätsgrenze) gleich 0,8 vom kleineren der beiden Werthe Z und D eines Materiales entspricht. Setzt man also $s = S = 0{,}8\,Z$ (wenn $Z < D$) oder $= S = 0{,}8\,D$

Digitized by Google

wenn ($D < Z$), so erreicht man mit der Belastung P im Allgemeinen die Elasticitätsgrenze, und es ist in den Fällen, wo für die betreffenden Materiale die Coefficienten nicht direct durch Versuche bestimmt sind und wo sie in der Coefficiententabelle fehlen, hiernach zu verfahren.

Die Abscheerung ist eine in der Technik häufig vorkommende Trennungsform, und es werden zur Ausübung dieser Trennung mehrfach Maschinen construirt, für deren Berechnung dann die Widerstandsfähigkeit des betr. Materiales als Grundlage dient. Deshalb sind auch für fast alle Eisen- und Stahlsorten, die namentlich hier in Frage kommen, die dort zu verwendenden Bruchcoefficienten (S') in der Tab. I enthalten. —

Die Formänderung (Deformation) eines auf Schub- oder Scheerfestigkeit beanspruchten Körpers richtet sich ganz nach den speciellen Umständen. Im Allgemeinen verschieben sich die Faserquerschnitte parallel an einander, oder es nehmen die Fasern eine geknickte Form an, je nach der Größe der Einwirkung und nach der Angriffsweise der Kraft.*)

Beispiele.

Einige interessante Beispiele für die vorliegende Art Festigkeit boten sich in dem 1. Bande bei Berechnung der Nietungen dar, und wir verweisen an dieser Stelle auf pag. 114 –:– 122 zurück, indem wir empfehlen, jenes mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck nun nochmals durchzustudiren. —

1. Aufgabe. Welcher Durchmesser ist den fünf schmiedeisernen Nieten (Fig. 1, Bl. XX) zu geben, die das Auge mit dem Bremsbande in der gezeichneten Weise verbinden, wenn angenommen wird, daß der in dem Bande auftretende Zug $Q = 12250^k$ sich auf alle 5 Nieten gleichmäßig als abscheerende Kraft vertheilt?

Auflösung. Denken wir uns das Bremsband im Raume unveränderlich feststehend, so sind es auch die darin eingezogenen Nieten, und es bildet die obere Fläche desselben (im Schnitt Fig. 1, Bl. XX) die feste Fläche MN Fig. 61*, pag. 7, welcher parallel und unendlich nahe — nämlich die Unterkante der Lasche am Auge — die abscheerende Kraft normal auf die Mittellinien der Nieten einwirkt. Vorausgesetzt nun, daß sich die Kraft $Q = 12250^k$ auf sämmtliche Nieten gleichmäßig vertheilt, kommt auf jede die Belastung $P = 2450^k$, und dieser entspricht nach Formel (11) pag. 38 eine Querschnittsfläche

$$F = \frac{P}{s} = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{2450}{5} = 490 \text{ □}^{mm}$$

oder ein Durchmesser von $d = 25^{mm}$.

Anmerkung. Wenn wir dem schmiedeisernen Bremsbande daselbst eine Dicke $\delta = 14^{mm}$ und eine Breite $b = 125^{mm}$ geben, so ist die Tragfähigkeit desselben gegen Zug ebenfalls $P = 125 \cdot 14 \cdot 7 = 12250^k$, also in der Verbindung übereinstimmende Festigkeit vorhanden. —

---

*) Die Größe der Verschiebung der Faserquerschnitte des freien Körpertheiles (parallel zur festen Fläche, kann mit Hilfe der Formel

$$\sigma = \frac{Pl}{FG}$$

berechnet werden, worin außerdem l den Normalabstand der Kraftrichtung von der festen Fläche und G den Schubelasticitäts- oder Drehmodulus (s. Tab. I) bedeuten.

Digitized by Google

2. Aufgabe. Welche Schubbelastung kann ein nach Art der Fig. 5ª, Bl. XII angeordneter Charnierbolzen von 55mm Durchmesser mit Sicherheit tragen, wenn er (nach Art der Gabelzapfen) an beiden Enden festgehalten gedacht wird und das Auge der angreifenden Zug- oder Spannstange sich über die freie Länge desselben zwischen den Befestigungsstellen verbreitet?

Auflösung. In diesem Falle vertheilt sich die abscheerende Kraft auf zwei Querschnitte des Bolzens, da derselbe an zwei Stellen festgehalten wird, und es müssen, wenn ein vollständiger Bruch entstehen soll, beide Querschnitte durchgescheert werden. Wir haben also in diesem Falle:

$$P = 2Fs = 2FS = 2 \cdot \overline{55}^2 \cdot 0{,}875 \cdot 5 = 2375 \cdot 10 = 23750^k.$$

3. Auflage. Welche Kraft muß aufgewendet werden, wenn ein Schmiedeisenbarren von 40mm Dicke und 120mm Breite mittelst der Luppenscheere durchgeschnitten werden soll?

Auflösung. In diesem Falle ist eine Spannung $s = S'$ in die allgemeine Formel (10) einzuführen, welche der Bruchbelastung entspricht, denn ein Bruch oder Durchbruch soll wirklich erreicht werden. Dann ist

$$P = Fs = FS' = 40 \cdot 120 \cdot 35 = 168000^k.$$

Anmerkung. Diese sehr bedeutende Kraft muß von dem beweglichen Theile der mechanischen Scheere ausgeübt werden, wenn der Barren auf einmal durchgescheert werden soll. Allein schon des besseren Schnittes wegen ist mindestens ein Scheerenbacken, soweit es der Reibungswinkel zuläßt, schief gestellt, erfaßt immer nur theilweise anstatt in seiner ganzen Breite und schneidet allmälig durch. Dadurch vermindert sich auch der nothwendige Druck wesentlich. Die Arbeit bleibt natürlich dieselbe. —

4. Aufgabe. Bei den neueren Constructionen sind gewöhnlich Blechscheere und Durchstoß in einer Maschine vereinigt, und es fragt sich z. B. bis zu welcher Stärke man Eisenbleche mit einem größten Stempel von 30mm Durchmesser lochen kann, wenn die Maschine auf den letzteren einen Druck von $P = 50000^k$ auszuüben vermag?

Auflösung. Wenn wir in ein Blech ein kreisrundes Loch machen, so erhalten wir als Begrenzung desselben eine cylindrische Fläche vom Durchmesser d (hier = Stempeldurchmesser) und der Höhe δ (= Blechstärke). Das ist im vorliegenden Falle der fragliche Bruchquerschnitt. Es ist also allgemein $F = \pi d\delta$ und demnach $P = \pi d\delta S'$.

Es ist gefragt nach der Blechstärke δ; also reduciren wir und erhalten

$$\delta = \frac{P}{\pi d S'} = \frac{50000}{3{,}1416 \cdot 30 \cdot 40} = \frac{50000}{3770} = 13^{mm}.$$

5. Aufgabe. Ermittelung der Verhältnißwerthe einer Ankerschraube, bezogen auf den Kerndurchmesser (d_1) der Schraube.

Auflösung. Schon pag. 74 Bd. I wurde erwähnt, daß eine solche Ankerschraube am unteren Ende, wo das Splintloch eingebracht ist, im Durchmesser verstärkt werden muß, wenn eine gleichmäßige Widerstandsfähigkeit gewahrt bleiben soll. Wir ermitteln demnach zuerst die Größe des Durchmessers d_2 mit Bezug auf den Kerndurchmesser d_1. Soll aber in einem Querschnitte des Schraubenkernes dieselbe Festigkeit sein wie in dem Schnitte yy_1 (Fig. 71), so müssen die Bruchflächen (in beiden Querschnitten findet Zug statt) gleich groß sein; also, wenn wir die herausgeschnittene Fläche $acfe$ als Rechteck ($b \cdot d_2$) ansehen:

Digitized by Google

$$\frac{\pi}{4} d_1^{\,2} = \frac{\pi}{4} d_2^{\,2} - b\, d_2.$$

Wir setzen $b = \frac{1}{4} d_2$ und erhalten:

$$\frac{\pi}{4} d_1^{\,2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} d_2^{\,2} = \frac{d_2^{\,2}}{4} (\pi - 1).$$

Daraus

$$d_2 = \sqrt{\frac{\pi \cdot d_1^{\,2}}{\pi - 1}} = d_1 \sqrt{\frac{\pi}{\pi - 1}}$$

$$d^2 = 1{,}2\, d_1.$$

Nehmen wir also die Splintdicke zu $0{,}25\, d_2$ an, so muß das verstärkte Ende stets um das 0,2fache stärker sein als der Kerndurchmesser der Schraube. — Für den Fall des Bruches am Bolzenende sind nun drei verschiedene Möglichkeiten vorhanden:

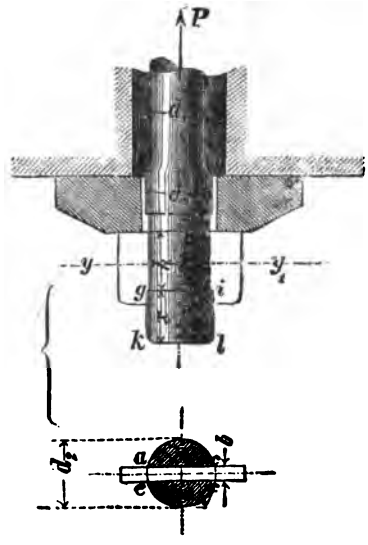


Fig. 71.

a) der Bolzen zerreißt, b) der Bolzen unter dem Splinte wird ausgescheert, c) der Splint wird abgescheert. Im Falle a) ist für Zug:

$$P = \left(\frac{\pi}{4} d_2^{\,2} - b\, d_2\right) \mathfrak{Z},$$

im Falle b), wenn wir in Fig. 71 annähernd $gi = kl = d_2$ setzen:

$$P = 2 \cdot x\, d_2 \cdot \mathfrak{S},$$

im Falle c): $P = 2\, b\, h \cdot \mathfrak{S}$.

Diese drei Werthe von P einander gleich gesetzt, giebt:

$$\left(\frac{\pi}{4} d_2^{\,2} - b\, d_2\right) \mathfrak{Z} = 2\, x\, d_2\, \mathfrak{S} = 2\, b\, h\, \mathfrak{S},$$

und daraus lassen sich drei Gleichungen combiniren. Wir nehmen zuerst

$$\left(\frac{\pi}{4} d_2^{\,2} - b\, d_2\right) \mathfrak{Z} = 2\, x \cdot d_2\, \mathfrak{S}$$

und setzen wieder $b = \frac{1}{4} d_2$:

$$\left(\frac{\pi}{4} d_2^{\,2} - \tfrac{1}{4} d_2^{\,2}\right) \mathfrak{Z} = d_2 \left(\frac{\pi - 1}{4}\right) \mathfrak{Z} = 2\, x \cdot \mathfrak{S}$$

$$x = d_2 \left(\frac{\pi - 1}{8}\right) \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{S}} = d_2 \cdot 0{,}2677 \cdot \tfrac{7}{5} = 0{,}37\, d_2$$

$$\sim x = 0{,}4\, d_2 \quad \text{oder} \quad = 0{,}5\, d_1.$$

Wenn demnach in Fig. 5a, Bl. IV diese Dimension zu $0{,}7\, d_2$ angegeben ist, so ist das nach obigem vollauf hinreichend. — Nun berechnen wir die Höhe (h) des Splintes aus $2\, b\, h\, \mathfrak{S} = 2\, x\, d_2\, \mathfrak{S}$ zu:

$$h = \frac{x\, d_2}{b} = \frac{0{,}37\, d_2 \cdot d_2}{0{,}25\, d_2} = 1{,}5\, d_2 = 1{,}8\, d_1.$$

Hieraus erhellt, daß der Splint verhältnißmäßig stärker in Anspruch genommen wird als der Schraubenbolzen, wenn man jenen nur eine Höhe $= d_2$ giebt. Doch

Digitized by Google

ist dies deshalb in den Fällen, wo mit dem Bruche des Splintes keine Gefahr verbunden ist, zulässig, weil, sollte wirklich ein Bruch eintreten, der Splint leicht wieder zu ersetzen ist. Außerdem sind ja in den seltensten Fällen die Fundamentschrauben voll belastet.

III. Biegungsfestigkeit.

Erklärung.

Mit Bezug auf unsere Voraussetzung, daß wir in der allgemeinen Abhandlung nur prismatische Körper und Belastung durch eine einzige, der Schwere parallele Kraft zu Grunde legen, gestaltet sich der einfachste Fall der Inanspruchnahme eines solchen Körpers auf Biegung in der durch die beistehende Skizze anschaulich gemachten Weise. MN ist eine verticale feste Flüche, daran horizontal unwandelbar befestigt ein prismatischer Stab mit der Schwerpunktsaxe AB und mit vorläufig beliebigem Querschnitte. Am Ende A des Stabes wirkt eine Kraft P vertical abwärts, überhaupt aber normal zur Schwerpunktsaxe AB.

Ohne die Wirkung der Kraft P — und wenn wir auch von dem Eigengewichte absehen — hat also der Körper eine prismatische Gestalt, und demnach ist die Verbindungslinie der Schwerpunkte sämmtlicher congruenten Querschnitte eine gerade Linie AB.

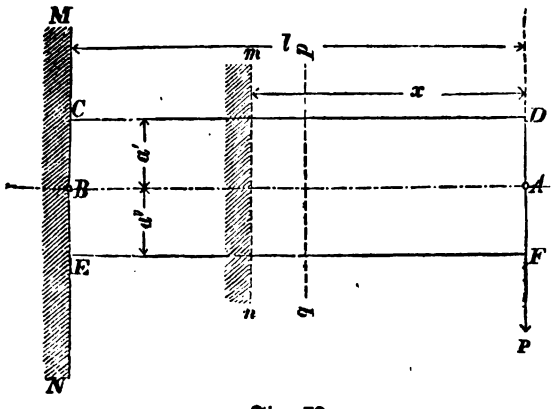


Fig. 72.

In Folge der Wirkung von P tritt eine Biegung des Körpers ein, d. h. die Schwerpunktsaxe nimmt eine gekrümmte Form AB (Fig. 73) an, und die anfangs parallelen Normalschnitte pq und mn (Fig. 72) bilden einen Winkel $\overline{mn}\,\overline{p'q'}$ (Fig. 73) mit einander.

Die Form der gebogenen Schwerpunktsaxe nennt man „elastistische Linie". Dieselbe ist eine ebene Curve und die Ebene, in welcher sie liegt, bestimmt durch die Kraftrichtung und die Schwerpunktsaxe; diese Ebene nennt man Biegungsebene (im vorliegenden Falle Fig. 73 vertical). Während einer (nicht zu starken) Biegung verändert die Schwerpunktsaxe AB ihre Länge nicht.

Denken wir uns das Material des Körpers bestehend aus geradlinigen Fasern, parallel der Schwerpunktsaxe (wie es etwa bei Holz und Schmiedeisen der Fall ist), so sehen wir ein, daß bei der Biegung auch diese Fasern mit betheiligt sind. Wenn sich aber die Schwerpunktsaxe weder verlängert noch verkürzt, so müssen es die sämmtlichen über und unter derselben liegenden Fasern thun. So erleiden also in Fig. 73 die Fasern über AB (auf

Digitized by Google

der der Kraftrichtung abgewendeten Seite) eine Ausdehnung, die unter AB (auf der der Kraftrichtung zugewendeten Seite) eine Zusammendrückung. Man nennt daher den ersteren Theil des Stabes die Zugseite, den letzteren die Druckseite.

Man erkennt ferner aus der Figur, daß die Fasern eine um so größere Längenänderung annehmen, also um so stärkere Spannungen erleiden müssen, je weiter sie von der Schwerpunktsaxe entfernt sind. Man beachte zu diesem Zwecke die Dreiecke mom' und non' (Fig. 73), welche die Drehung des Normal- oder Querschnittes mn verdeutlichen. Die größte Zugspannung ist danach in CD, die größte Druckspannung in EF, welche um resp. a' und a'' von AB abstehen.

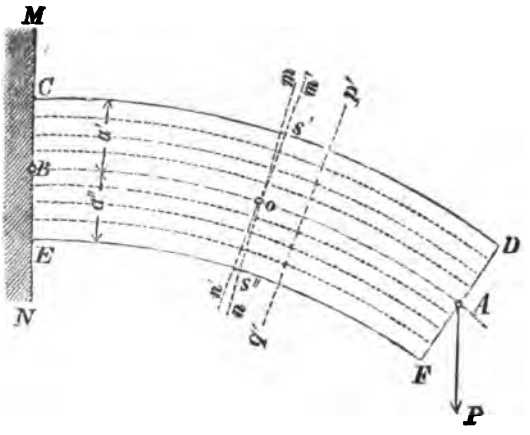


Fig. 73.

Nach der Schwerpunktsaxe hin nehmen die Spannungen ab und sind in derselben = Null. Deshalb nennt man die Schwerpunktsaxe auch „neutrale Faser" und eine Normale in O auf der Biegungsebene die „neutrale Axe"; sämmtliche Neutralaxen, auf AB vereinigt, geben die „neutrale Faserschicht" oder die „elastische Fläche". Letztere verändert bei der Biegung gleich der in derselben liegenden neutralen Faser ihre Gestalt, nicht aber ihre Größe.

Bezeichnen wir die Spannung in der äußersten Faser CD der Zugseite mit s' und die in der äußersten Faser EF der Druckseite mit s'', so haben die zwischenliegenden Fasern der Zugseite Spannungen zwischen Null und s', die zwischenliegenden der Druckseite dergleichen zwischen Null und s'', und man sagt, indem man in Fig. 73 die Normalschnitte mon und m'on' mit den Faserbögen sich als ähnliche Dreiecke denkt: Die Größe der Spannung in einer Faser ist proportional dem Abstande dieser von der neutralen Axe.

Gleichgewichtsbedingung.

Wir wollen nun in möglichster Kürze den Zustand untersuchen, in welchem sich die an und in dem Körper wirkenden Kräfte während einer (nicht zu starken) Biegung befinden; d. h. mit anderen Worten: eine Gleichung aufsuchen zwischen der von außen wirkenden Kraft P und den in den Materialfasern widerstehenden Zug- und Druckspannungen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das Stück m'DFn' (Fig. 73) losgetrennt und die Materialfasern durch die in denselben befindlichen Reactionskräfte ersetzt. Fig. 74 stellt diesen Körpertheil dar, und die Kräfte erscheinen dabei ähnlich wie solche normal an einem Winkelhebel wirkende. Den Stützpunkt des Systems verlegen wir nach O in die neutrale Axe, und es dreht sich dann der Querschnitt um die durch den Schwerpunkt gehende neutrale Axe OO_1.

Digitized by Google

Die Kraft P bildet mit ihrem Normalabstande x vom Drehpunkte 0 ein Moment — das „Biegungsmoment" genannt; dessen Größe ist:

$$M = P \cdot x.$$

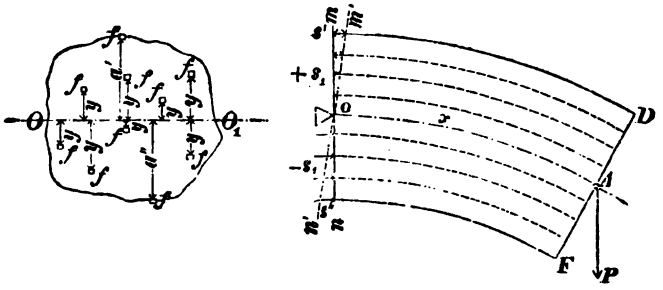


Fig. 74.

Denken wir uns die Faserquerschnitte einzeln als kleine Flächen (Querschnitt Fig. 74) mit den Spannungen s_1 und ihre Abstände von der Drehaxe 00_1 resp. $= +y$ und $-y$, dann bildet jede solche Faserspannung ein sogenanntes „Flächenmoment", dessen Größe ist

$$m = f \cdot s_1 \cdot y.$$

Die Spannung einer Faser, welche um die Größe gleich der Längeneinheit normal von der neutralen Faserschicht absteht, sei $= s$, und es verhalten sich nun nach obigem Gesetze die Spannungen

$$s_1 : s = y : 1.$$

Daraus ist $s_1 = sy$, und durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung für m ergiebt sich $m = f \cdot sy \cdot y = f \cdot s \cdot y^2$.

In diesem Ausdrucke sind die Faserquerschnitte f sowohl, als auch ihre Abstände y von der neutralen Fläche unter einander verschieden, veränderlich (variabel), während s, die Spannung in einer bestimmten Faser, eine unveränderliche (constante) Größe hat. Daraus erhellt, daß für jede einzelne Faser sich ein besonderes Flächenmoment m ergeben muß.

Sämmtliche Flächenmomente zusammen bilden ein resultirendes Moment — „Spannungsmoment" —, welches dem Biegungsmomente der Kraft P das Gleichgewicht hält. Die Größe des Spannungsmomentes erhält man durch algebraische (mit Rücksicht auf die Vorzeichen + und —) Summirung sämmtlicher Einzelmomente m. Es ist also:

Summe von allen (m) = smal Summe (fy^2), oder kurz: $\Sigma(m) = s\,\Sigma(fy^2)$, und das ist gleich $M = Px$.

Den Ausdruck $\Sigma(fy^2)$, d. h. die algebraische Summe sämmtlicher Flächenmomente mal dem Quadrat ihres Abstandes von einer als Drehaxe angenommenen Linie (00_1) nennt man das „Trägheitsmoment der Fläche" oder des Querschnittes und bezeichnet es mit „J"*) (vis inertiae). Die Form des Ausdruckes $J = \Sigma(fy^2)$ läßt erkennen, daß derselbe von der Anzahl der Flächenelemente f

*) Die Größen der Trägheitsmomente $J = \Sigma(fy^2)$ sind, für die gebräuchlichsten einfachen Querschnitte entwickelt, in Tab. II, pag. 46 und 47 zusammengestellt.

Digitized by Google

und von ihrer Anordnung zur neutralen, durch den Schwerpunkt der Fläche gehenden Axe abhängt. Das ist wohl zu beachten, da es für die Wahl der Querschnittsform eines auf Biegung beanspruchten Körpers von großer Wichtigkeit ist. Der Gleichgewichtszustand eines gebogenen Körpers wird also nur dargestellt durch die Gleichheit von Biegungs- und Spannungsmoment:

$$P x = M = s \cdot J \ldots . (12).$$

Für die Spannung s einer Faser im Abstande = 1 von der Neutralaxe führen wir nun die Spannungen s' und s'' — denn nur mit diesen können wir hier mit Gewähr gegen genügende Sicherheit rechnen — ein, welche den am weitesten von der Neutral- oder Drehaxe entfernten Flächenelementen angehören:

$$s : s' = 1 : a' \text{ und } s : s'' = 1 : a''.$$

Dann ist für die Zugseite $s = \frac{s'}{a'}$ und für die Druckseite $s = \frac{s''}{a''}$; also

für die Zugseite: $P \cdot x = \frac{J}{a'} s' \ldots .$ (13a) und

für die Druckseite: $P \cdot x = \frac{J}{a''} s'' \ldots$ (13b).

Demnach hätten wir für jeden Querschnitt zwei Gleichungen zu lösen — eine für die Zugseite und eine für die Druckseite — und davon für die Dimensionsberechnung den größeren der beiden erhaltenen Werthe zu nehmen. Ist aber der Querschnitt symetrisch zur Neutralaxe angeordnet, dann ist auch $a' = a'' = a$, und setzt man außerdem $s' = s'' = s$ und versteht darunter immer den kleineren von beiden Coefficienten Z und D, resp. Z und D oder Z' und D', so ergiebt sich die allgemeine Gleichung für Biegungsfestigkeit:

$$P x = \frac{J}{a} s \ldots . (14).$$

Dieselbe gilt für einen beliebig gewählten, um die Größe x von der Kraftrichtung abstehenden Querschnitt m n (Fig. 72). Bei einem prismatischen Stabe, wo J und a für alle Querschnitte constant sind, ist aber nach Formel (14) die Spannung „s" bei constanter Kraft P proportional dem Hebelarme x der Kraft. Wir bekommen also bei prismatischen Stäben*) den größten Werth von s in dem Querschnitte, welcher am weitesten von P absteht, d. i. an der Befestigungsstelle. Für die Befestigungsstelle M N Fig. 72 ist alsdann $x = A B = l$, also:

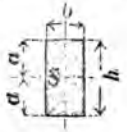
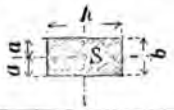
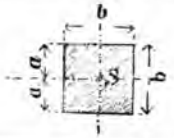
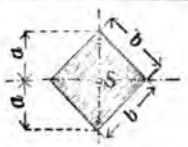
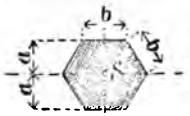
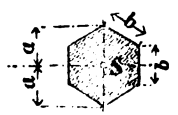
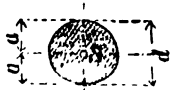
$$P l = \frac{J}{a} s \ldots . (15),$$

d. h. bei einem auf Biegung beanspruchten Körper findet Gleichgewicht statt, wenn das Product aus Normalkraft und deren Hebelarm gleich ist dem Trägheitsmomente des betreffenden Querschnittes, dividirt durch den Abstand der am stärksten gespannten (am weitesten von der Neutralaxe entfernten) Faser von der neutralen Faserschicht und multiplicirt mit der kleineren der beiden zulässigen Belastungen gegen Zug resp. Druck.

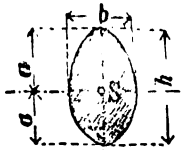
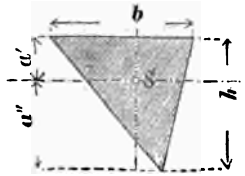
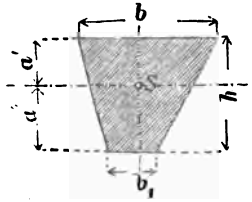
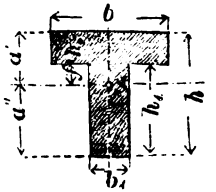
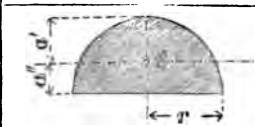
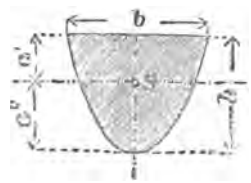
*) Allgemein ist der „gefährliche Querschnitt" auch bei gebogenen Körpern derjenige, in welchem die Materialspannung ein Maximum ist. Dieses Maximum kann bei nichtprismatischen Körpern auch durch verminderte Querschnittsgrößen entstehen.

Digitized by Google

Tab. II. Trägheitsmomente, Querschnittsmoduli und Flächenhalte von Figuren.

Fig.	Querschnittsform	Benennung	Trägheitsmoment J	Querschnittsmodulus q	Flächeninhalt F
75a		Rechteck hochkantig	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6} = \left(\frac{b}{h}\right)\frac{h^3}{6}$	**bh**
75b		Rechteck flachkantig	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{hb^2}{6} = \left(\frac{h}{b}\right)\frac{b^3}{6}$	hb
76a		Quadrat flach	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3}{6}$	b^2
76b		Quadrat über Eck	$\frac{b^4}{12}$	$b^3\frac{\sqrt{2}}{12} = 0{,}118b^3$	**b^2**
77a		Regul. Sechseck flach	$b^4\frac{5\sqrt{3}}{16} = 0{,}5413b^4$	$0{,}625b^3$	$b^2\frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}598b^2$
77b		Regul. Sechseck über Eck	$b^4\frac{5\sqrt{3}}{16} = 0{,}5413b^4$	$b^3\frac{5\sqrt{3}}{16} = 0{,}5413b^3$	$b^2\frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}598b^2$
78		Kreis	$\frac{\pi}{64}d^4 \sim = 0{,}05\,d^4$	$\frac{\pi}{32}d^3 \sim = 0{,}1\,d^3$	$\frac{\pi}{4}d^2 = 0{,}785\,d^2$

Digitized by Google

79		Ellipse hochkantig	$\frac{\pi}{64} b h^3 \sim = 0{,}05\, b h^3$	$\frac{\pi}{32} b h^2 \sim = 0{,}1\, b h^2$ $\sim = 0{,}1 \left(\frac{b}{h}\right) h^3$	$\frac{\pi}{4} b h = 0{,}785\, b h$
80		Dreieck	$\frac{b h^3}{36}$	$q' = \frac{b h^2}{12}$ $q' = \frac{b h^2}{18}$	$\frac{b h}{2}$
81		Trapez	$\frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{36 (b + b_1)} h^3$	$q' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + p_1^2}{12 (b + 2 b_1)} h^2$ $p' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (2 b + b_1)} h^2$	$\frac{b + b_1}{2} h$
82		T-Querschnitt	$\frac{1}{3} [b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 + a''^3)]$	$q' = \frac{J}{a'}$; $q'' = \frac{J}{a''}$ $a' = \frac{b h_2^2 + b_1 h_1 (h + h_2)}{2 [b h - (b - b_1) h_1]}$ $a'' = h - a'$	$b_1 h_1 + b h_2$
83		Halbkreis	$0{,}11\, r^4$	$q' = 0{,}19 r^3$ $q'' = 0{,}26 r^3$	$r^2 \frac{\pi}{2}$
84		Parabelabschnitt	$0{,}0457\, b h^3$	$q' = 0{,}114 b h^2$ $q'' = 0{,}076 b h^2$	$\frac{2}{3} b h$

Digitized by Google

Faßt man endlich den Quotient $\left(\frac{J}{a}\right)$ noch als eine für prismatische Stäbe von derselben Querschnittsform constante Größe auf und bezeichnet man dieselbe mit „q" $= \frac{J}{a}$, d. i. „Querschnittsmodulus", dann heißt die Formel (15):

$$Pl = qs \ldots . \quad (16).$$

Nothwendigerweise gehört hierher die weitere Betrachtung über die Formänderung gebogener Stäbe, event. die Entwickelung der Gleichungen für die elastische Linie, deren allgemeine Form ist (x und y Coordinaten der elast. Lin.):

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M}{JE}$$

und für den Krümmungshalbmesser eines Elementes derselben $\varrho = \frac{JE}{M}$. Wir übergehen dies hier, indem wir Theoretiker auf Reuleaux's Constructeur und Grashof's Festigkeitslehre verweisen, da einmal der gegenwärtige Standpunkt des mathematischen Theiles unserer Hefte dem Verständnisse solcher Entwickelungen noch nicht genügt und außerdem dieselben für den prakt. Maschinentechniker (ausgenommen vielleicht die „tiefste Einsenkung" nicht durchaus unentbehrlich sind.

In vorstehender Tab. II sind die Trägheitsmomente und Querschnittsmoduli der praktisch am häufigsten zur Verwendung kommenden Querschnitte zusammengestellt, und fügen wir zugleich, um den Zusammenhang zwischen Trägheitsmoment und Flächeninhalt einer Figur darzustellen, die letzteren mit bei.

Außer diesen hier angeführten Formen werden noch verschiedene andere als Querschnitte für Körper mit Biegungsbelastung in der Technik verwendet. Die meisten derselben, insbesondere die folgenden in Fig. 85 schematisch dargestellten,

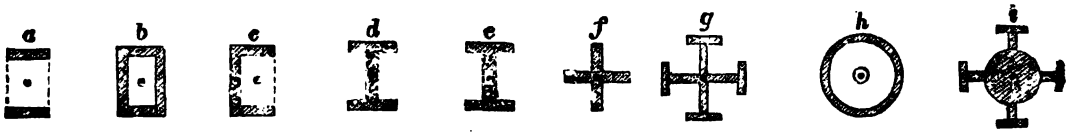


Fig. 85.

lassen sich durch Zerlegung auf einfache, in der Tab. II enthaltene Figuren zurückführen und darnach die betreffenden Trägheitsmomente combiniren. Dies geschieht auf dieselbe Weise wie man geometrisch aus einfachen zusammengesetzte Flächen durch Addition und Subtraction berechnet; man hat im vorliegenden Falle nur anstatt der Formeln für Flächeninhalte die für die betr. Trägheitsmomente zu nehmen. Die Formeln für die Flächeninhalte sind aber den letzteren sehr ähnlich; die Dimension normal zur Neutralaxe, d. i. diejenige in Richtung der Biegung (in den Fig. 75 ÷ 84 vertical) kommt jedoch immer in höheren Potenzen — wegen y^2 in $J = \Sigma(fy^2)$ — vor. Daher kommt es auch, daß z. B. dieselbe Fig. 75^a und 75^b wegen der veränderten Lage verschiedene Größen der Trägheitsmomente liefert. In Fig 75^a ist h normal der Neutralaxe und daher in der Formel h^3; in Fig. 75^b ist b normal zur Neutralaxe und daher b^3. — Nun erkennen wir auch theoretisch den Grund, weshalb man in der Praxis (Maschinenbau, Band I wurde mehrfach darauf hingewiesen) einen Träger immer „hochkantig" anordnet, oder allgemein, weshalb man bei Beanspruchung auf Biegung die größere Dimension in die Ebene der biegenden Kraft verlegt. Die Trägheitsmomente der Rechtecke Fig. 75^a und 75^b verhalten sich wie $h^2 : b^2$, d. h. wie die Quadrate der

Digitized by Google

Seiten in Richtung der Biegungsebene. Der Einfluß der Größe a (Form 15), der Entfernung der (äußersten) am stärksten gespannsten Faser setzt zwar die Trägfähigkeit P um eine Potenz herab, denn die Querschnittsmoduli Fig. 75ª und 75ᵇ verhalten sich nur noch wie h : b; allein es bleibt immerhin noch der Vorrang der Verticaldimension gegen die Parallelen der Neutralaxe um eine Potenz übrig, welches Veranlassung genug bietet, dabei einestheils einen vorhandenen Querschnitt so anzuordnen, daß die größere Dimension in die Richtung der Biegung fällt, anderntheils einen Querschnitt so zu gestalten, daß die Höhe desselben groß wird gegenüber der Breiten-Dimension und daß überhaupt die größere Masse der Querschnittselemente an den äußeren Punkten der Höhe, wo die stärkeren Spannungen herrschen, vertheilt wird.

Weiter bemerken wir, daß z. B. das Quadrat, das Sechseck in beiden Lagen, „flach" und „über Eck", dieselben Trägheitsmomente haben (weil dieselbe Bezeichnung in b. Fig.), und daß nur die Querschnittsmoduli durch den Einfluß von a ein wenig abweichen. Dasselbe ist auch der Fall bei den zusammengesetzten Querschnitten f, g und i, Fig. 85, sowie bei allen anderen regulären Figuren (mit einer geraden Seitenzahl). Je größer aber die Seitenzahl, desto geringer wird der Einfluß von a und desto geringer die Differenz von q in den verschiedenen Lagen. Endlich gelangen wir an eine Grenze, wo der Unterschied Null wird; dies ist beim Kreise Fig. 78 und beim Ringquerschnitte Fig. 85 h. Hieraus erklärt sich, daß man zu Trägern, welche verschiedene Lagen um ihre Schwerpunktsaxe einnehmen müssen — Axen und Wellen — vorwiegend Formen mit Kreis- und Ringquerschnitt oder wenigstens, wie bei Wasserradaxen, diesen in der erwähnten Eigenschaft nahe stehende (Polygone und Kreuzquerschnitte Fig. 85 f, g, i) wählt.

Die allgemeine Formel (12) ist nun für die verschiedenen Anordnungen (Befestigungs- und Stützungsweisen), in denen die auf Biegung belastenden Körper in der Praxis vorkommen, besonders einzurichten. Wir nehmen im Folgenden einige dergleichen Fälle durch und beschränken uns vorläufig auf prismatische Körper, während wir am Schlusse dieses Abschnittes die rationellen Körperformen für sich behandeln.

A. Berechnung der Dimensionen prismatischer Körper für Biegungsbelastung.

a) Die Belastung wird im Angriffspunkte der Kraft concentrirt gedacht.

α) der Stab ist mit einem Ende **eingemauert** und am andern, freien Ende wirkt normal zur Schwerpunktsaxe AB eine Kraft P (Fig. 86).

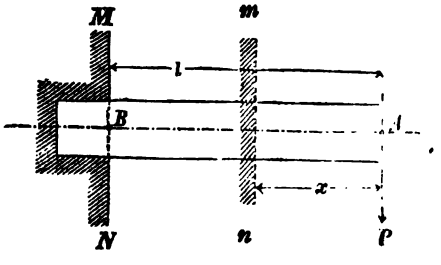


Fig. 86.

Für einen beliebigen Querschnitt*) m n in der Entfernung x vom Angriffspunkte A der Kraft P hat man das Biegungsmoment:

*) Wenn wir einen beliebigen Querschnitt m n außerhalb der Befestigungsstelle unter-

Digitized by Google

$$M_x = P \cdot x,$$

und dieses ist gleich dem Spannungsmomente des Querschnittes, $= \frac{J}{a} s$ (siehe Formel 14 und 15) oder $= qs$ (s. Formel 16). — Da wir vorläufig nur prismatische Körper in Betracht ziehen, so ist der Querschnittsmodulus $\frac{J}{a} = q$ in allen Querschnitten des Stabes derselbe, und es kann sich mit der veränderlichen Entfernung x dann nur die Spannung s in den einzelnen Schnitten ändern. Dieselbe ist aber direct proportional x, und demnach ist sie am größten, wo x am größten ist, d. h. wo $x = l$, also an der Befestigungsstelle B; d. i. dann für den vorliegenden Fall der gefährliche Querschnitt. Für diese Stelle bekommen wir das Maximal-Biegungsmoment:

$$M_{max} = P \cdot x_{max} = qs_{max} \text{ oder kurz:}$$

$$Pl = qs \ldots (16).$$

Wie bekommen natürlich vorliegend denselben Ausdruck wie Formel (16) in der allgemeinen Abhandlung, da wir dort den obigen Fall (α) als den einfachsten zu Grunde legten.

1. Aufgabe. Ein schmiedeiserner Balken von 1^m Länge, nach Art der Fig. 86 befestigt, ist am freien Ende durch eine Kraft $P = 20000^k$ belastet. Der Querschnitt ist ein Rechteck von der Höhe h (parallel P) und der Breite b (normal P). Wie groß ist h zu machen, wenn in der äußersten Faser des gefährlichen Querschnittes eine zulässige Spannung $s = 7^k$ eintreten darf und die Breite des Balkens zu $b = 160^{mm}$ angenommen wird?

Auflösung. Für den Querschnittsmodulus q haben wir nach Tab. II, Fig. 75^a zu setzen: $q = \frac{bh^2}{6}$. Es heißt also die Formel (16) dann:

$$Pl = \frac{bh^2}{6} \cdot s, \text{ und daraus ist:}$$

$$h = \sqrt{\frac{6Pl}{bs}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \sqrt{\frac{Pl}{b}} = 0{,}92 \sqrt{\frac{Pl}{b}}$$

$$h = 0{,}92 \sqrt{\frac{20000 \cdot 1000}{160}} = 353{,}5 \cdot 0{,}92$$

$$h = 325^{mm}.$$

2. Aufgabe. a) Welche Last P kann am freien Ende eines 2^m langen, nach Art der Fig. 86 angeordneten gußeisernen Balkens angehängt werden, wenn der Querschnitt ein hohles Rechteck von den Dimensionen $B = 200^{mm}$, $H = 800^{mm}$, $b = 140^{mm}$ und $h = 720^{mm}$ ist und b) wie groß ist die Tragfähigkeit, wenn der Balken „flachkantig" (B parallel der Kraft P) angeordnet wird?

Fig. 87.

Auflösung. a) Für den vorliegenden Querschnitt enthält unsere Tabelle II kein Trägheitsmoment. Wir können dasselbe jedoch sehr leicht nach der auf pag. 48 angegebenen Weise ermitteln, indem wir das hohle Rechteck als Differenz

suchen, so denken wir uns gewissermaßen die Befestigungsstelle in diesen Querschnitt verlegt und betrachten den übrigen Theil des Körpers (von mn bis MN) außerhalb x so lange als nicht vorhanden, als wir uns auf den betreffenden Schnitt m n beziehen.

Digitized by Google

zweier Rechtecke betrachten und demgemäß die betreffenden Trägheitsmomente von einander subtrahiren.

Das Trägheitsmoment des großen Rechtecks ist nach Tab. II Fig. 75ª

$$J_1 = \frac{BH^3}{12} \text{ und das des kleinen } J_2 = \frac{bh^3}{12}.$$

Die Differenz beider giebt das Trägheitsmoment des Querschnittes Fig. 87:

$$J = J_1 - J_2 = \frac{BH^3 - bh^3}{12}; \quad a = \frac{H}{2}. \text{ Demnach:}$$

$$Pl = \frac{J}{a}\delta = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12}\frac{2}{H}.\delta \text{ und daraus:}$$

$$P = \frac{(BH^3 - bh^3)}{6H}.\frac{\delta}{l} = \frac{(200.512000000 - 140.373248000)3}{6.800.2000}$$

$$P = \frac{5014528}{2.80.2} = \frac{5014528}{320} = 15670^k = 313{,}4 \text{ Centner.}$$

Auflösung. b) $J_1 = \frac{HB^3}{12}$; $J_2 = \frac{hb^3}{12}$; $a = \frac{B}{2}$

$$q = \frac{J}{a} = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}. \text{ und die Tragfähigkeit:}$$

$$P = \frac{(HB^3 - hb^3)}{6Bl}\delta = \frac{(800.8000000 - 720.2744000)}{2.200.2000}$$

$$= \frac{442432}{2.20.2} = 5530^k = 110{,}6 \text{ Centner.}$$

Demnach ist die Tragfähigkeit des hochkantig angeordneten Balkens im vorliegenden Falle beinahe 8 mal so groß als die Tragfähigkeit desselben in der flachkantigen Lage.

β. Der Stab ist in zwei Punkten **gestützt**, und an einem dritten Punkte zwischen jenen wirkt normal zum Stabe eine daselbst concentrirte Last.

Aus der Mechanik (Statik: Lehre von den parallelen Kräften) wissen wir, daß sich die Wirkung einer solcher Art angeordneten Kraft P auf die Stützpunkte A und B überträgt. Wir bekommen daselbst zwei (Seiten-) Kräfte, welche der (Haupt-) Kraft P parallel gerichtet sind, welche zusammen dieselbe Intensität haben wie (die Resultirende) P, und welche sich ihrer Größe nach umgekehrt zu einander verhalten wie ihre bezüglichen Abstände von der Resultirenden. Die Reactions- oder Gegenwirkungen dieser Einzelkräfte sind in der Fig. 88 mit P_1 resp. mit P_2 bezeichnet, und die Abstände ihrer Angriffspunkte vom Angriffspunkte der Hauptkraft mit $AC = l_1$ und $BC = l_2$.

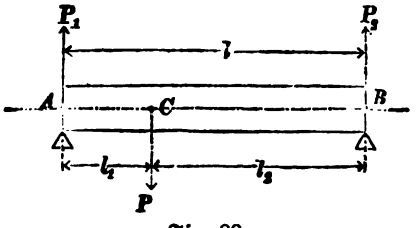


Fig. 88.

Danach ist also: 1) $P_1 + P_2 = P$

2) $P_1 : P_2 = l_2 : l_1$ oder

$P_1 l_1 = P_2 l_2$. Für den Punkt B

als Drehpunkt: 3) $P_1 l = P l_2$ und

für Punkt A als Drehpunkt: $P_2 l = P l_1$.

Digitized by Google

Daraus ergeben sich die Werthe der Componenten:

$$P_1 = P\frac{l_2}{l} \text{ und } P_2 = \frac{P l_1}{l}.$$

Nachdem wir die Componenten von P bestimmt haben, verfahren wir nun ganz wie im Falle α), indem wir die allgemeine Bedingung über den Gleichgewichtszustand eines Freiträgers (Fig. 86) auf die Stabtheile AC und BC Fig. 88 einzeln anwenden. Wir denken uns z. B. das Stück BC eingemauert; dann ist (für den gefährlichen Querschnitt in C) das Maximalmoment:

$$M'_{max} = P_1 l_1$$

und denken wir uns ferner den Theil AC eingemauert, so wird der freie Theil BC abgebogen durch das Moment:

$$M''_{max} = P_2 l_2.$$

Nach 2) oben ist aber $P_1 l_1 = P_2 l_2$; demnach erfahren wir, daß für den Punkt C (Angriffspunkt der Belastung) in beiden Richtungen sich dasselbe Maximal-Biegungsmoment ergiebt, und es liegt daselbst der gefährliche Querschnitt. Für denselben gilt also nach Einführung der oben berechneten Werthe der Componenten:

$$P_1 l_1 = P\frac{l_1 l_2}{l} = P_2 l_2$$

und für die Berechnung der Tragfähigkeit im Punkte C oder umgekehrt der Querschnittsdimensionen erhalten wir

$$P\frac{l_1 l_2}{l} = qs \ldots\ldots (17.)$$

Ein **besonderer Fall** ist hier hervorzuheben: Der Punkt C liegt in der Mitte zwischen A und B. Da ist nämlich

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2}; \text{ demnach } P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$

und

$$P\frac{\frac{l^2}{4}}{l} = \frac{1}{4}Pl = qs \text{ oder}$$

$$Pl = 4qs \ldots\ldots (17^a).$$

In diesem Falle ist also die Tragfähigkeit viermal so groß als bei demselben Balken freitragend (Fig. 86).

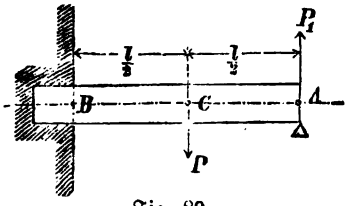


Fig. 89.

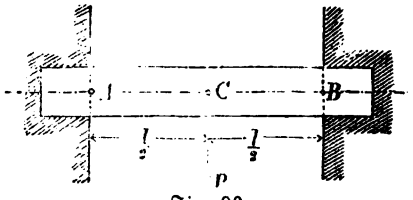


Fig. 90.

Ist außerdem der Stab mit dem einen Ende auf eine gehörige Länge eingemauert oder eingespannt und am andern gestützt (Fig. 89), so ist:

$$Pl = \frac{16}{3}qs \ldots (17^b)$$

Sind endlich beide Enden auf eine genügende Länge eingemauert (Fig. 90), so ist:

$$Pl = 8qs \ldots\ldots (17^c)$$

1. Aufgabe. Eine cylindrische Welle von Gußstahl ist in zwei Lagern A und B (Fig. 88) gestützt. Die Entfernung der Lager beträgt $l = 2^m$, und in C, welches

Digitized by Google

um 0,5^{m} von A absteht, ist ein (Transporteur-) Rad von 20 Centner Gewicht aufgesteckt. Wie groß sind a) die in den Lagern abgesetzten Drucke, wie groß ist b) der Durchmesser d der Welle?

Auflösung. a) $P = 20$ Centner $= 1000^{k}$; $l = 2000$; $l_1 = 500$; $l_2 = 1500$.

Es ist also: $P_1 = P\frac{l_2}{l} = \frac{1000 \cdot 1500}{2000} = 750^{k}$ und

$$P_2 = \frac{P l_1}{l} = \frac{1000 \cdot 500}{2000} = 250^{k}.$$

Probe: $P_1 + P_2 = 750 + 250 = 1000 = P$.

Auflösung. b) In Formel (17) pag. 52 haben wir zu setzen nach Tab. II:

$$q = \frac{\pi}{32} d^2 \sim = 0{,}1\, d^2.$$

Also: $\frac{P l_1 l_2}{l} = 0{,}1\, d^2 s$, und daraus ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{P \cdot l_1 l_2}{0{,}1 \cdot 1 \cdot s}}.$$

s aus Tab. I für ungehärteten Gußstahl ist:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{D} = 16^{*}).$$ Die Gleichung heißt also numerisch:

$$d = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 500 \cdot 1500}{0{,}1 \cdot 2000 \cdot 16}} = \sqrt[3]{234375}.$$

Rechnen wir diese Wurzel logarithmisch aus:

$$\log \sqrt[3]{234375} = \tfrac{1}{3} \cdot \log 234375 = \tfrac{1}{3} \cdot 5{,}3699113 = 1{,}7899704$$

$$d = 61{,}6553 \sim = 62^{mm}.$$

2. Aufgabe. Dieselbe gußstählerne Welle wie in Aufgabe 1. soll dasselbe Rad, jetzt aber in der Mitte zwischen den Lagern tragen. a) Wie groß ist dann der Durchmesser d derselben, und b) welche Querschnittsdimensionen erhält bei dieser Anordnung eine hohle Gußeisenwelle?

Auflösung. a) Vorliegend ist Formel (17^{a}) anzuwenden.

$$Pl = 4 q s = 4 \cdot 0{,}1\, d^3 \cdot 16;\ d^3 = \frac{Pl}{0{,}1 \cdot 4 \cdot 16}.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 2000}{0{,}1 \cdot 4 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{20000000}{64}} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{20000000}$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot 271{,}44177 = 67{,}86044 \sim = 68^{mm}.$$

Probe: $Pl = 4 q s$; $P = \frac{4 \cdot 0{,}1\, d^3 \cdot s}{l} = \frac{4 \cdot 16 \cdot d^3}{20000}$

$$\log P = (\log 64 + 3 \cdot \log 67{,}86044) - \log 20000$$

*) Bei Biegung nimmt man, um sicher zu gehen, den kleineren der beiden Coefficienten $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{D}$ für zulässige Spannung, da sowohl Zug- als Druckspannungen in gebogenen Körpern auftreten.

Digitized by Google

$$\log 64 = 1{,}8061800$$
$$+ 3 \cdot \log 67{,}86044 = 5{,}4948500$$
$$7{,}3010300$$
$$- \log 20000 = 4{,}3010300$$
$$\log P = 3{,}0000000$$
$$P = 1000^k = 20 \text{ Ctr.}$$

Auflösung. b) Bezeichnen wir den äußeren Durchmesser mit d (Fig. 91), den inneren mit d_1 und die Wandstärke mit δ. Das Trägheitsmoment dieses Querschnittes ist in der Tab. II pag. 46 nicht mit aufgeführt. Es ist jedoch dasselbe durch algebraische Addition der Trägheitsmomente von zwei bekannten einfachen Flächen zu finden. Der Kreisring ist nämlich weiter nichts als die Differenz zweier Kreisflächen. Für den äußeren Kreis ist das Trägheitsmoment:

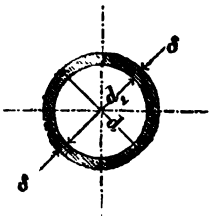


Fig. 91.

$J_1 = 0{,}05\, d^4$; für den inneren $J_2 = 0{,}05\, d_1{}^4$.

Also: $J = J_1 - J_2 = 0{,}05\,(d^4 - d_1{}^4)$; $a = 0{,}5\, d$

$$q = \frac{0{,}05\,(d^4 - d_1{}^4)}{0{,}5\, d} = \frac{0{,}1\,(d^4 - d_1{}^4)}{d}$$

$$Pl = 4\, q\, s = 4 \cdot 0{,}1 \left(\frac{d^4 - d_1{}^4}{d}\right) s.$$

Hier haben wir zu nur einer Gleichung zwei Unbekannte (d und d_1). Wir müssen demnach noch eine Annahme machen: Es sei z. B. $d_1 = 0{,}8\, d$. Außerdem ist für Gußeisen ($\beta < D$), $s = \beta = 2{,}5$, und wir erhalten:

$$Pl = 4 \cdot 0{,}1 \left(\frac{d^4 - 0{,}4\, d^4}{d}\right) \cdot 2{,}5 = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6\, d^3 \cdot 2{,}5$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pl}{4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}5}} = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 2000}{0{,}6}} = \frac{\sqrt[3]{2000000}}{\sqrt[3]{0{,}6}}$$

$$d = \frac{125{,}992}{0{,}843} = 149{,}4 = \sim 150^{mm}$$

und $d_1 = 0{,}8\, d = 120^{mm}$.

In solchem Falle erhielten wir eine Wandstärke von

$$\delta = \frac{d - d_1}{2} = \frac{150 - 120}{2} = 15^{mm}.$$

In diesen Dimensionen werden wir die Welle nicht ausführen, da die Wandstärke aus Gründen der praktischen Ausführung für zu gering erklärt werden muß; auch fällt infolge dessen der Durchmesser unverhältnißmäßig groß aus, wodurch die Nabe des aufzukeilenden Rades ebenfalls unnöthig umfangreich wird. — Wir machen demnach obige Rechnung noch einmal und nehmen $d_1 = 0{,}7\, d$ an. Damit fahren wir fort, bis die erhaltenen Dimensionen praktisch brauchbar erscheinen.

b) Die Belastung ist gleichmäßig über die freie Länge des prismatischen Körpers vertheilt. (Rücksicht auf das Eigengewicht der Träger).

α) Der Stab ist mit einem Ende eingemauert.

Digitized by Google

Ist uns die Gesammtlast bekannt, welche ein Balken (Fig. 92) von der Länge l zu tragen hat, so kennen wir, wenn die Last Q gleichmäßig über die ganze Länge vertheilt ist, auch die Größe derjenigen Belastung, welche auf die Längeneinheit kommt. Bezeichnen wir nämlich die Belastung pro Längeneinheit mit q, so ist offenbar

$$Q = q \,.\, l \text{ und } q = \frac{Q}{l}.$$

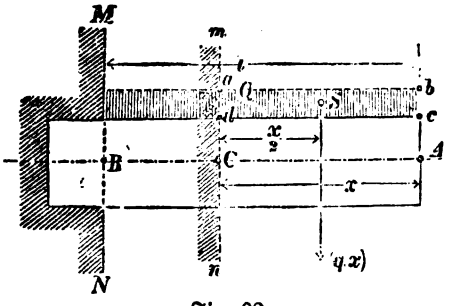


Fig. 92.

Mit dieser Bezeichnung können wir nun leicht die Gleichgewichtsbedingung für einen beliebigen, in der Entfernung x vom freien Ende gelegten Schnitt m n (Fig. 92) ableiten. Formel (16) pag. 48 für den analogen Fall hieß:

$$P\,l = q \,.\, s.$$

Dem entsprechend ist die Belastung (P) des fraglichen Theiles A C des Balkens $= q \,.\, x$. Der Hebelarm (l, Formel 16) dieser Last ist $= \left(\frac{x}{2}\right)$, da wir uns die gleichförmig vertheilte Belastung selbst wieder als einen homogenen prismatischen Körper a b c d vorstellen können, dessen Gewicht sich wie eine in seinem Schwerpunkte S angreifende Verticalkraft äußert. Das Biegungsmoment ist also im vorliegenden Falle:

$$M_x = q\,x \,.\, \frac{x}{2} = q\frac{x^2}{2}.$$

Daher ist für den Schnitt m n die Gleichgewichtsbedingung:

$$M_x = q\,\frac{x^2}{2} = qs.$$

Die Größe $q\frac{x^2}{2}$ ändert sich aber mit der Entfernung x (q ist für jeden einzelnen Fall constant), und zwar ist sie um so größer, je mehr wir mit m n von A wegrücken; sie erlangt ihren größten Werth (Maximum), wenn m n in M N fällt, wenn $x = l$. Das ist demnach der gefährliche Querschnitt, und derselbe liegt wie bei Fig. 86 an der Befestigungsstelle.

Für den gefährlichen Querschnitt (M N) ist nun die Belastung $= q \,.\, l$, der Hebelarm $= \frac{l}{2}$, das Biegungsmoment $M = q\frac{l^2}{2}$ und demnach

$$M = q\frac{l^2}{2} = qs$$

oder, wenn wir wieder die Gesammtlast $ql = Q$ einführen, $M = \frac{Ql}{2}$ und

$$Ql = 2qs \ldots . \quad (18).$$

Anmerkung 1). Dieselbe Formel (18) gilt für einen nach Art der Fig. 92 angeordneten prismatischen Körper, welcher nur durch sein Eigengewicht belastet ist, welcher also nur sich selbst zu tragen hat. Es bedeutet dann Q das absolute Gewicht des als homogen vorausgesetzten Stabmateriales innerhalb der freien Länge $A\,B = l$ und q das Gewicht jedes Theiles von der Länge (in Richtung A B) $= 1$ desselben Körpers. Bei einem nur durch das Eigengewicht beanspruchten Stabe solcher Art ist demnach das Biegungs-

Digitized by Google

moment für die Befestigungsstelle gleich dem Producte aus dem absoluten Gewichte und der halben Länge des Stabes.

Anmerkung 2). Ist außer der gleichförmig vertheilten Last Q (oder, was dasselbe ist, außer dem zu berücksichtigenden Eigengewichte Q) am freien Ende A noch eine verticalabwärts gerichtete Kraft P wirksam, so hat man das resultirende Moment zu bilden, d. h. man hat die beiden Momente $\frac{Q}{2}$ l und P l zu addiren. In dem Falle ist also das maßgebende Biegungsmoment für die Befestigungsstelle = gefährlicher Querschnitt:

$$M = \frac{Q\,l}{2} + P\,l = \left(\frac{Q}{2} + P\right) l \text{ und}$$

$$\left(P + \frac{Q}{2}\right) l = q\,s \ldots\ldots (18^a).$$

Aufgabe 1). Ein rechteckiger, 2^m langer Balken von Tannenholz, nach Art der Fig. 92 angeordnet, trägt eine 2 Steine starke Ziegelmauer von der Höhe $= 3^m$. Der Balken hat dieselbe Breite (Horizontaldimension) wie die Mauer Stärke. Wie groß ist die Höhe des Balkens zu machen?

Auflösung. Wir calculiren zuerst das Gewicht Q der Belastung. Der Rauminhalt der Mauer ist, da 1 (Ziegel-) Stein $= 2{,}50^{dm}$ und 1 Fuge nebst 2 Putzflächen $= 0{,}10 + 2 \,.\, 0{,}125$, also die Stärke der Mauer $= 2 \,.\, 2{,}50 + 0{,}10 + 0{,}25 = 5{,}35^{dm}$ ist:

$$V = 5{,}35 \,.\, 20 \,.\, 30 = 3210\ kb^{dm}.$$

Das specifische Gewicht von Ziegelmauer ist nach Tab. I pag. 14 und 15 $\gamma = 2{,}4$; es wiegt also 1 kb^{dm} davon $= 2{,}4^k$, und demnach ist

$$Q = V\gamma = 3210 \,.\, 2{,}4 = 7704 \sim 7700^k.$$

Nun ist nach Formel (18):

$$Q\,l = 2\,q\,s;\ q = \frac{b\,h^2}{6} \text{ und } s = \mathfrak{D}\ (< \mathfrak{Z}) = 0{,}5.$$

Nach der Aufgabe ist $b = 535^{mm}$ zu setzen, und wenn wir die Formel auf h reduciren:

$$h = \sqrt{3 \,.\, \frac{Q\,l}{b\,\mathfrak{D}}}, \text{ die Zahlenwerthe eingeführt:}$$

$$h = \sqrt{3 \,.\, \frac{7700 \,.\, 2000}{535 \,.\, 0{;}5}} = \sqrt{172710}$$

$$h = 415^{mm}.$$

In diesem Falle werden wir natürlich vier einzelne Balken anordnen, welche zusammen den Querschnitt $b\,h = 535 \,.\, 415$ ausmachen.

Aufgabe 2). Ein Gußeisenstab von regulär-sechsseitigem Querschnitte (Fig. 77^a, flach) ist einseitig eingemauert. Derselbe ist 5^m lang frei, und der Querschnitt hat eine Seitenlänge von $b = 50^{mm}$. Wie groß ist a) die größte Spannung s' an der Befestigungsstelle auf der Zugseite, b) wie groß dieselbe s'' auf der Druckseite und c) wie groß ist die Länge, wenn der Bruch eintritt infolge der Eigenbelastung?

Auflösung a). Der Flächeninhalt des Querschnittes ist nach Tab. II, pag. 46 und 47 rund:

$$F = 2{,}6\,b^2 = 2{,}6 \,.\, \overline{0{,}5}^2 = 0{,}65\ \square^{dm}$$

und das Volumen des prismatischen Stabes:

Digitized by Google

$$V = Fl = 0{,}65 \,.\, 50 = 32{,}5 \text{ kb}^{\text{dm}}.$$

Nehmen wir das spec. Gewicht des Gußeisens zu $\gamma = 7{,}4$ an, so ist

$$Q = V\gamma = 32{,}5 \,.\, 7{,}4 = 240{,}5 \sim = 240^{\text{k}}.$$

Nun ist nach Formel (18)

$$s = \frac{Ql}{2q}; \text{ also}$$

$$s = \frac{240 \,.\, 5000}{2 \,.\, 0{,}625 \,.\, 50^3} = \frac{240 \,.\, 5000}{2 \,.\, 0{,}625 \,.\, 125000}.$$

$$s' = s = \frac{24}{3{,}125} = 7{,}7^{\text{k}} \text{ pro } \square^{\text{mm}}.$$

Auflösung. b) Da der Querschnitt symetrisch ist, so sind die Zug- und Druckspannungen an den äußersten Fasern s' und s'' einander gleich, also ist auch

$$s'' = 7{,}7^{\text{k}} \text{ pro } \square^{\text{mm}}.$$

Das ist nun offenbar zu viel für zulässige Belastung, da nach Tab. I für Gußeisen (grau) $\mathfrak{Z} = 2{,}5$ und $\mathfrak{D} = 6$. Es ist aber $Z = 7{,}5$ und $D = 15$; demnach sehen wir, daß sich der Stab zwar tragen würde, aber an der Befestigungsstelle tritt auf der Zugseite eine Belastung (ein wenig) über die Elasticitätsgrenze hinaus ein.

Auflösung. c) Wir setzen $s = Z' \; (< \mathfrak{D}') = 12^{\text{k}}$ pro $\square^{\text{mm}}$ und reduciren die Gleichung auf l:

$$l = \frac{2qZ'}{Q} = \frac{2 \,.\, 0{,}625 \,.\, 125000 \,.\, 12}{240} = 7812{,}5^{\text{mm}}$$

oder $l = 7{,}8^{\text{m}}$ ist die Länge, bei welcher in der angegebenen Anordnung der Stab in Folge seines Eigengewichtes an der Befestigungsstelle bricht.

β) Der Stab ist in zwei Punkten gestützt.

Die über die Stablänge AB (Fig. 93) gleichmäßig vertheilte Last sei wiederum allgemein $Q = ql$; ihr Angriffspunkt liegt in der Mitte zwischen A und B, demnach sind die Reactionsdrucke in A und B:

$$P_1 = P_2 = \frac{Q}{2} = q\frac{l}{2}.$$

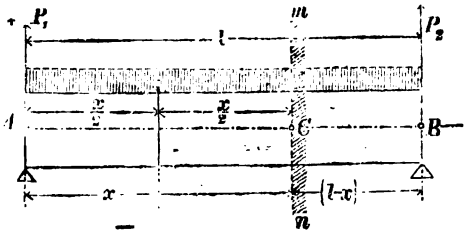


Fig. 93.

Wir legen abermals in einem beliebigen Punkte C einen Schnitt mn, denken uns vorläufig den Theil BC eingemauert, so sehen wir, daß der andere (freie) Theil AC durch 2 Momente in Anspruch genommen ist:

1) Kraft P_1 mit dem Hebelarme x, nach rechts drehend (positiv)

2) „ qx „ „ „ $\frac{x}{2}$, „ links „ (negativ).

Das resultirende Moment für die Stelle C (gleich der algebr. Summe der Einzelmomente) ist demnach die Differenz beider:

$$M_x = P_1 x - qx \,.\, \frac{x}{2} = q\frac{l}{2}x - q\frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}(lx - x^2).$$

Digitized by Google

M_x (wird nach der Theorie der Maxima und Minima) ein Maximum für $x = \frac{1}{2}$, d. h. der gefährliche Querschnitt liegt in der Mitte.

Für denselben ist das resultirende Moment also:

$$M = \frac{q}{2}\left(l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{q}{2}\left(\frac{2l^2 - l^2}{4}\right) = \frac{1}{8} q l^2.$$

Setzen wir nun wieder $q l = Q$, so ergiebt sich die Gleichgewichtsbedingung für die Berechnung der Tragkraft oder der Dimensionen eines auf zwei Stützen ruhenden, durch eine über die freie Länge gleichmäßig vertheilte Last oder durch sein Eigengewicht belasteten prismatischen Körpers zu:

$$M = \frac{1}{8} q l^2 = q s = \frac{1}{8} Q l \text{ oder}$$
$$Q l = 8 q s \ldots . \quad (19.)$$

Anmerkung. Ist der Körper an beiden Enden auf gehörige Länge eingemauert, so gestaltet sich die Tragfähigkeit bei gleichmäßig vertheilter Belastung zu: $Q l = 12 q s \ldots .$ (19a.)

Aufgabe 1. a) Wie groß ist bei gleichförmig vertheilter Belastung die Tragfähigkeit eines schmiedeisernen Trägers vom Profile Fig. 4°, Bl. XXI, wenn der Mittelsteg desselben 20mm stark gewalzt ist und die freie Länge zwischen den Stützen $l = 4^m$ beträgt?

b) Wie groß ist die Tragfähigkeit unter denselben Umständen, wenn der Träger von Gußeisen ist?

Auflösung. a) Nach Formel (19) ist die Belastung, welche, gleichförmig über die freie Länge vertheilt, ein auf zwei Stützen ruhender prismatischer Körper trägt:

$$Q = \frac{8}{l} q s.$$

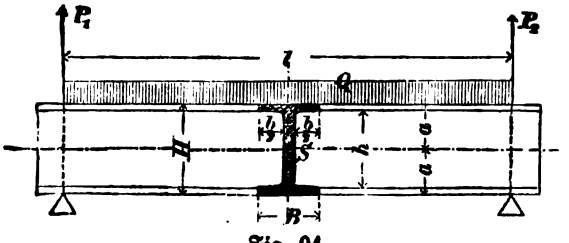


Fig. 94.

Die Länge l ist zu $4^m = 4000^{mm}$ angegeben, und für die zulässige Spannung „s" setzen wir bei Bauwerken im äußersten Falle $7{,}5^k$ pro $\square^{mm}$.

Der Querschnitt des vorliegenden Beispieles ist aber in Tab. II pag. 46 und 47 nicht aufgeführt, und wir müssen daher den Querschnittsmodulus desselben erst entwickeln.

Dieser sogenannte Doppel-T-Querschnitt kann gerade so wie Fig. 87 als Differenz zweier Rechteck-Querschnitte betrachtet werden. Man hat nämlich in Fig. 94 drei Rechtecke, welche mit Hilfe der in der Figur eingeführten Bezeichnung heißen: BH, $\frac{b}{2}$h und $\frac{b}{2}$h. Ziehen wir die zwei kleineren, einander gleichen Rechtecke von dem ersteren großen ab, so bleibt unser Träger-Profil übrig.

Wollen wir nun den Querschnittsmodulus für die aus der Differenz von Rechtecken bestehende Fläche ableiten, so müssen wir die Trägheitsmomente der

Digitized by Google

Rechtecke subtrahiren und das Resultat durch Division mit a in den Querschnittsmodulus verwandeln. Es ist:

$$J_1 = \frac{BH^3}{12} \text{ und } J_2 = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{b \cdot h^3}{12}; \text{ demnach:}$$

$$J = J_1 - J_2 = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \text{ und, da } a = \frac{H}{2}, \text{ so ist der Querschnitts-}$$

modulus:

$$q = \frac{J}{a} = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \cdot \frac{2}{H} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}.$$

Die Formel (19) heißt nun im vorliegenden Falle speciell:

$$Q = \frac{8}{l} \cdot \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \cdot s, \text{ oder numerisch — mit Einführung der}$$

Dimensionen von Fig. 4°, Bl. XXI: B = 97; H = 232; b = 97 − 20 = 77; h = 232 − 2 . 13 = 206 —:

$$Q = \frac{8\,(97 \cdot \sqrt[3]{232} - 77 \cdot \sqrt[3]{206})\,7{,}5}{4000 \cdot 6 \cdot 232}$$

$$Q = \frac{538135464 \cdot 7{,}5}{500 \cdot 6 \cdot 232} = \frac{4036015980}{696000} = 5798^k \text{ und}$$

$$q = \frac{5798}{4000} = 1{,}45^k$$

Auflösung. b) Hat man in einem Beispiele die Tragfähigkeit oder umgekehrt die Dimensionen (bei irgend welcher Beanspruchungsweise) für ein gewisses Material berechnet, so findet man die bezüglichen Werthe für ein anderes Material unter denselben Umständen durch eine einfache Proportion.

Bezeichnen wir allgemein die Tragfähigkeit des zweiten Materiales mit P_0 und die zulässige Spannung desselben mit s_0, so verhält sich bei Biegungsfestigkeit allgemein [Formel (16) pag. 48]:

$$P : P_0 = \frac{qs}{l} : \frac{qs_0}{l} = s : s_0$$

und in dem vorliegenden Falle (Formel 19) der Beanspruchung auch:

$$Q : Q_0 = \frac{8qs}{l} : \frac{8qs_0}{l}.$$

Demnach ist:

$$Q_0 = \frac{Qs_0}{s}.$$

Setzen wir nun bei Gußeisen in Bauwerken $s_0 = 2{,}5^k$ pro □mm, so ist:

$$Q_0 = 5798 \cdot \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{5798}{3} = 1932{,}6^k.$$

Die mögliche Belastung ist also beim Gußeisenträger um das 3-fache kleiner als beim Walzeisenträger. —

Digitized by Google

B. Berechnung der Dimensionen von Körpern mit veränderlichem Querschnitte.

In der Praxis sind am häufigsten zwei Gattungen von Aufgaben. Entweder es ist der Körper nach Form und Größe schon bekannt, bzhtl. angenommen, und man prüft durch die Rechnung, ob er einer bestimmten Inanspruchnahme unter gewissen Umständen genügt: man berechnet mit anderen Worten die Größe der Materialspannung für die Querschnittseinheit; oder es sind die Dimensionen eines Körpers direct aus der Inanspruchnahme zu berechnen. Im ersten Falle braucht man immer nur den gefährlichen Querschnitt zu berechnen oder, wenn derselbe nicht besonders bekannt, bzhtl. ermittelt ist, so rechnet man die Tragfähigkeit, resp. Materialspannung an einigen Stellen des Körpers aus. Im zweiten Falle ist zunächst zu entscheiden, ob der Körper 1) eine prismatische Form oder 2) die Gestalt eines anderen geometrischen Raumgebildes haben soll, oder 3) ob seine Form mit den Dimensionen derart aus der Inanspruchnahme bestimmt werden soll, daß in jedem Querschnitte dieselbe Materialbeanspruchung, dieselbe Spannung stattfindet.

Wir haben im Vorstehenden dieses Capitels die allgemeinen Formeln entwickelt, deren man zur Berechnung sowohl der Belastung als der Materialspannung und der Dimensionen prismatischer Stäbe für Biegungsbelastung bedarf und damit zugleich die Mittel und Wege angeben, einzelne Querschnitte eines beliebig geformten Körpers zu berechnen. Es bleiben jetzt noch die zwei Fälle zu erörtern:

a) Gegeben ist die Form des Körpers. Sie ist jedoch nicht prismatisch, gehört vielmehr einem anderen geometrischen Körper mit gewissen Eigenschaften an, und die Tragfähigkeit resp. die Dimensionen sind zu berechnen.

b) Form und Dimensionen eines auf Biegung beanspruchten Körpers sind aus der Inanspruchnahme zu ermitteln, mit der Bedingung jedoch, daß in allen Querschnitten dieselbe Festigkeit besteht.

a) Beispiele dieser Art sind in der Praxis nicht sehr häufig, und wir besprechen deshalb im Vorliegenden nur ein solches, in dem wir die Form des abgestutzten Kegels (Fig. 95) zu Grunde legen.

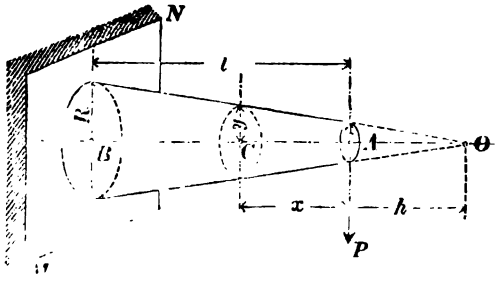


Fig. 95.

Der Körper ist mit seiner größeren Endfläche an einer verticalen festen Fläche MN befestigt und durch eine in der kleineren Endfläche bei A angreifende Vertical-Kraft P belastet.

Wir ermitteln zuerst die Lage d. gefährlichen Querschnittes. Derselbe liegt da, wo die Materialspannung $s\left(=\frac{Pl}{q}\right)$ ein Maximum wird.

Die Radien der beiden kreisförmigen Endflächen sind R und r; ihr horizontaler Abstand = l. In der Entfernung AC = x vom freien Ende legen wir

Digitized by Google

einen Schnitt und bezeichnen den Radius desselben mit y, die Spannung der Flächeneinheit daselbst mit s. Das Trägheitsmoment ist:

$$J = \frac{\pi}{64}(2y)^4 = \frac{16}{64}\pi y^4$$

$$J = \frac{\pi}{4} y^4;\ a = y.$$

Demnach ist: $$\frac{a}{J} = \frac{1}{q} = \frac{y}{y^4} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi y^3}.$$

Nach Formel (16) pag. 50 ist die Materialspannung für den vorliegenden Fall der Inanspruchnahme:

$$s = \frac{Px}{q} = P \,.\, x \,.\, \frac{4}{\pi y^3}.$$

Das unbekannte y läßt sich einfach auf andere Weise ausdrücken, wenn man den Kegel voll ergänzt. Die Spitze desselben liegt in O, und die Höhe AO des Ergänzungskegels ist h. Dann verhält sich:

$$y : r = (x + h) : h, \text{ und daraus ist:}$$

$$y = \frac{r}{h}(x + h).$$

Setzen wir diesen Werth von y (in die 3. Potenz erhoben) in die obige Gleichung für s ein, so geht dieselbe über in:

$$s = \frac{4Px}{\pi\left(\frac{r}{h}\right)^3 (x+h)^3} = \frac{4Ph^3}{\pi r^3} \cdot \frac{x}{(x+h)^3}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn $x = \frac{h}{2}$. Der gefährliche Querschnitt liegt also bei dem abgestumpften Kegel AB um die halbe Höhe des Ergänzungskegels von A aus entfernt. In diesem Querschnitte ist eine Maximalspannung:

$$s_{max} = \frac{4Ph^3}{\pi r^3} \cdot \frac{\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2} + h\right)^3}.$$

Der Klammerausdruck in der dritten Potenz giebt:

$\left(\frac{h}{2} + h\right)^3 = \frac{h^3}{8} + 3 \,.\, \frac{h^2}{4} \,.\, h + 3\,\frac{h}{2} \,.\, h^2 + h^3 = \frac{27}{8} h^3$, und es ist:

$$s_{max} = \frac{4Ph^3}{\pi r^3} \cdot \frac{\frac{h}{2}}{\frac{27}{8} h^3} = \frac{4}{27} \cdot \frac{4Ph}{\pi r^3}$$

$$s_{max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{Ph}{\pi r^3} \quad \ldots \quad (20)$$

die pro Flächeneinheit des gefährlichen Querschnittes bei einem nach Art der Fig. 95 beanspruchten abgestumpften Kegel eintretende Materialspannung. Der Abstand des gefährlichen Querschnittes vom freien Ende ist $x = \frac{h}{2}$ und die Höhe h des Ergänzungskegels für diesen Fall:

Digitized by Google

$$h = \frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r}{P} s_{max}$$

oder geometrisch abgeleitet:

$$\frac{R}{r} = \frac{h+l}{h} = 1 + \frac{l}{h}$$

$$h = \frac{l}{\frac{R}{r} - 1}.$$

Beide Werthe von h einander gleichgesetzt, fällt die Höhe des Ergänzungskegels weg, und man erhält die Tragfähigkeit des abgestumpften Kegels, wenn man im gefährlichen Querschnitte eine Maximalspannung $s_{max} = s$ annimmt:

$$P = \frac{27}{16} \cdot \frac{\pi r^2}{l} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) s \quad \ldots \quad (20^a).$$

Aufgabe. Ein abgestutzter Kegel von Gußeisen ist nach Art der Fig. 95 befestigt; die Halbmesser der beiden Endflächen sind $R = 300^{mm}$ und $r = 200^{mm}$, die Länge $l = 500^{mm}$. a) Wie groß ist die Tragfähigkeit, wenn man im gefährlichen Querschnitte eine Spannung von $s = 2{,}5^k$ pro $\square^{mm}$ zuläßt und b) wie groß ist die Tragfähigkeit eines Cylinders, dessen Halbmesser gleich dem mittleren Halbmesser des abgestutzten Kegels ist?

Auflösung a) $$P = \frac{27}{16} \cdot 3{,}1416 \cdot \frac{8000000}{500} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdot 2{,}5$$

$$= 27 \cdot 3{,}1416 \cdot 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}5$$

$$= 106025^k.$$

Auflösung b) Ein Cylinder mit dem Halbmesser r_1 = dem mittleren Radius des abgestutzten Kegels $r_1 = \frac{R+r}{2} = \frac{300+200}{2} = 250^{mm}$ hätte dagegen unter denselben Umständen eine Tragfähigkeit von:

$$P = \frac{q}{l} s = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_1^3}{l} s$$

$$P = 0{,}785 \cdot \frac{15625000}{500} \cdot 2{,}5$$

$$= 61327{,}5^k.$$

Bedenkt man nun, daß dieser Cylinder annähernd denselben Inhalt, also auch beinahe dasselbe Gewicht hat wie der obige abgestutzte Kegel, so erkennt man, daß die Form des letzteren bedeutend vortheilhafter ist als die des Cylinders, denn die Tragfähigkeit ist um das 1,7-fache größer. —

Wollen wir nun ganz rationell bauen, so müssen wir die theoretische Form für die obige Art der Inanspruchnahme anwenden, d. h. wir müssen dazu einen Körper von gleicher Festigkeit aufsuchen.

b) Die Bedingung, daß in jedem Querschnitte des auf Biegung beanspruchten Körpers dieselbe Festigkeit bestehen soll, läßt sich mathematisch folgendermaßen ausdrücken:

$$s = M \cdot \frac{e}{J} = \text{constant},$$

d. h. die größte zulässige Materialspannung hat in allen Querschnitten des betreffenden Körpers dieselbe Größe.

Digitized by Google

α) Der Körper ist mit einem Ende normal zu seiner geometrischen Axe in eine feste Wand eingeschlossen und am freien Ende durch eine Normalkraft belastet.

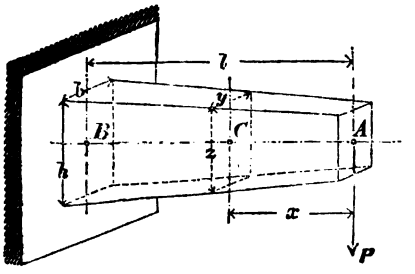


Fig. 96.

Die **Form des Querschnittes sei ein Rechteck** und habe an der Einmauerungsstelle die Dimensionen b und h. Das Profil des Körpers ist noch unbekannt; wir werden aber aus dem vorher besprochenen Falle a) schließen können — und das Gefühl sagt es uns — daß bei der vorliegenden Anordnungsweise die Querschnitte nach dem Angriffspunkte der Kraft hin abnehmen müssen. In welcher Weise, nach welchem Gesetze diese Abnahme stattfindet, wird uns das Resultat der gegenwärtigen Untersuchung in einzelnen Beispielen zeigen.

In der Entfernung x vom Angriffspunkte A der Kraft P denken wir uns einen Normalschnitt gelegt, und daselbst seien die Dimensionen des rectangulären Querschnittes mit y und z bezeichnet. Für diesen Schnitt (d. h. wenn wir uns die Befestigungsstelle nach C verlegt denken) ist das Biegungsmoment: $M = P : x$, das Trägheitsmoment: $J = \frac{yz^3}{12}$, der Abstand der am stärksten gespannten Fasern von der Neutralfaser: $a = \frac{z}{2}$. Demnach ist:

$$s = Px \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{12}{yz^3} = 6\frac{Px}{yz^2}.$$

An der wirklichen Befestigungsstelle in B bekommen wir ganz entsprechend und unter der Voraussetzung, daß dieselbe Materialspannung s besteht:

$$s = Pl \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{12}{bh^3} = 6\frac{Pl}{bh^2}.$$

Beide Werthe von s einander gleichgesetzt, ist:

$$6\frac{Px}{yz^2} = 6\frac{Pl}{bh^2} \text{ oder}$$

$$\frac{x}{yz^2} = \frac{l}{bh^2} \quad \ldots \quad (21).$$

Dieser allgemeinen Formel müssen alle Körper von gleicher Festigkeit der obigen Anordnung genügen. Da dies jedoch auf sehr verschiedene Weise geschehen kann, so ist schon zum Voraus zu erkennen, daß es für die vorliegende Beanspruchungsweise mehrere Körperformen für gleiche Festigkeit mit rechteckigem Querschnitte geben muß.

1. Beispiel. Die Höhe h des rechteckigen Querschnittes sei constant:

$$z = h.$$

Bringt man diese Voraussetzung in die obige Formel (21), so entsteht:

Digitized by Google

$$\frac{x}{yh^2} = \frac{l}{bh^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{l}{b}.$$

Schreiben wir das in der Form:

$$x : l = y : b,$$

so heißt es: Die Hebelarme der Kraft P für zwei verschiedene Schnitte verhalten sich ebenso wie die Breiten b und y dieser Querschnitte. Es bilden also x und l die Höhen und y und b die Grundlinien zweier ähnlichen Dreiecke (z. B. in der Form Fig. 97), und damit erhalten wir die eine Projection des vorliegenden Körpers. Nehmen wir dazu noch die vorher gemachte Voraussetzung, daß die Höhe des rechteckigen Querschnittes constant = h sein soll und denken wir uns an jede Parallele zu b und y in den Endpunkten die Höhe h normal angetragen, so erhalten wir die Seitenbegrenzungen des Körpers in Gestalt von Rechtecken mit der Höhe h; das Ganze giebt die Form des dreiseitigen Prisma's.*)

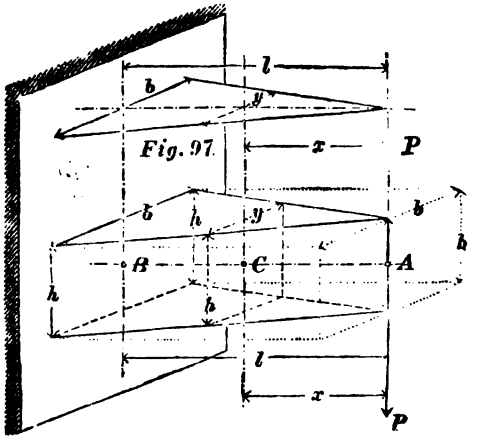


Fig. 98.

Für jeden beliebig angenommenen Abstand x vom freien Ende erhält man die zugehörige Breite des Querschnittes aus obiger Proportion zu:

$$y = \frac{b}{l} \cdot x \quad \ldots \quad (22),$$

wodurch sich leicht — wenn b und l bekannt, resp. eins oder das andere aus der Belastung P ermittelt ist — mit Hinzunahme der constanten Höhe h der Körper Fig. 98 construiren läßt.

Die Tragfähigkeit ist für jeden Querschnitt dieselbe, nämlich:

$$P = \frac{q s}{l} = \frac{b h^2}{6 . l} s \quad \ldots \quad (23).$$

Anmerkung. 1) Das Volumen dieses Körpers von constanter Biegungsfestigkeit ist:

$$V_1 = \frac{b l}{2} h.$$

Das Volumen eines prismatischen Körpers (dessen congruente Querschnitte normal zur neutralen Axe AB sind) von derselben Tragfähigkeit

$$P = \frac{b h^2}{6 l} s \text{ wäre:}$$

$$V = b l h.$$

*) Merkwürdiger Weise erhalten wir da wiederum die prismatische Form. Allein es ist dies seiner Anordnung nach nicht ein Prisma in dem Sinne der prismatischen Körperform für Biegungsbelastung A, pag. 49, sondern es ist mit Bezug auf das Biegungsmoment oder auf die geometrische Axe A B ein Körper mit veränderlichen, rechteckigen Querschnitten.

Digitized by Google

Es verhalten sich demnach die Volumen und, bei demselben Materiale, die Gewichte eines solchen Körpers (Fig. 98) von gleicher Festigkeit und eines in Bezug auf Tragfähigkeit gleichwerthigen prismatischen Körpers zu einander wie $\frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$, oder mit anderen Worten: Man erzielt durch Anordnung des Körpers Fig. 98 von gleicher Biegungsfestigkeit gegenüber dem gleich tragfähigen prismatischen Körper (in der Fig. 98 punktirt) ein Materialersparniß von 50%.

Anmerkung 2) Der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie ist nach pag. 48: $\varrho = \frac{JE}{M}$ und für den vorliegenden Fall Fig. 98:

$$\varrho = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{E}{Pl} = \frac{bh^3}{12 \cdot l} \cdot \frac{E}{P}.$$

Das ist der Krümmungshalbmesser eines Kreisbogens und somit die tiefste Einsenkung des Punktes A verhältnißmäßig sehr groß; deshalb benützt man diese Form mit Vortheil zu Wagenfedern, und zwar in der Weise, daß man das dreiseitige Prisma (Normalkeil) Fig. 99 parallel AB in Streifen zerlegt denkt und dieselben in constanter Breite b_1 unter einander legt. Die Tragfähigkeit ist entsprechend Formel (23) bei n Streifen von der Breite b_1 und und der Dicke h:

$$P = \frac{n \cdot b_1 \cdot h^2}{6 \cdot l} s,$$

und der Materialaufwand ist ein Minimum.

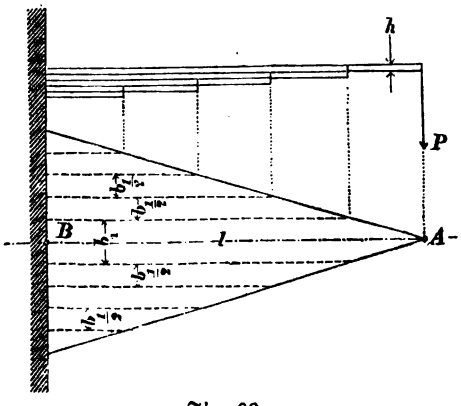


Fig. 99.

2. Beispiel. Setzen wir in der allgemeinen Formel (21) $y = b$, d. h. nehmen wir an, es sei in allen rechteckigen Querschnitten des Körpers die Breite b constant, so geht die Formel (21) über in:

$$\frac{x}{z^2} = \frac{l}{h^2} \text{ oder}$$

$$z = h\sqrt{\frac{x}{l}} \quad \ldots \ldots (24).$$

Dieses Verhältniß zwischen x und z ergiebt parallel zur Kraftrichtung ein Profil in Gestalt der Parabel, während normal dazu die Querschnitte alle dieselbe Breite haben. Man construirt das parabolische Profil, indem man, von dem freien Ende ausgehend, verschiedene Abstände x (Abscissen) nach der Befestigungstelle hin annimmt und für jedes solche x mittelst Formel (24) das zugehörige z (Ordinate) berechnet.

Die Figuren 100 stellen diese Körper in isometrischer Projection dar. Dieselbe Formel (24) läßt sich nämlich in zweierlei Formen construiren, je nachdem man die den angenommenen x entsprechend berechneten z ungetheilt nur nach einer Seite hin (Fig. 100a) oder das z jedesmal halbirt nach beiden Seiten der horizontalen Axe AB abträgt (Fig. 100b).

Diese Formen ergeben gegenüber den gleichwerthigen prismatischen Körpern eine Materialersparniß von 33%.

3. Beispiel. Wir setzen voraus:

$$y : z = b : h;$$

Digitized by Google

d. h. wir nehmen an, daß in jedem Querschnitte **dasselbe** Verhältniß zwischen den Rechteckseiten desselben bestehen soll.

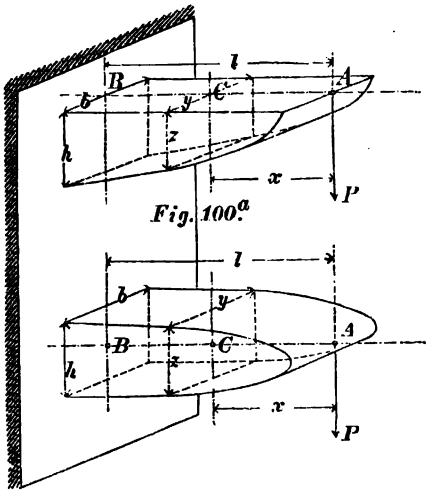


Fig. 100a.

Fig. 100b.

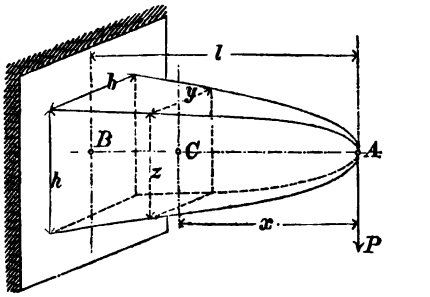


Fig. 101.

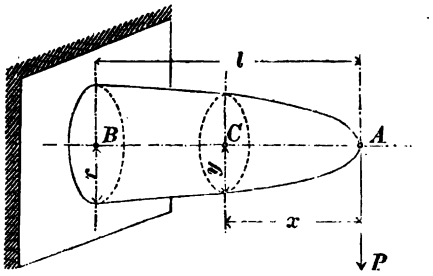


Fig. 102.

Setzen wir den Werth $y = \frac{b}{h}z$ aus obiger Proportion in die allgemeine Gleichung (21) ein, so erhalten wir für

$$Z = h\sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots . \quad (25),$$

und wenn wir — nachdem für einen gegebenen Fall der Querschnitt (b . h) an der Befestigungsstelle aus der Belastung P und der Länge l berechnet ist — für verschiedene Annahmen von x (innerhalb „l") die zugehörigen y und z nach obigen Gleichungen berechnen und construiren, so erhalten wir einen Körper der nebenskizzirten Form: Cubisch = parabolisch abgestumpfte Pyramide (Fig. 101). —

Die allgemeine Formel (21) nimmt ein etwas verändertes Aussehen an, wenn man sie, anstatt wie ursprünglich auf rechteckigen Querschnitt, auf **Kreisquerschnitt** anwendet.

Setzen wir nämlich (wie pag. 63) voraus, daß die Materialspannung in dem Querschnitte vom Halbmesser r an der Befestigungsstelle und in einem beliebigen Querschnitte vom Halbmesser y dieselbe sei, so erhalten wir:

$$\frac{4Px}{\pi y^3} = \mathfrak{s} = \frac{4Pl}{\pi r^3}$$

und daraus:

$$\frac{x}{y^3} = \frac{l}{r^3}.$$

Das ist die Gleichung einer **cubischen Parabel**, wie Fig. 102 eine solche darstellt. Dieselbe wird nach der obigen Gleichung construirt, indem man für das Biegungsmoment Pl die Querschnittsdimension r an der Befestigungsstelle ermittelt und für beliebig innerhalb AB angenommene x die zugehörigen Radien y, berechnet nach:

$$y = r\sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots . \quad (26),$$

aufträgt.

Digitized by Google

β) Der Körper ist mit einem Ende normal zu seiner geometrischen Axe in einer festen Wand eingeschlossen und durch eine über seine Länge gleichförmig vertheilte Belastung in Anspruch genommen.

Um eine allgemeine Formel für die Gestalt des Körpers von gleicher Festigkeit und für die Tragkraft an der Einmauerungsstelle zu erhalten, schlagen wir ganz denselben Weg ein wie im ersten Falle Fig. 96.

Für **rechteckigen Querschnitt** ist im vorliegenden Falle die constante Materialspannung (s. Fig. 92, pag. 55):

$$\frac{3ql^2}{bh^2} = s = \frac{3qx^2}{xz^2};$$

$$\text{also:} \quad \frac{x^2}{yz^2} = \frac{l^2}{bh^2} \ldots . \quad (27)$$

und die Tragkraft, wenn $ql = P$:

$$P = \frac{bh^2}{3.l} s \ldots . \quad (28).$$

1. Beispiel. Setzen wir in Formel (27) einmal $y = b$, so heißt diese Gleichung:

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{l^2}{h^2} \text{ oder } \frac{x}{z} = \frac{l}{h}, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{h}{l} x \ldots . \quad (29).$$

Die Körperform zeigt parallel zur Biegungsebene ein Dreieck (Fig. 103), und die Materialersparniß beträgt wie bei Fig. 98 = 50%.

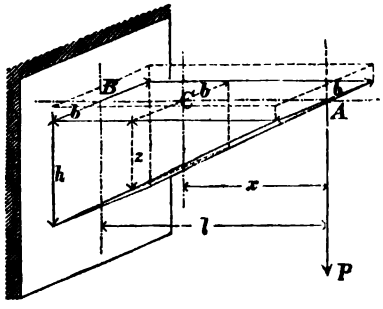


Fig. 103.

γ) Der Körper ruht auf 2 Stützen und trägt eine über seine Länge gleichförmig vertheilte Last $Q = ql$.

Wir bekommen im vorliegenden Falle (unter einer in der Praxis üblichen Annahme) eine Profilform, welche durch die Verticalebene in der Mitte zwischen den Stützpunkten in zwei congruente Hälften zerlegt wird, und deshalb erscheint es vortheilhaft, den Coordinatenmittelpunkt in die Mitte zwischen die Stützpunkte zu verlegen, in Fig. 104 also (Abscissen) x von der Mitte 0 aus zu uehmen, anstatt, wie es bisher und auch in Fig. 93 (pag. 57) geschah, von den Stützpunkten resp. vom Ende aus.

Denken wir uns nun wieder in einem beliebigen Punkte C einen Schnitt gelegt und den Theil BC eingeschlossen, so haben wir an dem freien Theile AC zwei parallele, entgegengesetzte Kräfte $\frac{Q}{2} = q\frac{l}{2}$ und $q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ wirkend und dazu die betreffenden Hebelarme $\left(\frac{l}{2} - x\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)$. Die Differenz beider Momente bildet das Biegungsmoment M für den beliebigen Schnitt in C.

Es ist also:

Digitized by Google

$$M_x = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2$$

$$= \frac{q}{2}\left[l\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - lx - x^2\right)\right]$$

$$= \frac{q}{2}\left[\frac{l^2}{4} - x^2\right].$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den beliebigen Punkt C heißt dann:

$$M_x = \frac{J}{a} s_x = \frac{q}{2}\left[\frac{l^2}{4} - x^2\right].$$

Nehmen wir nun an, der Querschnitt des Körpers sei ein Rechteck von der Höhe z und der Breite y, so ist:

$$J = y\frac{z^3}{12} \text{ und } \frac{J}{a} = y\frac{z^3}{12} \cdot \frac{2}{z} = y\frac{z^2}{6}.$$

Es ist also:

$$M_x = y\frac{z^2}{6} \cdot s_x = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \text{ und daraus die Material-}$$

spannung:

$$s_x = \frac{3q}{yz^2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right).$$

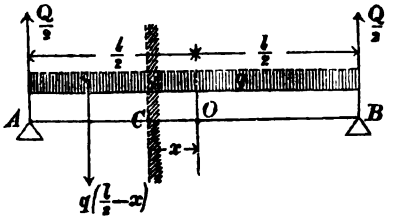


Fig. 104.

Aus der Betrachtung des analogen Falles β) (pag. 58) wissen wir, daß bei einem prismatischen Körper dieser Beanspruchung der gefährliche Querschnitte in der Mitte zwischen den Stützpunkten liegt; das wäre nach der Bezeichnung in unserer Fig. 104, wo x = Null. Dort wird unser Körper von gleicher Festigkeit den größten Querschnitt erhalten müssen, und es sei daselbst die Höhe = h und die Breite = b. Für einen solchen Körper muß nun die Materialspannung überall dieselbe sein. Es sei demnach in O für x = Null:

$$s = \frac{3q}{bh^2}\left[\frac{l^2}{4} - 0\right], \text{ so erhalten wir für } s_x = s:$$

$$\frac{3q}{yz^2} = \left[\frac{l^2}{4} - x^2\right] = \frac{3q}{bh^2} \cdot \frac{l^2}{4} \text{ und daraus:}$$

$$\frac{yz^2}{bh^2} = \frac{l^2 - 4x^2}{l^2} \quad \ldots . \quad (30).$$

Wir erhalten für diesen Fall eine in der Praxis sehr beliebte Form, wenn wir annehmen, daß die Breite des rechteckigen Querschnittes durchgehends dieselbe Größe hat.

Alsdann ist nämlich y = b, und führen wir das in Formel (30) ein, so heißt diese:

$$\frac{z^2}{h^2} = \frac{l^2 - 4x^2}{l^2} = \frac{1}{l^2}(l^2 - 4x^2).$$

Digitized by Google

Multipliciren und dividiren wir das l^2 in der Klammer mit 4 und ziehen wir 4 als Factor, so ist:

$$\frac{z^2}{h^2} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{4l^2}{4} - 4x^2\right) = \frac{4}{l^2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

$$\frac{z}{h} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2} \text{ und}$$

$$z = \frac{2h}{l}\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2} \ldots . (31).$$

Das Profil des Körpers wird darnach eine halbelliptisch- (Fig. 105) oder — wenn man die z zur Hälfte auf beiden Seiten der (Abscissen-) Axe AB auf-

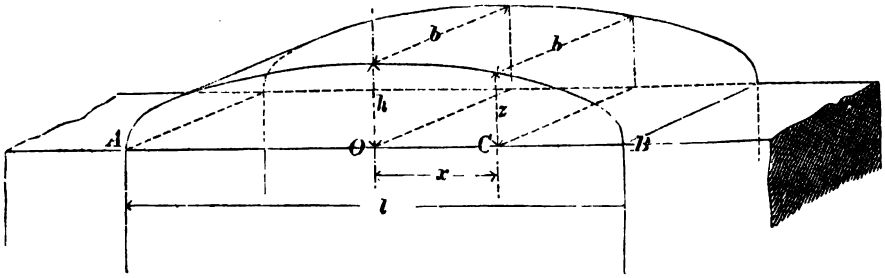


Fig. 105.

trägt — eine elliptisch-begrenzte Ebene. Die größte Höhe h des Profiles in der Mitte berechnet sich aus der Formel für die in allen Punkten constante Tragkraft, und diese selbst ist nach

$$s = \frac{3q}{bh^2} \cdot \frac{l^2}{4}:$$

$$Q = ql = \frac{4}{3} \cdot \frac{bh^2}{l} s \ldots . (32).$$

Darin bedeutet Q die über die Länge l gleichförmig vertheilte Gesammtlast und q die auf die Längeneinheit von l kommende Belastung.

In dem Vorstehenden haben wir gezeigt, wie man zu den Körperformen von gleicher Biegungsfestigkeit gelangt und zugleich hervorgehoben, welchen Vortheil man gegenüber den prismatischen Formen damit erreicht. Alle derartigen Beispiele, welche in der Praxis vorkommen können, hier durchzunehmen, ist selbstverständlich unmöglich; die angeführten werden aber genügen, das allgemeine Verfahren zu lehren. Es handelt sich immer nur darum, die Materialspannung für einen beliebig gewählten und für den gefährlichen Querschnitt zu berechnen und beide Ausdrücke einander gleich zu setzen; daraus läßt sich dann jederzeit eine (Querschnittsdimension) Variable berechnen, wenn man die andere annimmt.

IV. Torsions- oder Verdrehungsfestigkeit.

Fig 62, pag. 8, Bd. II giebt die Verdrehung eines prismatischen Körpers in einfach schematischer Darstellung. Als wesentlich ist dabei zu betrachten, daß die geometrische Axe*) des Stabes ihre geradlinige Gestalt nicht verändert und daß

*) Bei einseitiger Befestigung des Stabes denkt man sich deshalb besser an Stelle des einfachen Momentes ein Kräftepaar. Ebenso kann man sich die Befestigung in der

Digitized by Google

die Ebene M'N' des Kraftmomentes P . $\overline{AA'}$ normal steht auf der geometrischeu Axe des Stabes. Die einzelnen Materialfasern werden bei dieser Beanspruchung ausgedehnt und ihre Querschnitte in zwei parallelen Stabquerschnitten derart gegen einander verschoben, daß jene, ihren Abstand von der Drehaxe (Schwerpunktsaxe des Stabes) beibehaltend, sich um die feste und geradlinige Dreh- oder Torsionsaxe drehen.

Die Größe dieser Verdrehung ist offenbar um so beträchtlicher, je weiter der betreffende Querschnitt von der Befestigungsstelle entfernt ist. Denken wir uns einen beliebigen Faserquerschnitt innerhalb eines Normal-Stabquerschnittes geradlinig mit der Drehaxe verbunden und den Unterschied zwischen dieser Richtung vor und während der Beanspruchung in Grad- und Bogenmaß gemessen, so stellt dieses Maß die Größe des Verdrehungswinkels dar. Während der Verdrehung nimmt also eine ursprünglich geradlinige Faser eine gewundene Form an.

Wollen wir nun den **Gleichgewichtszustand** bei einer Beanspruchung auf Torsions- oder Verdrehungsfestigkeit (innerhalb der Elasticitätsgrenze) durch eine algebraische Formel darstellen, so haben wir einerseits von außen auf den Körper einwirkend: ein Moment (Kraft mal senkrechter Abstand ders. von der Drehaxe) resp. die algebraische Summe von zwei oder mehreren Momenten von Kräften bzhtl. Kräftepaaren. Wir bezeichnen dasselbe mit M. Andererseits haben wir im Stabe den Widerstand, welchen die Querschnittselemente zweier einander unendlich nahe gelegenen Normalquerschnitte einer gegenseitigen Verschiebung, wobei sich die Querschnitte um die Verbindungslinie der Schwerpunkte drehen, entgegensetzen. Hinsichtlich der Materialspannung an der Elasticitätsgrenze ist also wie bei Schub- oder Scheerfestigkeit (pag. 38) zu setzen $s = S = 0{,}8\,Z$ (wenn $Z < D$) und $s = S = 0{,}8\,D$ (wenn $D < Z$), während an Stelle des Elasticitätsmodulus der Drehmodulus pag. 13 (0,375 ÷ 0,4 vom Elasticitätsmodulus) tritt.

Die Querschnittselemente widerstehen nun der Beanspruchung von außen in ganz ähnlicher Weise wie bei Biegung. Dort (Fig. 74) bilden die Querschnittselemente oder Faserquerschnitte mit dem Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Axe (00_1, Fig. 74), algebraisch summirt, zusammen ein Moment, das sogenannte Trägheitsmoment (J).

Je nachdem wir nun bei Biegung den Querschnitt Fig. 106 entweder auf XX_1 oder auf YY_1 als neutrale Axe beziehen, d. h. den Querschnitt um XX_1 oder um YY_1 gedreht denken, hat das Trägheitsmoment die Form:

$$J_1 = \Sigma(fy^2) \text{ resp. } J_2 = \Sigma(fx^2).$$

Darnach bekommen wir z. B. in Tab. II. pag. 46 und 47 beim Rechteck (überhaupt bei solchen Querschnitten, welche nicht für beide Axen dieselbe Symetrie zeigen) zwei verschiedene Größen für das Trägheitsmoment, je nachdem die Biegungsebene in Richtung der einen oder anderen Axe des Querschnittes fällt.

Fläche MN durch ein solches Kräftepaar ersetzt denken. — In der Praxis, z. B. bei Transmissions-, Kurbel- und Vorgelegwellen erfolgt allerdings die Beanspruchung meistens durch Kraftmomente; dann verhindert aber die feste Lagerung in den Zapfenlagern eine Biegung der Torsionswelle. — Kommen innerhalb der Länge eines Stabes mehrere verdrehende Momente vor, so hat man das resultirende Moment durch algebraische Summirung der Einzelmomente zu bilden und als Verdrehungsmoment einzuführen.

Digitized by Google

Denken wir uns nun durch O in Fig. 106 noch eine dritte Axe gelegt, welche auf der Ebene der beiden anderen senkrecht steht, und die Flächenelemente (f) auf diese Axe ZZ_1 (Fig. 107) bezogen, so bekommen wir durch algebraische Summirung derselben wieder ein Trägheitsmoment, aber von der Form:

$$\Sigma(fr^2).$$

Die zwei Trägheitsmomente J_1, und J_2, bezogen auf zwei in (parallel) der Ebene des Querschnittes gelegene Axen XX_1 und YY_1, nennt man die **axialen Trägheitsmomente** des Querschnittes, dasjenige aber, welches auf eine ebenfalls durch den Schwerpunkt der Fläche gehende, aber auf der Ebene derselben **normal** stehende Axe ZZ_1 bezogen wird, nennt man das **polare Trägheitsmoment**, bezeichnet mit J_p.

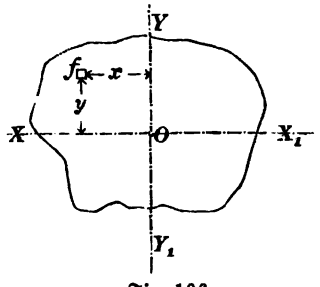


Fig. 106.

Ganz in derselben Weise wie nun bei Biegungsfestigkeit das axiale Trägheitsmoment den Widerstand der Materialfasern kennzeichnet, thut es bei Torsionsfestigkeit das polare Trägheitsmoment. Wir bekommen demnach als allgemeinsten Ausdruck für den Gleichgewichtszustand eines auf Verdrehung beanspruchten Körpers:

$$\mathbf{M = J_p \cdot s} \ldots\ldots (33)$$

worin s, analog pag. 44, die Spannung einer um die Längeneinheit von der Drehaxe abstehenden Faser bedeutet. Führen wir dagegen auch hier (wie pag. 45) die Spannung s der am weitesten von der Drehaxe entfernten Faser ein, welche auch bei Torsion die stärkste Anspaunung unter allen Elementen eines Querschnittes erleiden muß, so ist:

$$\mathbf{PR = M = \frac{J_p}{a} s} \ldots\ldots (34).$$

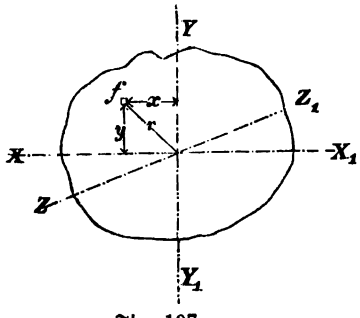


Fig. 107.

Hiernach findet bei einem auf Torsion in Anspruch genommenen Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze Gleichgewicht statt, wenn das Torsionsmoment — Kraft P mal Normalabstand R derselben von der in ihrer Länge und Gestalt unveränderlichen Drehaxe (Schwerpunktsaxe) — gleich ist dem polaren Trägheitsmomente (bezogen auf die durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehende Axe AB (Fig. 108), dividirt durch den Abstand (a) der am stärksten gespannten Faser von dieser Drehaxe und multiplicirt mit der Spannung s in der um a abstehenden Faser.

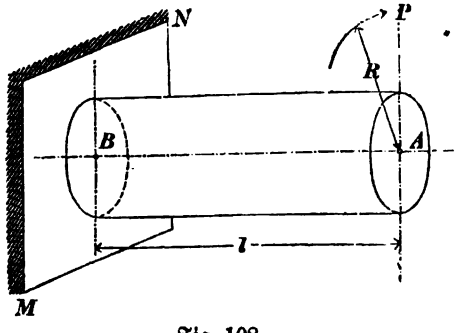


Fig. 108.

Der gefährliche Querschnitt liegt bei einem prismatischen Körper da, wo das Verdrehungsmoment M ein Maximum ist.

Digitized by Google

Bei der Beanspruchung durch ein Moment PR Fig. 108 ist jeder Querschnitt ein gefährlicher, und es ist daher die einfache prismatische Gestalt zugleich die rationelle. Sind mehrere gleiche oder ungleiche, gleichmäßig oder ungleichmäßig über die Länge l des Stabes vertheilte Momente wirksam, so liegt der gefährliche Querschnitt an der Befestigungsstelle; ebenso bei zweiseitiger Einmauerung und gleichen, gleichmäßig vertheilten Momenten. Ist endlich der Stab zweiseitig befestigt und daran ein Moment außerhalb der Mitte wirksam, so liegt der gefährliche Querschnitt im kürzeren Stabtheile (siehe Reuleaux, Construct. 1869, pag. 42).

Zum Zwecke der weiteren Ausführung des Ausdruckes $J_p = \Sigma(fr^2)$ betrachten wir noch einmal die Fig. 107, wo die Coordinaten x, y und r des Elementes f zwei congruente rechtwinklige Dreiecke bilden. Nach der Geometrie ist:

$$r^2 = y^2 + x^2. \quad \text{Mit f multiplicirt:}$$
$$fr^2 = fy^2 + fx^2.$$

Was aber für ein Element gilt, gilt mit Recht für jedes andere und demnach auch für alle zusammen. Also ist:

$$\Sigma(fr^2) = \Sigma(fy^2) + \Sigma(fx^2) \text{ und demnach:}$$
$$J_p = J_1 + J_2 \ldots . \quad (35).$$

Es ist also das polare Trägheitsmoment eines Querschnittes gleich der Summe der beiden axialen Trägheitsmomente desselben Querschnittes.*) — Für Beanspruchung auf Torsion sind außerdem immer solche Querschnitte vorzuziehen, welche in Bezug auf 2 Axen dieselbe Symetrie zeigen, d. h. welche durch zwei rechtwinklige Schwerpunktsaxen in 4 congruente Figuren zerlegt werden. Das sind besonders: Kreis, Kreisring, Quadrat, alle regulären Polygone (mit gerader Seitenzahl) und Kreuzformen. —

Zu bemerken ist noch, daß man die zulässige Spannung bei Torsion sehr gering annimmt, da man sonst meist, wenigstens bei nicht zu großen Kräften, unbrauchbare Formen erhält. Man setzt deshalb in der allgemeinen Formel (34) für s gewöhnlich mit Bezug auf pag. 14 und 15:

bei Eisen: $s = 0{,}8\,Z$ (resp. $0{,}8\,D$)
und bei Holz: $s = 0{,}7\,Z$ (resp. $0{,}7\,D$),

oder für sehr kleine Kräfte speciell:

bei Schmiedeisen: $s = 3{,}0 \div 1{,}0^k$ pr. $\square^{mm}$,
„ Gußeisen: $s = 1{,}5 \div 0{,}5^k$ „ „
„ Holz: $s = 0{,}4 \div 0{,}15^k$ „ „

Der Verdrehungswinkel α in Bogenmaß ist (Fig. 109) proportional dem Verdrehungsmomente und der freien Länge des Körpers, umgekehrt proportional aber dem Trägheitsmomente des Querschnittes und dem Elasticitätsmodulus für Torsion. Also:

$$\alpha = \frac{PR}{J_p G} l \ldots . \quad (36).$$

*) Bei Querschnitten, für welche J_1 und J_2 nicht dieselbe Größe haben, ist die Formel (35) nicht ganz genau, da sich z. B. beim Rechteck nicht alle 4 Seiten gleich stark verwinden; für denselben ist nach Reuleaux annähernd:

$$\frac{J_p}{a} = \frac{b^2 h^2}{3\,(0{,}4\,b + 0{,}96\,h)}.$$

Digitized by Google

Bei prismatischen Körpern von demselben Materiale ist also kurz der Verdrehungswinkel proportional dem Verdrehungsmomente und der freien Länge des Stabes.

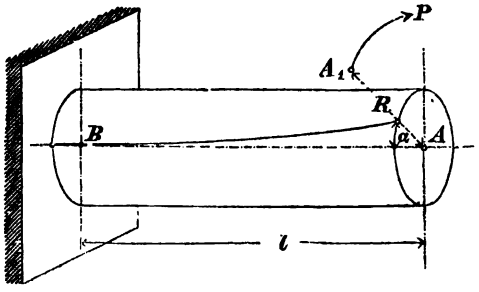


Fig. 109.

Für Gradmaaß ist:

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\alpha^0 = \frac{3{,}1416}{180}\alpha^0 = 0{,}01745\,\alpha^0.$$

Demnach: $$\alpha^0 = \frac{1}{0{,}01745}\cdot\frac{PR}{J_p G}l \ldots . \quad (37).$$

Beispiele.

1. Aufgabe. In nebenstehender Fig. 110 sei AB eine in zwei Lagern gestützte Welle (cylindrisch) von Schmiedeisen. Bei A ist eine Kurbel von der Länge $R = 500^{mm}$ (= Hebelarm der Kraft P) und bei B eine Rolle vom Halbmesser $\varrho = 100^{mm}$ aufgekeilt. An der letztern hängt eine Last $Q = 100^{k}$. Wie groß ist der Durchmesser der cylindrischen Welle?

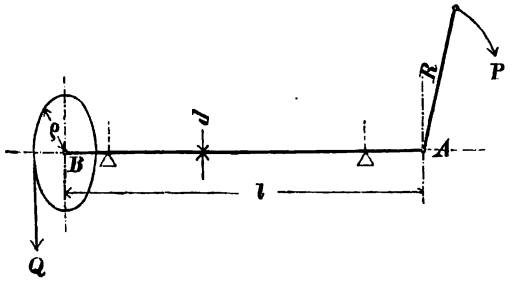


Fig. 110.

Auflösung. Wir haben hier zwei Momente zur Verfügung: $Q\varrho$ und PR. Aus der Mechanik wissen wir aber, daß im Gleichgewichtszustande (des Hebels) dieselben einander gleich sind. Es ist nämlich:

$$PR = Q\varrho \text{ und}$$

$$P = \frac{Q\varrho}{R} = \frac{100\,.\,100}{500} = 20^{k}.$$

Für die Berechnung der auf Torsion in Anspruch genommenen Wellen ist es demnach ganz gleich, ob man das Moment der Kraft (P) oder das der Last (Q) nimmt; beide sind:

$$PR = 20\,.\,500 = Q\varrho = 100\,.\,100 = 10000^{kmm}.$$

Es ist also mit Bezug auf die Formel (34):

$$M = 10000 = \frac{J_p}{s}\,\mathfrak{z}.$$

Digitized by Google

Das polare Trägheitsmoment J_p ist für Kreisquerschnitt — da hier $J_1 = J_2$ ist — gleich dem doppelten axialen Trägheitsmomente; also nach Fig. 78, Tab. II:

$$J_p = 2 \cdot \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{32} d^4 \text{ oder annähernd:}$$

$$J_p = 2 \cdot 0{,}05\, d^4 = 0{,}1\, d^4.$$

Die zulässige Torsionsbelastung wollen wir bei Schmiedeisen annehmen zu:

$$s = 2^k \text{ pro } \square^{mm}.$$

Wir erhalten:

$$M = \frac{J_p}{a} s = \frac{0{,}1\, d^4}{0{,}5\, d} s = 0{,}2\, d^3 s.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{0{,}2\ s}} = \sqrt[3]{\frac{10000}{0{,}4}} = \sqrt[3]{25000} = 29{,}24$$

$$d = 30^{mm}.$$

2. Aufgabe. Ein Balken von Eichenholz ist mit seinen beiden Enden in zwei feste Wände eingespannt, so daß eine Lager-Drehung desselben um seine Axe nicht stattfinden kann. In der Mitte zwischen A und B ist ein Stab normal durch den Balken gesteckt und in der Entfernung $R = 700^{mm}$ vom Balkenmittel eine Last $P = 20000^k$ angehängt. Wie groß ist der quadratische Querschnitt des Balkens zu machen, wenn dieser zwischen den Befestigungspunkten $l = 3^m$ mißt und eine merkliche Verdrehung nicht eintreten soll?

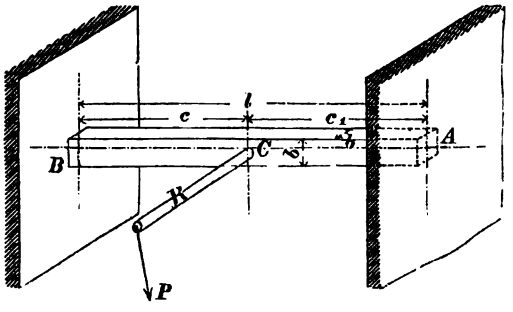


Fig. 111.

Auflösung. Für jede Hälfte $\left(\frac{l}{2}\right)$ des Balkens ist es hier offenbar dasselbe, als wenn dieselben einzeln ein Moment $\frac{P}{2} R$ zu tragen hätten.*)

In solchem Falle ist die Gleichgewichtsbedingung also:

$$M = PR = \frac{2 J_p}{a} s.$$

$J_p = J_1 + J_2$, und da nach Fig. 76a, Tab. II: $J_1 = J_2 = \frac{b^4}{12}$; also:

---

*) Läge der Punkt C nicht in der Mitte, so wäre dann entsprechend für die Theile $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ das Moment $M = PR \frac{c}{l}$ und $M = PR \frac{c_1}{l}$; darnach, wenn $c_1 < c$:

$$PR = \frac{J_p \cdot l}{a \cdot c}.$$

Dasselbe gilt, wenn die Gesammtkraft P, an gleichlangen Hebelarmen = R wirkend über die Länge l gleichmäßig vertheilt ist.

Digitized by Google

$$J_p = 2J_1 = \frac{2 \cdot b^4}{12} = \frac{b^4}{6}, \quad \frac{Jp}{a} = \frac{b^3}{3},$$

so ist: $PR = \frac{2}{3} b^3 s$ und demnach:

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{PR}{s}}.$$

Setzen wir für Eichenholz $s = 0{,}3^k$, so ist numerisch:

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20000 \cdot 700}{2 \cdot 0{,}3}} = \sqrt[3]{70000000}$$

$$b = 412^{mm}.$$

3. Aufgabe. Wie groß ist an der Elasticitätsgrenze a) die Kraft P und b) die Verdrehung eines 5^m langen gußeisernen Prisma's von kreisringförmigem Querschnitte, wenn dasselbe mit einem Ende festgehalten ist und am andern durch die zwei gleichen gleichgerichteten Momente PR (Fig. 112) auf Torsion in Anspruch genommen wird? Der Stab ist äußerlich 50^{mm} stark und hat 5^{mm} Wandstärke; $R = 500^{mm}$.

Auflösung a) Mit Bezug auf die Bezeichnung in unserer Fig. 112 ist vorliegend:

$$2PR = \frac{J_p}{a} s.$$

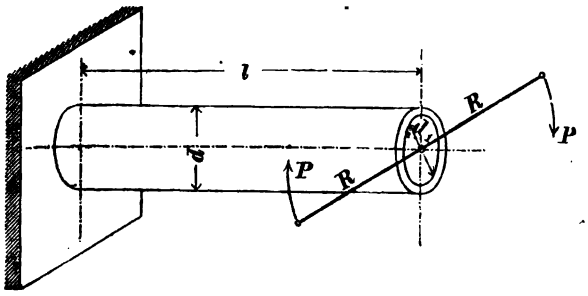


Fig. 112.

Für einen Kreisringquerschnitt mit dem äußeren Durchmesser $d = 50^{mm}$ und dem inneren $d_1 = 40^{mm}$ ist das polare Trägheitsmoment, da der Querschnitt durch zwei rechtwinklige Axen in 4 congruente Figuren zerlegt wird:

$$J_p = 2J = 2 \cdot 0{,}05 (d^4 - d_1{}^4); \quad a = \frac{d}{2}$$

$$\frac{J_p}{a} = 0{,}1 (d^4 - d_1{}^4) \frac{2}{d} = 0{,}2 \cdot \frac{d^4 - d_1{}^4}{d}.$$

Die Belastung an der Elasticitätsgrenze zu $s = 5^k$ pro $\square^{mm}$ angenommen, ist:

$$\frac{J_p}{a} s = 5 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{d^4 - d_1{}^4}{d} \text{ und demnach:}$$

$$2PR = \frac{d^4 - d_1{}^4}{d} \text{ und } P = \frac{1}{2R} \cdot \frac{d^4 - d_1{}^4}{d}.$$

Setzen wir die Zahlwerthe ein:

$$P = \frac{6250000 - 2560000}{2 \cdot 500 \cdot 50} = 73{,}8^k.$$

Digitized by Google

Auflösung b) Die Winkelgröße, um welche unter der Einwirkung der zwei gleichen und gleichgerichteten Momente (Kräftepaar = P . 2 R) der gußeiserne Hohlcylinder verdreht wird, ist nun allgemein:

$$\alpha^0 = \frac{2PR}{J_p G} \cdot l \cdot \frac{1}{0{,}01745'}, \text{ also numerisch:}$$

$$\alpha^0 = \frac{2 \,.\, 500 \,.\, 73{,}8 \,.\, 5000}{0{,}1\,(d^4 - d_1{}^4) \,.\, 3850 \,.\, 0{,}01745}$$

$$= \frac{5000000 \,.\, 73{,}8}{369000 \,.\, 3850 \,.\, 0{,}01745} = \frac{100}{6{,}71825}$$

$$\alpha^0 = 14^0 53'.$$

V. Zerknickungs- oder Strebefestigkeit.

Fig. 60b, pag. 6 macht diejenige Art der Inanspruchnahme anschaulich, welcher ein prismatischer Körper unterliegt, der zwar wie in Fig. 60a ebenfalls nur unter der Einwirkung einer Druckkraft steht, dessen Dimensionsverhältnisse selbst aber eine andere Art der Formänderung veranlassen. Während sich nämlich ein Prisma, dessen Länge nicht vielmal größer ist als die kleinste Querschnittsdimension, durch die Druckwirkung einfach in seiner Axe verkürzt, tritt bei verhältnißmäßig langen Stäben eine Durchbiegung ein, und man kann sich denken, daß die Materialfasern eines auf Zerknickung beanspruchten Stabes zugleich Druck- und Biegungsspannung erleiden.

Es läßt sich deshalb die Zerknickungs- oder Strebefestigkeit als eine zusammengesetzte Festigkeit erklären und die Ableitung einer Gleichgewichtsbedingung*) darauf gründen.

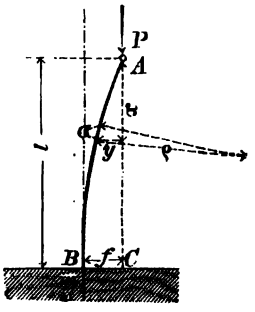


Fig. 113.

1) Der einfachste Weg, welcher bei Herleitung einer **Grundformel** für die Zerknickungsfestigkeit einzuschlagen ist, und welcher sowohl ein für die praktische Rechnung bequemes, als auch durch Versuche als genügend bestetigtes Resultat liefert, geht von der allgemeinen Formel für den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie eines gebogenen Stabes aus.

1) Es ist der Krümmungshalbmesser ϱ (Fig. 113) für ein Curvenelement σ des Stabes $\overline{AB}$ (nach pag. 48) allgemein:

$$\varrho = \frac{JE}{M}.$$

Das Biegungsmoment M (und damit die Biegungsform) kann nun zweierlei Art sein. Entweder bei Biegung, wo die Kraft normal zur ursprünglich geradlinigen Axe des Stabes gerichtet ist: $M = Px$ (pag. 44) oder bei Zerknickung, wo die Kraft dieselbe Richtung hat wie der Stab im normalen Zustande: $M = Py$.

Für unsern Fall ist also:

$$\varrho = \frac{JE}{Py},$$

*) So geschah es unter einer Voraussetzung bisher auch von zwei Autoren: Weisbach, „Lehrbuch der theoret. Mechanik" 1863, § 269 und Ritter, „Technische Mechanik".

Digitized by Google

und es bedeutet darin außerdem J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes, d. h. bei einem Querschnitte, welcher (wie z. B. das Rechteck Fig. 75ª u. 75ᵇ, Tab. II) in Bezug auf zwei rechtwinklige Axen verschiedene axiale Trägheitsmomente hat, das kleinere von beiden. E ist der Elasticitätsmodulus des Materiales und P die Kraft, welche in Richtung der Längenaxe den Stab auf Zerknickung beansprucht.

Aus dieser Formel ersieht man, daß die Biegung des Stabes an der Angriffsstelle A der Kraft P am geringsten ist, weil dort y = Null, also ϱ = unendlich, die Krümmung selbst also Null ist. Dagegen ist sie am stärksten an der Befestigungsstelle bei B, wo y (= f) seinen größten, ϱ seinen kleinsten Werth erhält. Diese Stelle ist also auch der gefährliche Querschnitt des Stabes.

Durch weitere Ausführung*) der Formel $\varrho = \frac{JE}{Py}$ ergiebt sich für die theoretische Tragkraft P eines nach Art der Fig. 113 auf Zerknickung beanspruchten Stabes von der Länge l zu:

$$P = \zeta \frac{JE}{l^2} \quad \ldots\ldots (38).$$

Hierin ist ζ ein constanter Factor, der für den vorliegenden Fall Fig. 113 die Größe

$$\zeta = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674 \sim = 2{,}5 \text{ hat. Es ist alsdann:}$$

$$P = 2{,}5 \frac{JE}{l^2} \quad \ldots\ldots (39).$$

In der Formel (38) ist die Pfeilhöhe f der Durchbiegung nicht enthalten, d. h. es ist die Tragkraft bei jeder Größe der Durchbiegung eines Stabes dieselbe oder dieselbe Kraft P hält bei jeder Größe der Durchbiegung den Faserspannungen das Gleichgewicht. Der Grund davon liegt in dem Umstande, daß mit zunehmender Durchbiegung f ebenso das Moment der Kraft P wächst und demnach die Zunahme der Widerstandsfähigkeit des Materiales bei größerer Durchbiegung dieselbe sein muß wie die Vergrößerung des Kraftmomentes.

Daraus geht aber ferner hervor, daß dieselbe Kraft, welche überhaupt eine Biegung zu bewirken fähig ist, den Stab auch bis zum Bruche belasten kann, und es ist somit P gleichzeitig die **theoretische Trag- und Bruchkraft.**

2) Im Fundamentalfalle Fig. 113 nahmen wir an, der Stab sei an einem Ende festgehalten (eingemauert oder flach aufliegend) und am anderen Ende stütze sich der die Kraft P übertragende Gegenstand drehbar (in einem Charnier oder Kugellager, mit einer gerundeten Fläche gegen eine ebene ꝛc.). Nehmen wir weiter an, beide Enden des Stabes (Fig. 114) stützen sich gerundet gegen ebene Flächen oder sind drehbar gelagert (Zugstangen für Pumpen, Dampfmaschinen ꝛc.), so biegt sich der Stab in der Mitte aus, und das eine Ende bewegt sich in Richtung der ursprünglichen Prismenaxe gegen das andere hin. Für die Theorie ist dies dasselbe, als ob wir den Fundamentalfall Fig. 113 zweimal hätten; die Biegung von AC und von BC in Fig. 114 ist dieselbe wie die von AB in Fig. 113.

*) Weisbach, „Lehrbuch der theoretischen Mechanik" § 265.

Anmerkung. Wiebe („Die Lehre von den einfachen Maschinentheilen", 1854 Bd. I, pag. 225) gelangt auf einem sehr elementaren Wege zu beinahe demselben Resultate.

Digitized by Google

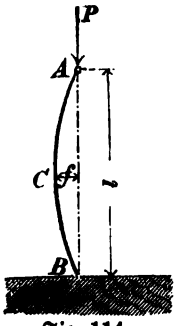


Fig. 114.

Um die Formel der Tragkraft für diesen zweiten Fall zu erhalten, brauchen wir daher nur in Formel (38) anstatt der Länge l eine solche $\frac{l}{2}$ einzuführen, und es ergiebt sich:

$$P = \zeta \frac{JE}{l^2} = 4\zeta \cdot \frac{JE}{l^2}$$

oder $\zeta = 2{,}5$ gesetzt:

$$P = 10 \cdot \frac{JE}{l^2} \ldots \quad (40).$$

3) Der 1. Fall Fig. 113 wiederholt sich viermal bei einem prismatischen Stabe (z. B. bei Kolbenstangen, Säulen), welcher an beiden Enden eingespannt (bezhtl. flach aufgelegt) ist, indem derselbe sich in der Mitte ausbiegt, nicht aber wie Fig. 114 nur nach einer Richtung, sondern nach zwei Richtungen gekrümmt ist, also zwei Null- oder Wendepunkte (bei D und E) bildet. Es ergiebt sich demnach die Tragkraft, wenn man in Formel (38) anstatt l einführt $\frac{l}{4}$.

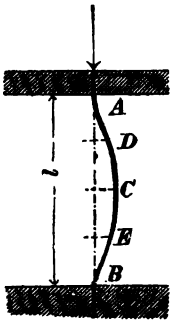


Fig. 115.

$$P = 40 \cdot \frac{JE}{l^2} \ldots . \quad (41^a).$$

Nach den praktischen Versuchen von Hodginson mit langen Säulen ist jedoch in diesem Falle die Trag- und Bruchkraft nur 12mal so groß als im 1., also richtiger:

$$P = 30 \cdot \frac{JE}{l^2} \ldots . \quad (41^b).$$

4) Fig. 116. Der Stab ist mit einem Ende eingemauert und das andere in Richtung der ursprünglichen Prismenaxe AB geführt.. Bei dieser Art Befestigung bekommen wir eine größte Durchbiegung bei C und einen Wendepunkt der Curve bei D, und es ist die Trag- und Bruchkraft alsdann 8-mal so groß als im Falle 1. Demnach:

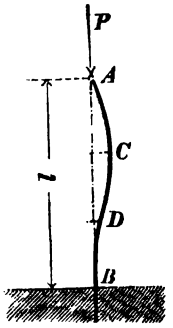


Fig. 116.

$$P = 20 \cdot \frac{JE}{l^2} \ldots . \quad (42).$$

In diesen Formeln ist P, wie bereits oben erwähnt wurde, gleichzeitig die theoretische Trag- und Bruchkraft, und da wir in der Anwendung auf die Praxis stets den ungünstigsten Fall voraussetzen müssen, so haben wir die Kraft P in Formel (38) bis (42) unbedingt als Bruchkraft für Zerknickungsfestigkeit zu betrachten.

Die **zulässige Tragkraft** (K) muß nun um ein Bedeutendes unter jener Bruchkraft angenommen werden, d. h. man rechnet als zulässige Tragkraft nur einen Bruchtheil jener Kraft P, man nimmt mit Bezug auf die Bruchbelastung eine für jedes Material besonders als genügend erprobte Sicherheit an. So empfiehlt sich die zulässige Tragkraft:

Digitized by Google

$$K = \frac{P}{\sigma} \ldots . \quad (43),$$

und für Holz . . . $\sigma = 6 \div 12$; im Mittel $\sigma = 10$
„ Gußeisen . $\sigma = 4 \div 7$; „ „ $\sigma = 6$
„ Stabeisen. } $\sigma = 4 \div 6$; „ „ $\sigma = 5$
„ Blech . . . }
„ Stahl . . . $\sigma = 4 \div 5$; „ „ $\sigma = 5$.

Für Pleulstangen (wegen der Einwirkung der „lebendigen Kraft"), sowie für Säulen mit unruhiger Belastung (in Fabriklokalen) ist die Sicherheit noch größer zu nehmen.

Grashof*) empfiehlt, für praktische Rechnungen die zulässige Tragkraft nach der empirischen Formel:

$$K = n \frac{P_d \cdot P_k}{P_d + P_k} \ldots . \quad (44)$$

zu bestimmen, und es fallen darnach in der That die Resultate für die am häufigsten vorkommenden Längen-Verhältnisse ziemlich günstig aus. Es bedeutet darin P_d (= FD') die Kraft, welche den fraglichen Stab zerdrücken würde, P_k die in den Formeln 38 bis 42 enthaltene Bruchkraft P für Zerknickungsfestigkeit und n einen Sicherheitscoefficient,

für Holz: $n = 0{,}12 \div 0{,}10$
„ Gußeisen: $n = 0{,}17$
„ Schmiedeisen: $n = 0{,}2$.

Da die Beanspruchung auf Zerknickungs- oder Strebefestigkeit als ein unter besonderen Verhältnissen (bei hervorragender Länge eines Stabes) auftretender Fall der Beanspruchung auf Druck oder rückwirkende Festigkeit zu betrachten ist, so liegt die Frage nahe: Wann, bei welcher Grenze treten diese besonderen Verhältnisse ein, d. h. bis zu welchem **Längenverhältnisse** des prismatischen Stabes darf derselbe auf Zerdrücken berechnet werden?

Dieses Längenverhältniß finden wir, indem wir die Werthe P_d und P_k einander gleichsetzen. Wir ermitteln also die Dimensionsverhältnisse, bei welchen beide Beanspruchungsweisen dieselbe Bruchkraft ergeben. Nach Formel (1) pag 17 und mit Rücksicht auf den Fall des Bruches (s = D', Tab. I, pag. 14 und 15) ist, wenn der Querschnitt des Stabes = F:

$$P_d = FD'.$$

Die Zerknickungsfestigkeit ist nach Formel (38) für den 1. Fall Fig. 113, und wenn $\zeta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$:

$$P_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{JE}{l^2}.$$

Beide Werthe einander gleichgesetzt:

$$FD' = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{JE}{l^2}$$

$$l^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{J}{F} \cdot \frac{E}{D'}$$

$$l = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{J}{F}} \sqrt{\frac{E}{D'}}$$

*) „Hütte", d. Ing.'s Taschenbuch 1869, pag. 231.

Digitized by Google

Nehmen wir beispielsweise an, der Querschnitt des Stabes sei ein „Kreis" vom Durchmesser d, so wird

$$\sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4},$$

$$l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{4} \cdot \sqrt{\frac{E}{D'}} = \frac{\pi}{8} d \sqrt{\frac{E}{D'}} = 0{,}4\, d \sqrt{\frac{E}{D'}}$$

und

$$\frac{l}{d} = 0{,}4 \sqrt{\frac{E}{D'}}.$$

Führen wir da die Werthe von E und D' aus Tab. I, pag. 14 u. 15 der Reihe nach für Holz, Gußeisen und Schmiedeisen ein, so erhalten wir:

für Holz das Längenverhältniß: $\frac{l}{d} = 6$,

„ Gußeisen „ „ $\frac{l}{d} = 5$,

„ Schmiedeisen „ „ $\frac{l}{d} = 12$.

Das heißt also: Ein massiv-cylindrischer Stab kann noch auf Druckfestigkeit berechnet werden, wenn die Länge desselben nicht größer ist als der

6-fache Durchmesser bei Holz,
5- „ „ „ Gußeisen,
12- „ „ „ Schmiedeisen.

In gleicher Weise läßt sich das Längenverhältniß für die übrigen drei Fälle der Zerknickungsfestigkeit und mit Rücksicht auf andere Querschnitte und Materiale entwickeln.

Allgemein ist das Längenverhältniß im vorliegenden Sinne der Quotient aus der Länge des Stabes durch die kleinste Querschnittsdimension.

Beispiele.

1. Aufgabe. Wie groß ist die Tragfähigkeit einer 3,4^{m} langen, 260^{mm} starken, massiv-cylindrischen Säule von Tannenholz?

Auflösung a) Wir betrachten diese Säule zuerst einmal als stumpf aufstehend und in Folge dessen unter den Fall 2) Fig. 114 gehörig, wie es z. B. wird geschehen müssen, wenn — wie bei Holz in den meisten Fällen — eine besonders große Auflage in Folge von umfangreichem Sockel und Capitäl nicht an der Säule vorhanden ist. Wir berechnen also zuerst die Tragkraft nach Formel (40):

$$P = 10 \cdot \frac{JE}{l^2}.$$

Der Querschnitt ist kreisförmig, also das Trägheitsmoment $J = 0{,}05\, d^4$. Der Elasticitätsmodulus für Tannenholz ist nach Tab. I (pag. 14 und 15) $E = 1100$, und wenn wir noch 10-fache Sicherheit gegen Bruch voraussetzen, also $\sigma = 10$ setzen, so erhalten wir die Tragkraft K nach Formel (43):

$$K = \frac{P}{10} = \frac{10 \cdot 0{,}05\, d^4 \cdot 1100}{11560000 \cdot 10}$$

$$K = \frac{228488000 \cdot 11}{115600} = 21742^{k}.$$

Digitized by Google

Auflösung b) Lassen wir alle Bestimmungen wie unter a), betrachten dafür aber die Säule als an beiden Enden eingemauert oder mit je einer größeren Fläche aufstehend, so haben wir nach Formel (41b) (Hodgkinson):

$$P = 30 \cdot \frac{J \cdot E}{l^2} \text{ und } K = 3 \cdot \frac{J \cdot E}{l^2}.$$

Es wird also dann die Tragkraft gerade 3 mal so groß sein als nach der ersten Berechnung, nämlich:

$$K = 65226^k.$$

Auflösung c) Endlich wollen wir auch untersuchen, wie sich das Resultat unter der Benutzung der empirischen Formel (44) gestaltet, wenn wir annehmen $n = 0{,}1$.

Die Bruchkraft für das Zerdrücken der Säule ist nach Formel (1) pag. 17:

$$P_d = FD' = 0{,}7854 \cdot \overline{260}^2 \cdot 5$$
$$P_d = 53093 \cdot 5 = 265465^k.$$

Die Bruchkraft für das Zerknicken der Säule nach Formel (40):

$$P_k = 217420^k.$$

$$K = 0{,}1 \frac{P_d \cdot P_k}{P_d + P_k},$$

demnach:
$$K = 01 \cdot \frac{265465 \cdot 217420}{265465 + 217420} = 0{,}1 \frac{57717410000}{482885}$$
$$K = 11952^k.$$

2. Aufgabe. Wie groß sind die Querschnitts-Dimensionen einer 5^m langen Flacheisenschiene, welche nach Art der Fig. 113 beansprucht ist und eine Last von 20 Ctr. $= 1000^k$ mit 5facher Sicherheit tragen soll, wenn außerdem das Verhältniß der beiden Rechteckseiten zu $\frac{1}{5}$ angenommen wird?

Auflösung. Es gilt hier die Formel (39):

$$P = 2{,}5 \frac{JE}{l^2}, \text{ und es ist } K = \frac{P}{5}.$$

Der Querschnitt ist ein Rechteck mit den Seiten b und h; wir haben nun bei Zerknickung das kleinere von beiden axialen Trägheitsmomenten dieses Querschnittes zu nehmen, da sich selbstverständlich der Stab in der Ebene der kleineren Seite durchbiegt. Es ist also im vorliegenden Falle, wenn $b < h$:

$$J = \frac{hb^3}{12} \text{ und } h = 5 \cdot b.$$

Für Schmiedeisen ist $E = 20000$; $l = 5000$.

$$K = \frac{P}{5} = \frac{2{,}5 \cdot hb^3 \cdot 20000}{5 \cdot 12 \cdot 25000000} = 1000 = \frac{2{,}5 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 12 \cdot 2500} \cdot b^4$$

$$b = \sqrt[4]{6000000} = 49{,}5 \sim = 50^{mm} \text{ und}$$
$$h = 247{,}5 \sim = 250.$$

Probe: $$K = \frac{2{,}5}{5} \cdot \frac{JE}{l^2} = \frac{2{,}5}{5} \cdot \frac{247{,}5 \cdot 121287{,}4}{12} \cdot \frac{20000}{25000000}$$

$$K = \frac{1}{2500} \cdot \frac{247{,}5 \cdot 121287{,}4}{12} = 1000^k.$$

Digitized by Google

3. Aufgabe. Welchen Durchmesser erhält die Kolbenstange von Rothguß zu einer direct wirkenden Wasserhaltungsmaschine mit Stoßsteuerung (Cameron), wenn der Durchmesser des Dampfkolbens $= 200^{mm}$ ist und auf jeden $\square^{cm}$ der Kolbenfläche ein Dampfdruck von 3^k erfolgt?

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe fehlt uns noch eine Bestimmung: die Länge der Kolbenstange. Wir brauchen hier aber nicht die ganze Länge derselben einzuführen, da bei der vorliegenden Construction dieselbe zwischen dem Dampf- und Pumpenkolben noch in zwei ziemlich nahe bei einander liegenden Stopfbüchen geführt wird. Wir müssen vielmehr nachsehen, bei welcher Kolbenstellung die Stange die unvortheilhafteste Inanspruchnahme erleidet. Das ist hier in den beiden Endstellungen, und da ist die „freie Länge" (diejenige, welche bei der Berechnung in Betracht kommt) etwa 10^{mm} größer als der Hub. Nehmen wir den letzteren nun zu 390^{mm} an, so ist die fragliche Länge $l = 400^{mm}$.

Die Befestigung der Kolbenstange an dem Dampf- und Pumpenkolben ist derart, daß wir sie als „eingemauert" ansehen und demnach den 2. Fall (Fig. 114) zu Grunde legen können.

Die Sicherheit nehmen wir hier $\sigma = 15$. Die Größe der inanspruchnehmenden Kraft aus dem Dampfdrucke ist:

$$K = 0{,}7854 \,.\, \overline{20}^{2} \,.\, 3 = 314{,}16 \,.\, 3 = 942{,}48^k \sim = 950^k.$$

Nun haben wir:

$$K = \frac{P}{15} = \frac{10}{15} \cdot \frac{0{,}05\, d^4 \,.\, 7000}{160000} = 950^k$$

und daraus:

$$d^4 = \frac{22800000}{35}$$

$$d = \sqrt{651428} = 28{,}4.$$

Nach Zug bei derselben Sicherheit:

$$P = \frac{FZ'}{15}$$

$$F = \frac{950}{1{,}7} = 560\ \square^{mm} \text{ oder}$$

$$d = 27^{mm}.$$

Digitized by Google

Zusammenstellung der Formeln aus der Festigkeitslehre mit Rücksicht auf die Querschnitte: Kreis, Quadrat und Rechteck und auf die Materiale: Holz, Gußeisen und Schmiedeisen.

I. Zug- und Druckfestigkeit.

[$P = Fs$ ... (1)]. Tabelle III.

Bei mittlerer Güte des Materials und ruhiger Belastung.

Querschnitt	Zu berechnende Größe	Holz = 1 k pro □mm		Gußeisen = 2,5		Schmiedeisen = 7	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Kreis	Tragkraft P	$0{,}8\,d^2$	$0{,}7\,d^2$	$1{,}9\,d^2$	$4{,}7\,d^2$	$5{,}5\,d^2$	$4{,}7\,d^2$
	Durchmesser d	$1{,}1\sqrt{P}$	$1{,}2\sqrt{P}$	$0{,}7\sqrt{P}$	$0{,}5\sqrt{P}$	$0{,}4\sqrt{P}$	$0{,}5\sqrt{P}$
Quadrat	Tragkraft P	$1{,}0\,b^2$	$0{,}9\,b^2$	$2{,}5\,b^2$	$6{,}0\,b^2$	$7{,}0\,b^2$	$6{,}0\,b^2$
	Quadratseite b	$1{,}0\sqrt{P}$	$1{,}1\sqrt{P}$	$0{,}6\sqrt{P}$	$0{,}4\sqrt{P}$	$0{,}4\sqrt{P}$	$0{,}4\sqrt{P}$
Rechteck	Tragkraft P	$1{,}0\,bh$	$0{,}9\,bh$	$2{,}5\,bh$	$6{,}0\,bh$	$7{,}0\,bh$	$6{,}0\,bh$
	Rechteckseite h	$1{,}0\frac{P}{b}$	$1{,}1\frac{P}{b}$	$0{,}4\frac{P}{b}$	$0{,}17\frac{P}{b}$	$0{,}14\frac{P}{b}$	$0{,}17\frac{P}{b}$

II. Schub- oder Scheerfestigkeit.

[$P = Fs$ .... (10)]. Tabelle IV.

Querschnitt	Zu berechnende Größe	Gußeisen = 2^k = pro □mm	Schmiedeisen = 5
Kreis	Tragkraft P	$1{,}57\,d^2$	$3{,}93\,d^2$
	Durchmesser d	$0{,}80\sqrt{P}$	$0{,}50\sqrt{P}$
Quadrat	Tragkraft P	$2{,}00\,b^2$	$5{,}00\,b^2$
	Quadratseite b	$0{,}70\sqrt{P}$	$0{,}45\sqrt{P}$
Rechteck	Tragkraft P	$2{,}00\,bh$	$5{,}00\,bh$
	Rechteckseite h	$0{,}50\frac{P}{b}$	$0{,}20\frac{P}{b}$

Digitized by Google

III. Biegungsfestigkeit.

A. Prismatische Körper.

a) Die Belastung ist im Angriffspunkte der Kraft vereinigt.

α) Der Stab ist mit einem Ende eingemauert und am freien Ende wirkt eine Normalkraft P.

$[Pl = M = qs \ldots (16)]$. Tabelle V.

Querschnitt	Zu berechnende Größe	Holz = 0,7 k pro □mm	Gußeisen = 2,5.	Schmiedeisen = 7.
Kreis	Tragkraft P	$0{,}07\,\frac{d^3}{l}$	$0{,}25\,\frac{d^3}{l}$	$0{,}7\,\frac{d^3}{l}$
	Durchmesser d	$2{,}42\sqrt[3]{Pl}$	$1{,}6\sqrt[3]{Pl}$	$1{,}13\sqrt[3]{Pl}$
Quadrat flach	Tragkraft P	$0{,}116\,\frac{b^3}{l}$	$0{,}416\,\frac{b^3}{l}$	$1{,}166\,\frac{b^3}{l}$
	Quadratseite b	$2{,}05\sqrt[3]{Pl}$	$1{,}34\sqrt[3]{Pl}$	$0{,}95\sqrt[3]{Pl}$
Rechteck h > b	Tragkraft P	$0{,}116\,\frac{bh^2}{l}$	$0{,}416\,\frac{bh^2}{l}$	$1{,}166\,\frac{bh^2}{l}$
	Rechteckseite h	$2{,}93\sqrt{\frac{Pl}{b}}$	$1{,}55\sqrt{\frac{Pl}{b}}$	$0{,}92\sqrt{\frac{Pl}{b}}$

Anmerkung b, α) Ist die Last P gleichmäßig über die freie Länge eines nach der Art α) befestigten Stabes vertheilt, so erhält man die betreffenden Werthe von P, indem man die entsprechenden der vorstehenden Tab. V. mit 2 multiplicirt und die Werthe von d, b und h, indem man die entsprechenden der obigen Tabelle mit $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}8$ und $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}71$ multiplicirt.

In dieser Weise lassen sich auch für andere Beanspruchungs- und Befestigungsweisen, deren Endformeln einfache Vielfache von dem Werthe Formel (16) darstellen, Coefficienten ermitteln, mit welchen die resp. Werthe der obigen Tabelle zu multipliciren sind. Die folgende Tabelle VI, in Verbindung mit der Tabelle V, liefert alsdann sofort die Tragkraft bezhtl. die Dimensionen von prismatischen Holz-, Guß- und Schmiedeisenstäben für die beigeschriebenen Arten der Biegungsbeanspruchung.

Digitized by Google

Tabelle VI.

Man multiplicirt die Größe	P	d	b	h	aus Tabelle V
mit	4	0,63	0,63	0,5	wenn der Stab in 2 Punkten gestützt ist und die Last in der Mitte vereinigt angreift (Formel 17ª, pag. 52).
mit	5,3	0,57	0,57	0,43	wenn der Stab einerseits eingemauert ist, das andere Ende auf einer Stütze ruht und in der Mitte zwischen beiden Punkten die Last vereinigt angreift (Fig. 89. Formel 17ᵇ, pag. 52).
mit	8	0,5	0,5	0,35	a) wenn der Stab mit beiden Enden eingemauert ist und die vereinigte Last in der Mitte trägt (Fig. 90. Formel 17ᶜ, pag. 52). b) wenn der Stab auf zwei Stützen ruht und eine über seine freie Länge gleichförmig vertheilte Last trägt (Fig. 93. Formel 19, pag. 57 u. 58). c) wenn der Stab einerseits eingemauert ist, das andere Ende auf einer Stütze ruht und die Last gleichförmig über seine Länge vertheilt ist.
mit	2	0,8	0,8	0,71	wenn der Stab mit einem Ende eingemauert ist und derselbe eine über seine freie Länge gleichmäßig vertheilte Last trägt (Fig. 92. Formel 18, pag. 55).
mit	12	0,44	0,44	0,29	wenn der Stab mit beiden Enden eingemauert ist und eine über seine freie Länge gleichmäßig vertheilte Last trägt.

IV. Torsionsfestigkeit.

$$[PR = M = \frac{J_p}{a}\,\mathfrak{s} \ldots (34)].$$ Tabelle VII.

Querschnitt	Polar. Querschnittsmodulus $\frac{J_p}{a}$	Zu berechnende Größe	Holz $= 0{,}5^k$ pro □mm	Gußeisen $= 2^k$	Schmiedeisen $= 5^k$
Kreis	$\frac{\pi}{16}d^3 = 0{,}196\,d^3$	Torsionsmoment M	$0{,}1\,d^3$	$0{,}4\,d^3$	d^3
		Durchmesser d	$2{,}17\sqrt[3]{PR}$	$1{,}37\sqrt[3]{PR}$	$\sqrt[3]{PR}$
Quadrat	$\frac{b^3}{3\sqrt{2}} = 0{,}236\,b^3$	Torsionsmoment M	$0{,}12\,b^3$	$0{,}47\,b^3$	$1{,}18\,b^3$
		Quadratseite b	$2{,}04\sqrt[3]{PR}$	$1{,}28\sqrt[3]{PR}$	$0{,}95\sqrt[3]{PR}$

Digitized by Google

V. Zerknickungsfestigkeit.

$$P = \zeta \frac{JE}{l^2} \ldots\ldots\ldots (38)].$$ Tabelle VIII.

Anmerkung. Folgende Tabelle enthält die Coefficienten „C" zur Berechnung der „Bruchbelastung" P der auf Zerknickung in Anspruch genommenen Stäbe mit Kreis- (Kreisring-), Quadrat- und Rechteck-Querschnitt aus Holz, Guß- und Schmiedeisen nach den im Vorstehenden sowie in der 3. Rubrik der Tabelle angeführten Formeln.

Für die „zulässige Belastung" K sind die Sicherheitscoefficienten σ (pag. 79) in Rechnung zu bringen.

Es gelten in folgender Tabelle besonders: als Maßeinheit L in ^{m}; d, D, b, h in ^{mm}; als Gewichtseinheit P in ^{k}.

Tabelle VIII.

Befestigungs- und Angriffsweise	Figur	Allgemeine Formel $P =$	Material	Kreis $\left[P = C\frac{D^4 - d^4}{L^2}\right]$ $P = C\frac{d^4}{L^2}$ C =	Kreis $d = C\sqrt[4]{PL^2}$ C =	Quadrat $P = C\frac{b^4}{L^2}$ C =	Quadrat $P = C\sqrt[4]{PL^2}$ C =	Rechteck $h < b$ $P = C\frac{bh^3}{L^2}$ C =	Rechteck $h < b$ $h = C\sqrt[3]{\frac{PL^2}{b}}$ C =	Der Stab ist auf Druckfestigkeit zu berechnen, wenn: bei Kreisquerschnitt l kleiner als:	Der Stab ist auf Druckfestigkeit zu berechnen, wenn: bei Quadrat- und Rechteckquerschnitten l kleiner als:
Ein Ende festgeklemmt (resp. mit großer Endfläche normal gestützt), das andere frei abgerundet oder in Charnier drehbar.	113	$2{,}5\frac{JE}{l^2}$	Holz	0,0001375	9,234	0,00023	8,12	0,00023	16,321	6 d	8 h
			Gußeisen	0,00125	5,318	0,00208	4,682	0,00208	7,834	5 d	6 h
			Schmiedeisen	0,0025	4,472	0,00417	3,935	0,00417	6,212	12 d	14 h
Beide Enden abgerundet (oder in Charnier drehbar), frei aufstehend und in der Stabaxe geführt.	114	$10\frac{JE}{l^2}$	Holz	0,00055	6,464	0,00092	5,684	0,00092	10,282	12 d	14 h
			Gußeisen	0,005	3,723	0,00832	3,277	0,00832	4,935	10 d	12 h
			Schmiedeisen	0,01	3,130	0,01668	2,754	0,01668	3,914	24 d	28 h
Beide Enden festgeklemmt (oder m. großer Endfläche normal frei aufstehend) und in der Stabaxe geführt.	115	$30\frac{JE}{l^2}$	Holz	0,00165	4,986	0,00276	4,385	0,00276	7,132	23 d	27 h
			Gußeisen	0,015	2,872	0,02496	2,528	0,02496	3,424	20 d	23 h
			Schmiedeisen	0,03	2,415	0,05004	2,125	0,05004	2,715	48 d	56 h
Ein Ende festgeklemmt, das andre frei aufstehend in der Stabaxe geführt.	116	$20\frac{JE}{l^2}$	Holz	0,0011	5,540	0,00184	4,872	0,00184	8,161	16 d	19 h
			Gußeisen	0,01	3,191	0,01664	2,809	0,01664	3,917	14 d	16 h
			Schmiedeisen	0,02	2,683	0,03336	2,361	0,03336	3,106	33 d	38 h

Digitized by Google

Anmerkung. Für diejenigen unserer Leser, denen die griechischen Buchstaben und Schriftzeichen unbekannt sein sollten, fügen wir das griechische Alphabet hier bei, geben dazu die betreffende Aussprache und stellen diejenigen deutschen Buchstaben daneben, welche den griechischen bezüglich der Bedeutung gleichstehen.

Griechische Buchstaben		Sprich:	Gleichbedeutend mit dem Buchstaben
große	kleine		
Α	α	Alpha	a
Β	β	Bēta	b
Γ	γ	Gamma	g
Δ	δ	Delta	d
Ε	ε	Epsīlon	ĕ
Ζ	ζ	Zēta	ds
Η	η	Eta	ē
Θ	ϑ	Thēta	th
Ι	ι	Jōta	i
Κ	κ	Kappa	k
Λ	λ	Lambda	l
Μ	μ	Mī	m
Ν	ν	Nī	n
Ξ	ξ	Xī	x
Ο	ο	Omīkron	ŏ
Π	π	Pī	p
Ρ	ϱ	Rhō	r
Σ	σ	Sigma	s
Τ	τ	Tau	t
Υ	υ	Ypsīlon	ü
Φ	φ	Phī	ph
Χ	χ	Chī	ch
Ψ	ψ	Psī	ps
Ω	ω	Omĕga	ō

Digitized by Google

VI. Zapfen, Axen und Wellen.

Einleitung.

Zu Anfang des IV. Kapitels (pag. 283 Bd. I) gaben wir eine Betrachtung über das Verhältniß der Maschinentheile in ihrer gegenseitigen Anordnung und Wirkungsweise als verbindende Maschinentheile im weiteren Sinne und gelangten insbesondere bei den Verbindungen mit relativer Bewegung zu den zwei wesentlich verschiedenen Gattungen: active und passive*) Maschinentheile (pag. 284) und sagten: Diese, die sogenannten stützenden Organe befinden sich im Allgemeinen in relativer Ruhe, während sich die activen, thätigen Organe in Bezug auf die stützenden bewegen.

Zu den bewegten Maschinentheilen gehören nun in erster Reihe die Zapfen, Axen und Wellen, und wir nehmen dieselben deshalb sofort zusammen, weil sie hinsichtlich ihrer Form, Anordnung und Wirkungsweise, sowie hinsichtlich ihrer Beanspruchung viel Aehnlichkeit mit einander haben.

Pag. 285 Bd. I erläuterten wir weiter den Unterschied der obengenannten Theile und bemerkten, daß die **Zapfen** meistens in Verbindung mit Axen oder Wellen vorkommen und an diesen Organen diejenigen Theile bilden, welche direct von dem Stützungsorgane getragen werden. Ueberdies können aber die Zapfen auch selbstständig in Verbindungen mit anderen Organen als den Axen und Wellen auftreten. In jedem Falle vermitteln sie eine drehende oder schwingende Bewegung von Maschinentheilen um eine feste geometrische Axe. Die **Axen** hingegen sind drehende resp. schwingende Träger von Maschinentheilen und die **Wellen** übertragen drehend oder schwingend eine mechanische Arbeit von einem Punkte der Maschine (Orte der Anlage) nach einem anderen und können zugleich — in den **gemischten Wellen** (pag. 286) — das Princip der Axen in sich tragen. Axen und Wellen sind, damit sie eine drehende oder schwingende Bewegung um eine feste geometrische Axe machen können, stets mit Zapfen versehen.

1. Zapfen.

Ueber die Form der Zapfen und ihre Bildung als Rotationskörper führten wir das Weitere ebenfalls zu Anfang des IV. Capitels (pag. 286 ÷ 289) aus, erwogen ferner die Bedingungen, welche die Größe (pag. 290) resp. das Verhältniß der Länge zum Durchmesser (pag. 316 ÷ 320) bestimmen und

*) Auf pag. 284 Bd. I im letzten Abschnitte unten muß es heißen:
„Bei dieser Art Verbindungen stellen sich unserer Betrachtung weiter zwei wesentlich „verschiedene Gruppen von Maschinentheilen entgegen: die einen tragen, die anderen „übertragen. Daher nennt man die letzteren nicht mit Unrecht active (thätige) Maschinen„theile — (Hals-) Zapfen, Wellen ꝛc. — weil sie selbst . . . . ."
und dann muß es auf pag. 285 Zeile 8 von oben heißen:
„active Maschinentheile sind z. B. Torsions-Zapfen, Wellen . . . . . ."

Digitized by Google

erwähnten schließlich die Eintheilung der Zapfen in Trag- und Spurzapfen (pag. 291 und 292 Bd. I), welche sich auf die Art der Inanspruchnahme durch die Belastung gründet.

Es bleibt für die Folge nur noch übrig die Berechnung der Zapfen,

Construction und Verhältnisse. In Bezug auf Letzteres ist nur zu bemerken, daß, wenn die Lagerstelle eingedreht werden muß — was übrigens aus Billigkeitsrücksichten möglichst zu vermeiden ist und öfters durch Stellringe ersetzt wird — man dies auf ein Minimum beschränkt und, wo nicht bedeutende Reaktion in Richtung des Zapfens besteht, macht man die Schulterhöhe s (Fig. 117):

$$s = 2{,}5 + 0{,}5\,d \ldots\ldots (1).$$

Dann wird der Durchmesser der Schulter oder des Anlaufes:

$$d_1 = 5 + 1{,}1\,d \ldots\ldots (2).$$

Dasselbe gilt für Spurzapfen.

Die Verhältnisse der Ringzapfen siehe Bd. I, pag. 419.

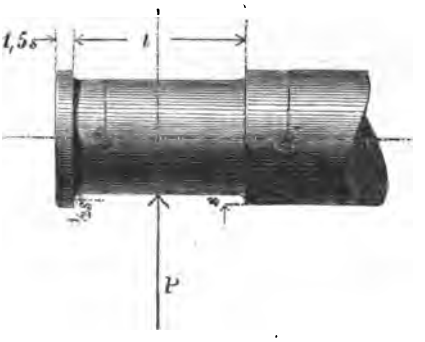


Fig. 117.

Berechnung der Zapfen.

Wir müssen zuerst entscheiden, welcher Art der Zapfen beansprucht sein soll, damit wir wissen, welche Grundsätze und Regeln anzuwenden sind.

Es würde sich hiernach mit Bezug auf pag. 290 Bd. I. also fragen, ob wir Trag- oder Spurzapfen haben oder ob der Zapfen auf Torsion in Anspruch genommen ist.

A. Stirnzapfen.

Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir hier von den Tragzapfen nur die Form der beistehenden Fig. 117 (resp. 39a und b pag. 289, Bd. I) zu Grunde legen und dieselben, weil wir sie uns am Ende einer Axe ꝛc. denken, als End- oder Stirnzapfen bezeichnen. Die Stirnzapfen werden als Tragzapfen (Fig. 44, pag. 291) auf Biegung berechnet, und es erstreckt sich die Dimensionsberechnung derselben auf den Durchmesser eines normal zur Längenaxe belasteten Cylinders.

Als Biegungsmoment betrachtet man im vorliegenden Falle die Resultirende P aus den über die Länge l der Auflage gleich vertheilten, gleich großen Normalpressungen p, welche in der Mitte der Zapfenlänge angreift, mit dem Hebelarm $\frac{l}{2}$, also:

$$M = P\frac{l}{2}.^{*)}$$

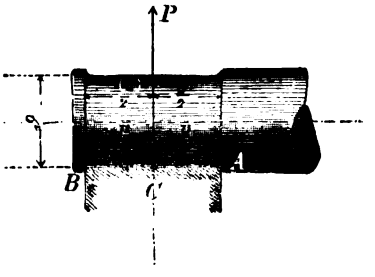


Fig. 118.

*) Sollte infolge schlechter Montirung oder mit der Zeit eintretender Senkungen der Zapfen nur am Rande A (Fig. 118) aufliegen, so würde derselbe auf Abscheeren (in diesem

Digitized by Google

Der vorliegende Fall ist derselbe wie der in der „Festigkeit der Maschinentheile" unter „Biegungsfestigkeit" (A, b, α) pag. 55 behandelte, sofern wir uns den Reactionsdruck P des Zapfens als eine über die Länge l des Zapfens gleichmäßig vertheilte Belastung vorstellen. Die Grundformel für diese Art der Inanspruchnahme heißt entsprechend Formel (18):

$$Pl = 2qs.$$

Von hier ab specialisiren wir die Ableitung weiter dahin, daß wir zuerst die bedeutend wichtigere Art der massiven Zapfen der Betrachtung unterstellen und im Anschlusse daran das Beispiel eines hohlen Zapfens durchnehmen.

1) Der Zapfenquerschnitt ist ein (voller) Kreis.

In diesem Falle gilt für den Querschnittsmodulus q nach Tab. II, Fig. 78:

$$q = \frac{\pi}{32} b^3.$$

Demnach ist:

$$Pl = 2 \cdot \frac{\pi}{32} b^3 s.$$

Hieraus erhalten wir zunächst die Tragfähigkeit P des Zapfens:

$$P = 0{,}196\, b^2 \left(\frac{b}{l}\right) s \quad \ldots \text{(I)}.$$

und den Durchmesser desselben:

$$b = 2{,}26 \sqrt{\left(\frac{l}{b}\right) \frac{P}{s}} \quad \ldots \text{(II)}.$$

Das Längenverhältniß $\left(\frac{l}{b}\right)$ bestimmen wir einestheils nach dem specifischen Flächendrucke p_0 (pro Einheit der Druckfläche), anderntheils nach der Abnutzung, indem wir die Anzahl (n) Umdrehungen pro Minute einführen.

Die neueren Arbeiten über die Reibung geölter Flächen*) haben ergeben, daß mit Rücksicht auf den specifischen Flächendruck zu setzen ist:

$$\frac{l}{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{p_0}} \quad \ldots \text{(III)}$$

und mit Rücksicht auf die Abnutzung:

$$\frac{l}{b} = \alpha \sqrt{s\, n} \quad \ldots \text{(IV)}.$$

Darin bedeutet α einen die Behandlungsweise des Zapfens charakterisirenden Coefficienten. Diese beiden Gleichungen geben vereinigt für ein und dasselbe Verhältniß $\left(\frac{l}{b}\right)$ einen Werth von n, den wir mit n_0 = „mittlere Umdrehungszahl" bezeichnen wollen. Es ist:

$$n_0 = \frac{1}{4\, p_0\, \alpha^2} \quad \ldots \text{(V)}.$$

Führen wir nun den Werth (III) in Formel (II) ein, so erhalten wir:

Falle also geringer) beansprucht werden. Wenn dagegen der äußere Rand B allein aufliegt, so ist das Biegungs-Moment M = Pl, also doppelt so groß als in obiger Annahme. Die Gefahr eines Bruches in diesem Falle wird jedoch durch Einführung größerer Sicherheit in der Wahl der zulässigen Belastung gehoben.

*) Reuleaux, Constr. 1869, pag. 191.

Digitized by Google

$$b = 2{,}26\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{p_0}}\cdot\sqrt{\frac{P}{s}}} = 1{,}6\sqrt{\sqrt{\frac{s}{p_0}\cdot\frac{P}{s}}}.$$

$$b = 1{,}6\sqrt{\frac{P}{\sqrt{p_0 s}}} \quad \ldots\ (\text{VI}),$$

und setzen wir Formel (IV) in Formel (II) ein, so ist:

$$b = 2{,}26\sqrt{\alpha\sqrt{sn}}\sqrt{\frac{P}{s}}.$$

$$b = 2{,}26\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\frac{n}{s}}\sqrt{P} \quad \ldots\ (\text{VII}).$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich nun specielle Werthe für die Dimensionen von Zapfen aus verschiedenen Materialien, in verschiedenen Lagermaterialien laufend und für verschiedene Umdrehungsgeschwindigkeiten ableiten.

Der Zapfen dreht sich ununterbrochen.

a) Zapfenmaterial: **Schmiedeisen**; Lagerung: **Bronze** oder eine andere Legirung.

Für die zulässige Belastung pro □mm des Zapfenquerschnittes haben wir dann nach Tab. I, pag. 14 und 15 zu setzen: $s = D = 6^k$ und für den specif. Flächendruck ist $p_0 = 0{,}66$; $\alpha = 0{,}05$. Alsdann ist nach Formel (V) die mittlere Umdrehungszahl:

$$n_0 = \frac{1}{4 p_0 \alpha^2} = \frac{1}{4 \,.\, 0{,}66 \,.\, 0{,}0025}$$

$$n_0 = 150.$$

Ist nun $n < n_0$, also:

α) $n < 150$,

so ergiebt Formel (VI) unter den obigen Voraussetzungen:

$$b = 1{,}6\sqrt{\frac{P}{\sqrt{p_0 s}}} = 1{,}6\sqrt{\frac{P}{\sqrt{0{,}66 \,.\, 6}}} = 1{,}6\sqrt{\frac{P}{\sqrt{4}}}$$

$$b = 1{,}6\frac{\sqrt{P}}{\sqrt[4]{4}} = 1{,}6 \,.\, 0{,}707\sqrt{P}$$

$$b = 1{,}13\sqrt{P} \quad \ldots\ (3).$$

Formel (III) ergiebt:

$$\frac{l}{b} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{p_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{0{,}66}} = \frac{1}{2}\sqrt{9}$$

β) $n > 150$.

Für Zapfen, welche mehr als 150 Umdrehungen in der Minute machen, liefern die Formeln (VII) und (IV) folgende Werthe:

$$b = 2{,}26\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\frac{n}{s}}\cdot\sqrt{P} = 2{,}26\sqrt{0{,}05}\sqrt[4]{\frac{n}{6}}\sqrt{P}$$

$$b = 2{,}26 \,.\, 0{,}224 \,.\, 0{,}64\sqrt[4]{n}\sqrt{P}$$

$$b = 0{,}32\sqrt[4]{n}\sqrt{P} \quad \ldots\ (5).$$

$$\frac{l}{b} = \alpha\sqrt{sn} = 0{,}05 \,.\, 2{,}449\sqrt{n}$$

$$l = 0{,}12\, b\sqrt{n} \quad \ldots\ldots\ (6).$$

Digitized by Google

b) Zapfenmaterial: **Gußstahl**; Lagerung: **Bronze.**

$$s = 10^k \text{ pro } \square^{mm};\ p_0 = 0{,}8;\ \alpha = 0{,}045.$$

Die mittlere Umdrehungszahl ist:

$$n_0 = \frac{1}{4 p_0 \alpha^2} = \frac{1}{4 \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}002025} = 150.$$

α) $n < 150$.

Der Durchmesser des gußstählernen Zapfens nach Formel (VI):

$$d = 0{,}95 \sqrt{P} \quad \ldots \quad (7),$$

die Länge desselben:

$$l = 1{,}75\, d \quad \ldots \quad (8).$$

β) $n > 150$.

$$d = 0{,}28 \sqrt[4]{n} \sqrt{P} \quad \ldots \quad (9)$$

$$l = 0{,}15\, d \sqrt{n} \quad \ldots \quad (10).$$

Anmerkung. Unter einem gleichwerthigen Stirnzapfen versteht man einen solchen, welcher auf dieselbe Weise beansprucht ist, der also dieselbe Tragfähigkeit besitzt wie ein anderer, der aber aus einem anderen Materiale besteht oder andere Querschnittsform hat.

So wird z. B. nach den bis jetzt erhaltenen Resultaten der Durchmesser (d) eines Gußstahlzapfens, bezogen auf den Durchmesser (d_0) eines gleichwerthigen Schmiedeisen-Zapfens erhalten, wenn man bei $n < 150$ die Gleichungen (7) und (8) durch einander dividirt:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{0{,}95 \sqrt{P}}{1{,}13 \sqrt{P}} = \frac{0{,}95}{1{,}13}$$

$$d = 0{,}84\, d_0.$$

Hat man also für den Zapfendruck P den Durchmesser d_0 eines schmiedeisernen Stirnzapfens berechnet, so findet man den Durchmesser d eines solchen Zapfens aus Gußstahl für dieselbe Belastung P, indem man den ersteren (d_0) mit 0,84 multiplicirt. — Es ist für die Beurtheilung und die Calculation von Wichtigkeit, daß man sich derartige Verhältnisse vergegenwärtigt.

c) Zapfenmaterial: **Gußeisen**; Lagerung: **Bronze.**

$s = 3^k$ pro $\square^{mm}$; $p_0 = 0{,}44$; $\alpha = 0{,}05$. Daraus ergiebt sich rund:

$$n_0 = 200.$$

α) $n < 200$

$$d = 1{,}5 \sqrt{P} \quad \ldots \quad (11)$$

$$l = 1{,}3\, d \quad \ldots \quad (12).$$

d) Zapfenmaterial: **Schmiedeisen**; Lagerung*): **Gußeisen.**

$$s = 6^k \text{ pro } \square^{mm};\ p_0 = 0{,}5$$

$$d = 1{,}2 \sqrt{P} \quad \ldots \quad (13)$$

$$l = 1{,}75\, d \quad \ldots \quad (14).$$

Der Zapfen dreht sich nur zeitweis, langsam oder stoßweis.

Für solche Verhältnisse ist nur die Festigkeit maßgebend, und man erhält demnach aus Formel (II) pag. 90 für:

a) Zapfen von Schmiedeisen:

$$s = 7{,}5^k \text{ pro } \square^{mm};\ p_0 = 0{,}66 \text{ -:- } 0{,}83,$$

α) wenn $l = d$:

$$d = 0{,}82 \sqrt{P} \quad \ldots \quad (15);$$

*) Lagerung bedeutet das Material, in welchem der Zapfen läuft.

Digitized by Google

β) wenn $l = 0{,}7\,d$:

$$d = 0{,}7\sqrt{P} \ldots . \quad (16).$$

b) Zapfen von Gußeisen:

$$s = 3{,}75^k \text{ pro } \square^{mm};\ p_0 = 0{,}55.$$

α) wenn $l = d$:

$$d = 1{,}16\sqrt{P} \ldots \ldots . \quad (17);$$

β) wenn $l = 0{,}7\,d$:

$$d = \sqrt{P} \ldots \ldots . \quad (18).$$

2) Der Zapfenquerschnitt ist ein **Kreisring.**

Wir gelangen zu den bequemsten Formeln für die Dimensionen hohler Stirnzapfen, wenn wir Durchmesser und Länge des gleichwerthig-massiven Stirnzapfens (welcher aber aus demselben Materiale besteht wie der verlangte hohle und dieselbe Art und Intensität der Inanspruchnahme erleidet) als bekannt voraussetzen und ein Verhältniß zwischen den beiderseitigen Ausdrücken herstellen.

Entsprechend der beistehenden Fig. 119 sei:

D = äußerer Durchmesser,
L = Länge des hohlen Stirnzapfens,
d = innerer Durchmesser desselben;
d_0 = Durchmesser,
l_0 = Länge des gleichwerthig-massiven Stirnzapfens (berechnet nach einer der Formeln 3 ÷ 18).

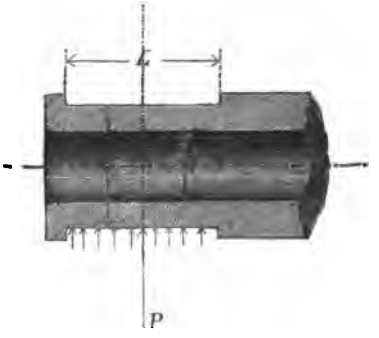


Fig. 119.

Alsdann ist unter der Voraussetzung einer gleichmäßig über die Länge L des Zapfens vertheilten Belastung P die allgemeine Formel entsprechend der Biegungsfestigkeit nach Formel (18) pag. 55:

$$PL = 2 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \cdot s$$

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{DL} \cdot s.$$

Das giebt vereinfacht, indem wir den zweiten Bruch trennen, den Subtrahend mit D^4 multipliciren und dividiren und $\frac{D^4}{DL}$ als gemeinschaftlichen Factor ausziehen:

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4}{DL}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) s.$$

Zum Zwecke der Abkürzung sei: $\frac{d}{D} = \beta$ gesetzt. Dann ist die Tragfähigkeit des hohlen Stirnzapfens:

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4}{D \,.\, L} (1 - \beta^4)\, s \ldots \text{(I)}.$$

Die Tragfähigkeit des gleichwerthig-massiven Stirnzapfens, unter denselben Bedingungen und auf dieselbe Weise entwickelt, ist:

$$Pl_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{32} d_0{}^3 s$$

oder:

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_0{}^3}{l_0} \ldots . \quad \text{(II)}.$$

Digitized by Google

(I) und (II) einander gleichgesetzt, giebt:

$$\frac{d_0^3}{l_0} = \frac{D^4}{DL}(1-\beta^4)$$

und:

$$\frac{D^4}{DL} = \frac{d_0^3}{l_0} \cdot \frac{1}{1-\beta^4} \quad \ldots \text{(III)}.$$

Aus dieser allgemeinen Beziehung zwischen den Dimensionen eines massiven und eines gleichbeanspruchten hohlen Stirnzapfens von demselben Materiale erhält man weitere Formeln für dieses Verhältniß, indem man noch die eine oder andere Bedingung bezüglich der Länge des Zapfens beifügt. Setzen wir:

1) $\frac{D}{L} = \frac{d_0}{l_0}$, d. h. **der hohle Zapfen hat dasselbe Längenverhältniß wie der gleichwerthig-massive**; dann wird Formel (III) lauten für Durchmesser und Länge:

$$\frac{D}{d_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}} = \frac{L}{l_0} \quad \ldots \text{(19)}.$$

2) $L = l_0$, d. h. **der hohle Zapfen hat dieselbe Länge wie der gleichwerthig-massive**; so ist:

$$\frac{D}{d_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\beta^4}} \quad \ldots \text{(20)}$$

und

$$L = l_0 \quad \ldots \text{(20a)}.$$

3) $DL = d_0 l_0$, d. h. die Projection ($\parallel$ zur Axe) der Zapfenfläche ist dem Inhalte nach bei beiden Zapfen dieselbe oder **der spec. Flächendruck habe bei beiden Zapfen dieselbe Größe**; so ist nach Formel (III) für den Durchmesser:

$$\frac{D}{d_0} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\beta^4}} \quad \ldots \text{(21)}$$

und für die Länge:

$$\frac{L}{l^0} = \sqrt[4]{1-\beta^4} \quad \ldots \text{(21a)}.$$

Diese Formeln liefern für verschiedene Werthe von β, d. h. für verschiedene Wandstärken des hohlen Zapfens die Verhältnisse der folgenden Tabelle IX.

Tabelle IX.

Bedingung	$\beta =$	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	0,3	0,0
1) $\frac{D}{L} = \frac{d_0}{l_0}$	$\left.\begin{matrix}\frac{D}{d_0}\\ \frac{L}{l_0}\end{matrix}\right\} =$	1,3	1,2	1,15	1,07	1,03	1,004	1,0
2) $L = l_0$	$\frac{D}{d_0} =$	1,19	1,13	1,10	1,05	1,02	1,003	1,0
3) $DL = d_0 l_0$	$\frac{D}{d_0} =$	1,15	1,10	1,07	1,04	1,02	1,002	1,0
	$\frac{L}{l_0} =$	0,85	0,90	0,93	0,96	0,98	0,998	1,0

Digitized by Google

Noch ist zu bemerken, daß die hohlen Zapfen fast ausschließlich in Gußeisen auftreten und meistens bei Wasserradaxen und Förderkorbwellen vorkommen.

Die besten Dimensionen liefert dann gewöhnlich das Verhältniß $\beta = 0{,}6$ mit der Bedingung 2) $L = l_0$.

Die Wandstärke $\delta = \frac{D - d}{2}$

soll aber dann die Grenzen

$$40^{mm} > \delta > 10^{mm}$$

nicht überschreiten.

Pag. 289 d. I. Bd. sind außer der cylindrischen noch andere Formen für Stirnzapfen aufgeführt, deren Berechnung unter Zugrundelegung der vorstehenden Methoden leicht auszuführen.

Für Halszapfen (zu denen wir hier auch die Ringzapfen rechnen können) macht sich jetzt eine besondere Berechnung deshalb unnöthig, weil sie fast ausschließlich bei Torsionswellen vorkommen und auch gewöhnlich nicht durch Eindrehen oder Aufschweißen von Bundringen besonders markirt werden.

Es fällt also im Allgemeinen die Berechnung der Halszapfen mit der Berechnung der Torsionswelle zusammen.

B. Gabelzapfen

nennt man jene kurzen, meist schmiedeisernen oder stählernen cylindrischen Wellenstücke, welche mit beiden Enden in eine feste Wand — Backen oder Gabel — eingeschlossen sind und innerhalb ihrer freien Länge (zwischen den Backen) vermittelst eines Zugstangenkopfes (mit schwingender Bewegung) durch eine gleichförmig vertheilte Last auf Biegung in Anspruch genommen sind.

Mit Einführung der in nebenstehender Fig. 120 enthaltenen Bezeichnung, worin P die Resultirende der parallelen Einzeldrücke bedeutet und unter Zugrundelegung der allgemeinen Formel (19) pag. 58 ist die Tragfähigkeit eines solchen Gabel-Zapfens:

$$P = \frac{\pi}{4} \frac{d^3}{l} s \quad \ldots \quad (I).$$

Beziehen wir uns wieder wie im vorhergehenden Beispiele auf den gleichwerthigen Stirnzapfen mit den Dimensionen d_0 und l_0, so haben wir ferner:

$$P = \frac{\pi}{16} \frac{d_0^3}{l_0} s \quad \ldots \quad (II)$$

und erhalten aus der Gleichsetzung von (I) und (II) die Grundformel:

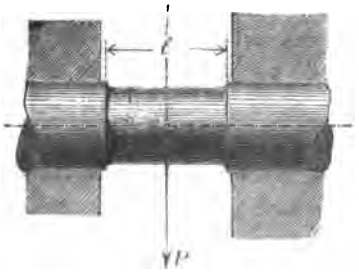


Fig. 120.

$$\frac{d^3}{d_0^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{l_0} \quad \ldots \quad (III).$$

Ist nun die Länge l vorgeschrieben oder für einen speciellen Fall beliebig anzunehmen, so berechnet sich hiernach der Durchmesser des Gabelzapfens zu:

$$d = d_0 \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{\frac{l}{l_0}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \sqrt[3]{\frac{l}{l_0}} \quad \text{oder}$$

Digitized by Google

$$d = 0{,}63 \sqrt[3]{\frac{l}{l_0}} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Uebrigens kann man auch hier bezüglich der Längen dieselben Bedingungen direkt in die Grundformel einführen, welche wir bei den hohlen Zapfen stellten, und alsdann ergeben sich die folgenden Resultate:

1. Bedingung: $\frac{d}{l} = \frac{d_0}{l_0}$ — dasselbe Längenverhältniß —

$$\frac{d}{d_0} = 0{,}5 = \frac{l}{l_0} \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

2. Bedingung: $l = l_0$ — dieselbe Länge —

$$d = 0{,}63\, d_0 \quad \ldots\ldots \quad (24^a)$$
$$l = l_0 \quad \ldots\ldots \quad (24^b).$$

3. Bedingung: $dl = d_0 l_0$ — derselbe specifische Flächendruck —

$$d = 0{,}7\, d_0 \quad \ldots\ldots \quad (25^a)$$
$$l = 1{,}4\, l_0 \quad \ldots\ldots \quad (25^b).$$

Die unter der letzten Voraussetzung erhaltenen Specialformen ergeben die beste Uebereinstimmung mit der praktischen Ausführung, daher sie am meisten zu empfehlen sind.

C. Spurzapfen.

a) Spurzapfen im Allgemeinen.

Bezüglich der Inanspruchnahme, Form, Construction und Verhältnisse siehe das Nöthige pag. 289, 292 und 384, Bd. I. Aus der Inanspruchnahme dieser Zapfen durch eine parallel zur Zapfenaxe gerichtete Kraft geht zunächst hervor, daß man die Stärke derselben nach den Regeln der Druckfestigkeit [Formel (2) pag. 17, Bd. II] zu bestimmen hat. Da sich jedoch hierbei der specif. Flächendruck in der Regel etwas zu hoch stellt und überdies die Stärke des Zapfens in keinem günstigen Verhältniß zur Stärke der zugehörigen Welle stehen würde, so berechnet man den Durchmesser eines Spurzapfens besser auf Grund der Abnutzung der Endfläche oder man setzt einfach die betreffende Welle am Ende um eine entsprechende Schulterhöhe ab.

Nach Tredgold soll z. B. der specif. Flächendruck für einen schmiedeisernen, auf Bronze laufenden Zapfen nicht größer sein als 1^k pro $\square^{mm}$, während man in neuerer Zeit — und wohl richtiger — als Maximum für denselben $0{,}5^k$ annimmt.

Man darf jedoch auf der anderen Seite nicht vergessen, daß man mit der Vergrößerung der Druckfläche (Zapfenquerschnitt) den Reibungswiderstand vermehrt und muß in den einzelnen Fällen erwägen, welche von den zwei Bedingungen, die geringste Abnutzung oder die geringste Reibung, die wesentlichere ist. Bei ebener oder schwach kugelförmiger Endfläche und Auflage des Spurzapfens entsteht mit der Zeit dadurch eine Unannehmlichkeit, daß, da sich in Folge der größeren Geschwindigkeit die äußeren Flächentheile desselben stärker abnutzen als die in der Nähe des Centrums, die Auflage nur auf einen kleinen Theil an der Drehaxe beschränkt wird und demzufolge dort ein zu hoher specif. Flächendruck entsteht. Man vermeidet dies einigermaßen, indem man wie in Fig. 39^c pag. 289 und auf Bl. LVII

Digitized by Google

die Endfläche und die Spurplatte in der Mitte ausspart. Beträgt (wie im letzteren Beispiele) die Aussparung 0,33 vom Durchmesser des Zapfens, so ist die Auflage nur 0,9 von der Fläche des vollen Zapfenendes. Man wird also dann, um den specif. Flächendruck zu erhöhen, den Durchmesser des Zapfens nur um ein Weniges zu vergrößern haben.

Ist P = Paralleldruck des Zapfens,
d = Durchmesser des Spurzapfens,
n = Umdrehungszahl desselben in einer Minute,

so rechne man:

Bei Zapfen aus Schmiedeisen oder Stahl und Spurplatte aus Bronze für

$n < 100$: $d = 2\sqrt{P}$ . . . . (26)

$n > 100$: $d = 0{,}2\sqrt{Pn}$ . . . (27).

Zapfen von demselben Materiale in Pockholz laufend lassen bei continuirlicher Wasserbespülung einen höheren specif. Flächendruck zu, und es genügt dann:

$$d = 1{,}3\sqrt{P} \quad . . . . \quad (28).$$

Spurzapfen von Gußeisen in Bronze erhalten im Mittel den Durchmesser

$$d = 2{,}4\sqrt{P} \quad . . . . \quad (29).$$

Eingesetzte Stahlzapfen in Stahlplatten laufend erhalten einen bedeutend geringeren Durchmesser, da die Abnutzung bei gehärtetem Stahl ohnehin sehr gering ist, und bemißt man dann (z. B. bei Mühleisen) die Dimensionen entsprechend der Verbindung mit der Welle.

Ist ein hoher specif. Flächendruck wegen begrenzter Stärke des Zapfens dennoch nicht zu vermeiden, so muß man das Schmieröl mittelst Druckpumpe zwischen die reibenden Flächen bringen; oder ist der Zapfen nicht ohne Weiteres zugänglich, so leitet man dasselbe mittelst Röhrchen unter natürlichem oder künstlichem Drucke dahin. Krahnzapfen sind meistens auf Bruch zu berechnen, weil das Gewicht des Krahngerüstes und die Belastung infolge ihrer in Bezug auf die Krahnsäule einseitigen Anbringung einen Normaldruck in den Zapfen der Säule veranlassen.

Das Längenverhältniß der Spurzapfen wurde bereits pag. 391 Bd. I erwähnt und dafür die Grenzen

$$1{,}5 < \frac{l}{d} < 2$$

festgestellt, wobei jedoch unter der Länge (l) des Zapfens die wirkliche Länge von der Endfläche bis an die Schulter zu verstehen ist.

Anmerkung. Wir fügen diesen Entwickelungen absichtlich keine praktischen Beispiele zu, da einmal die Anwendung der vorstehenden Formeln für Zapfen im Allgemeinen sehr einfach ist und wir im nächsten Kapitel Gelegenheit haben werden, dieselben auch auf numerische Rechnungen anzuwenden.

b) Spurzapfen für Königswellen.

Die sogenannten „Königswellen" sind stehende Triebwerkwellen und kommen in mehretagigen Fabrikgebäuden vor, wo jede Saal-Transmission von der Fortsetzung einer verticalen Turbinenwelle oder von einer durch Kegelräder mit der Wasserrad- oder Schwungradwelle verbundenen stehenden Haupttransmissionswelle abgeleitet ist. Es sind dann gewöhnlich in jedem Stockwerke ein oder mehr conische Räder auf dieser Welle befestigt, welche durch Eingreifen in solche auf den horizon-

Digitized by Google

talen Zweigwellen die Arbeit im Stockwerke verbreiten; oder es wird auch mitunter (je nach dem Antriebe der Arbeitsmaschinen) die Arbeit durch Stirnräder oder Riementriebe auf andere stehende Wellen übertragen. Außer den Rädern, resp. Riemenscheiben befinden sich dann noch in entsprechenden Entfernungen Kupplungen, bzhtl. andere Theile auf der Königswelle. Das Gewicht dieser mit der Welle festverbundenen Theile, im Verein mit dem Eigengewichte der Königswelle, macht dann die Belastung (P) des Spurzapfens am unteren Ende der Welle aus; mit anderen Worten: Es ist dies der Paralleldruck, den das Spurlager auf den Zapfen ausübt.

Die Berechnung des Zapfendurchmessers einer solchen Königswelle erfolgt dann, da gewöhnlich die Geschwindigkeit derselben 100 Turen pro Minute nicht überschreitet, entweder

1) nach der Formel (26), indem man calculirt:

P = Eigengewicht der Welle + Gewicht der mit der Welle fest verbundenen Organe,

oder man schlägt (vorausgesetzt einen cylindrischen Wellenstrang von derselben Dicke) folgenden Weg ein:

2) Es sei D^{mm} = Durchmesser der cylindrischen Königswelle,

$L_1{}^m$ = wirkliche Länge derselben,

$L_2{}^m$ = Länge einer cylindrischen Welle von demselben Durchmesser D, welche dasselbe Gewicht hat wie die auf der Königswelle anzubringenden Theile zusammen, oder kurz: das in das Gewicht eines cylindrischen Wellenstückes von der Stärke D verwandelte Gewicht der auf der Königswelle befindlichen Theile.

$L = L_1 + L_2$ = ideelle Gesammtlänge der Welle,

P = Gewicht einer cylindrischen Welle vom Durchmesser D und der ideellen Länge L,

$\mathfrak{d}$ = Durchmesser des Spurzapfens,

ε = Gewicht eines Cubikmillimeter des Wellenmaterials.

Dann ist zunächst:

$$P = \frac{\pi}{4} D^2 L \,.\, 1000\,\varepsilon.$$

Nach Tab. I pag. 14 und 15 ist im Mittel

für Schmiedeisen: $\gamma = 7{,}7$,

„ Gußeisen: $\gamma = 7{,}4$.

1 Cubikmillimeter Schmiedeisen wiegt demnach:

$$\varepsilon = 7{,}7 : 1000000 = 0{,}0000077^k.$$

$$P = \frac{\pi}{4} D^2 L \,.\, 1000 \,.\, 0{,}0000077 = \frac{\pi}{4} D^2 L \,.\, 0{,}0077.$$

Führt man diesen Werth von P in Formel (26) ein, so entsteht:

$$\mathfrak{d} = 2\sqrt{0{,}785 \,.\, D^2 L \,.\, 0{,}0077}$$

$$\mathfrak{d} = 0{,}15\, D \sqrt{L} \quad \ldots \quad (30).$$

Setzt man nun $0{,}15\sqrt{L} = \alpha$, so ergeben sich für die Gleichung folgende zusammengehörigen Werthe:

$$\frac{\mathfrak{d}}{D} = 0{,}15\sqrt{L} = \alpha.$$

Digitized by Google

$L = 5^m$	8^m	12^m	16^m	20^m	25^m	30^m	35^m	40^m	$44{,}4^m$
$a = 0{,}33$	0,42	0,52	0,60	0,67	0,75	0,82	0,88	0,95	1,00.

Beispiel.

1. Aufgabe. Der Durchmesser einer 12^m langen, durchgehends gleichstarken Königswelle sei 100^{mm}, die Gewichte der auf dieser Welle aufgesteckten 3 Kupplungen und 4 Räder betragen zusammen $= 800^k$. Wie groß ist der Durchmesser des Spurzapfens zu machen?

Auflösung. Es handelt sich hier zunächst um die Ausmittelung der ideellen Länge (L_2) der Welle, damit wir aus vorstehender Tabelle das zur ganzen Länge (L) gehörige Verhältniß $a = \frac{d}{D}$ finden.

Das Gewicht des ideellen Wellenstückes ist:

$$G = \frac{\pi}{4} D^2 \, 1000 \, L_2 \, . \, 0{,}0000077 = 800$$

$$L_2 = \frac{800}{7854 \, . \, 0{,}0077} = 13^m.$$

Dann ist: $L = L_1 + L_2 = 12 + 13 = 25^m$

und $d = 0{,}75 \, D = 0{,}75 \, . \, 100$

$d = 75^{mm}$.

c) Kamm- oder Ringzapfen.

Als Vorarbeit für diesen Abschnitt betrachte man das bei Gelegenheit der Ringlager — pag. 412 Bd. I, Bl. LXIII und LXIV — über die Vortheile der Ringzapfen Gesagte und lese man daselbst wiederholt nach.

Die Berechnung der Ringzapfen auf Grund der Festigkeit und Abnutzung hat in den seltenen Fällen für die Praxis großen Werth, indem man, wie bei den Halszapfen von Torsionswellen, meistens den Durchmesser der für die zu übertragende Arbeit berechneten Hauptwelle als Grundlage, d. h. als cylindrischen Kern für den Ringzapfen betrachtet und die Ringe darum angesetzt denkt. In den meisten Fällen, wie z. B. bei Turbinen, Schraubenschiffen und Centrifugalmaschinen, bildet jeder Ringzapfen einen Torsions- oder Halszapfen, und es unterliegt dann die Berechnung den speciellen Anforderungen dieser Anlagen.

Wir beschränken uns hier deshalb auf die Wiedergabe der allgemeinen Gleichung, welche Reuleaux*) für die Grenzen aufstellt, innerhalb deren die Dimensionen eines Ringzapfens entsprechend der Axial-Belastung zu nehmen sind, falls man den Zapfen für sich (nnabhängig von der Welle) construirt. Darnach sei:

P = Druck auf die Zapfengrundfläche,
d' = mittlerer, d = innerer Durchmesser der Ringe,
b = Breite der Ringe,
h = Höhe (axial) eines Ringes,
h_1 = Höhe einer Lücke,
i = Anzahl der belasteten Ringflächen,
n = Anzahl der Umdrehungen des Zapfens.

*) Constructeur 1869, pag. 204.

Digitized by Google

$$i\,b = \frac{P\,n}{2000} \geqq 0{,}96\,\frac{P}{d} \quad \ldots\ (31).$$

Diese Formel liefert zwei Werthe, von denen immer der größere zu benutzen ist. Die Breite b nehme man zu $^1/_6$ bis $^1/_{10}$ von d, und $h = h_1 = b$ oder h etwas kleiner.

2. Axen.

Erklärung, Zweck und Eintheilung.

Axen sind rotirende (resp. schwingende oder oscillirende) Träger von Maschinentheilen (pag. 88).

Der Zweck der Axen im Maschinenbau ist der, bei Rädern, Balanciers, Kunstkreuzen u. dergl. eine drehende oder schwingende Bewegung um eine feste geometrische Axe möglich zu machen. Sie sind meistens Träger passiver, schwerbelastender Organe und zu eben dem Zwecke mit Trag-Zapfen versehen, welche sich ihrerseits in entsprechenden Stützungsorganen (Lagern) drehen.

Die Axen lassen sich nach demselben Prinzipe eintheilen, welches man bei den Zapfen annahm: Es ist der Hauptdruck entweder parallel oder normal gerichtet zur geometrischen Axe des Organes. Darnach erhielte man analog den Zapfen: Trag-Axen und Stütz-Axen, und es werden die ersteren meist horizontal, die letzteren meist vertical im Raume angeordnet sein. Allein die Stützaxen — gewöhnlich Spindeln genannt — kommen als reine Axen in der Praxis so selten vor, daß der reelle Werth dieser Eintheilungsweise nicht von Belang sein würde. Anders ist es mit stehenden Torsionswellen. Wir reden also im Folgenden ausschließlich von **Tragaxen** und wissen, daß dieselben in der Hauptsache normal zur Drehaxe — also auf Biegung belastet sind. Dabei ist es gleichgiltig, welche Lage diese Axe im Raume einnimmt, ob horizontal, schräg oder vertical.

Die Berechnung der Axen nehmen wir in der Reihenfolge durch, wie es der Lehrgrundsatz „Vom Einfachen zum Zusammengesetzten" anzeigt, und es bietet sich dazu ein Eintheilungsgrund in der Anzahl und Anordnung der Belastungspunkte.

In Wirklichkeit macht sich hier ein Umstand noch sehr wesentlich geltend, welcher eine Klarstellung zum Voraus erfordert. Die Verbindungen in einer Maschinenanlage und die Einflüsse der Bewegungen materieller Körper sind nämlich derart, daß man einestheils niemals von reinen Axen als solchen Organen reden kann, welche absolut nur durch Normal-Biegungskräfte (oder Componenten von schräggerichteten oder mehrfachen Kräften) beansprucht sind. Es tritt, selbst wenn es andere selbstständige Organe nicht veranlassen, auch bei der reinen Axe stets eine geringe Verdrehungswirkung auf, welche von der Reibung an der Zapfenoberfläche in den Lagern herrührt. Anderntheils, und hier ist es noch auffälliger, werden die reinen Wellen niemals blos eine Arbeit zu übertragen haben, niemals absolut nur auf Torsion in Anspruch genommen sein, da, abgesehen von etwa aufgesteckten Rädern oder dergl., die Welle in Folge ihres Eigengewichtes stets (bei horizontalen oder schrägen Wellen), eine Durchbiegung oder (bei verticalen Wellen) eine Zusammendrückung erleidet. Es ist also nothwendig, daß man in den einzelnen Fällen der praktischen Anwendung zuerst entscheidet, welche Beanspruchungsweise

Digitized by Google

die vorwiegende, wesentliche ist, ob das Organ als Axe (auf Biegung) oder als Welle (auf Torsion) zu behandeln, zu berechnen ist. Sind schließlich einmal beide Inanspruchnahmen von wesentlichem Einflusse auf die Form und die Dimensionen des betreffenden Maschinentheiles, so betrachtet man denselben als gemischte Axe oder gemischte Welle und muß bei der Berechnung allen gerade vorliegenden Arten der Inanspruchnahme gerecht werden. Es entsteht nun die Eintheilung in gemischte und reine Axen.

Unter den Letzteren verstehen wir also diejenigen, welche vorwiegend auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommen sind, und unter dieser Ueberschrift behandeln wir bei der „Berechnung" einzelne Beispiele, welche sich durch die Anordnung in Bezug auf die getragenen und stützenden Organe insofern unterscheiden, als entweder nur ein oder mehrere Belastungspunkte an der Axe vorhanden sind, als die Belastung zwischen — in der Mitte oder einseitig — oder seitwärts der Stützpunkte liegt.

Die wesentlichen Theile einer Axe sind: die Zapfen und die Axenköpfe. Erstere enthalten die Stützpunkte, werden also von den Lagern direct aufgenommen und sind gegen die benachbarten Theile der Axe abzusetzen, damit Widerlager gegen seitliche Verschiebungen entstehen. Letztere enthalten die Belastungspunkte und sind wie die Zapfen meist in cylindrischer Gestalt abzudrehen. Die Axenköpfe nehmen die mit der Axe direct zu verbindenden Theile auf, sind also für die Befestigung von Naben und Rosetten einzurichten. Im Allgemeinen läßt man die Axenköpfe derart gegen die übrigen Theile der Axe vorstehen, daß man die zu tragenden Gegenstände bequem aufstecken und aufkeilen kann, und macht ihre Länge etwas größer als es die Naben und Rosettenlängen bedingen. Den Theil zwischen einem Zapfen und einem Axenkopfe nennt man Schenkel; derselbe ist gewöhnlich abgestutzt kegelförmig. Kommen an einer Axe mindestens zwei Tragpunkte also zwei Axenköpfe vor, so erhält man zwischen diesen noch einen Theil, welchen man dann Schaft nennt.

Form, Material und Herstellung.

Die Form der Axen ist, wie bei den meisten Maschinentheilen überhaupt, in zweierlei Richtung verschiedenen Einflüssen unterworfen. Die Profilform richtet sich im Allgemeinen nach der Anlage. Die Entfernungen der Stütz- und Belastungspunkte sind durch Eigenthümlichkeiten und specielle Anforderungen der Anlage, durch den speciellen Zweck der Axe, sowie durch Anzahl, Art und Anordnung der mit der Axe zu verbindenden Theile bedingt. Für kleinere Kräfte macht man die Axen gewöhnlich prismatisch, während man nur die Zapfen auf eine durch Rechnung als zulässig befundene Größe absetzt. Bei großen Belastungen, wo sich eine Materialersparniß durch Anwendung der rationellen Trägerform trotz der kostspieligeren Herstellung als lohnend erweist, sucht man dagegen das Profil der theoretischen Form möglichst genau anzupassen.

Die Querschnittsform ist frei zu wählen und nur durch die bereits erfolgte Wahl eines bestimmten Materiales beschränkt, indem man für schmiedeiserne und stählerne, mitunter auch für gußeiserne Axen die volle Kreisform nimmt, die hohle Kreisform, sowie die reine Kreuzform (Fig. 85) und die aus Kreuz-, Kreis- und Rechteckformen combinirten Querschnitte (g und i Fig. 85) dagegen ausschließlich

Digitized by Google

für gußeiserne Axen, da sich nur in einem gießbaren Stoffe solche complicirte Formen billig herstellen lassen. Hölzerne Axen, die jetzt noch als Wasserrad-Axen mitunter vorkommen, fertigt man entweder in kreisförmigem oder polygonalem Querschnitte. Die Dimensionen der Querschnitte unterliegen allein der Festigkeitsberechnung aus der Beanspruchung.

Als Axen-Material finden wir in der Praxis die bereits erwähnten Eisenkohlenstoff-Verbindungen: Schmiedeisen, Gußeisen, Gußstahl und von Hölzern: Eiche, Buche und Kiefer.

Herstellung. Das zu verwendende Holz muß möglichst gerade gewachsen und astfrei sein. Damit man zum Voraus sicher ist, daß womöglich das Holz später nicht bedeutende Sprünge erhält, läßt man es bis zur Verwendung an der Luft gut austrocknen und schließt dabei die Stirnflächen durch Bekleben mit Papier vor dem Einflusse der Atmosphäre und der Niederschläge ab. Sehr starke Wellen kann man aus 4 oder mehr Hölzern (im Querschnitte) zusammensetzen und erhält durch Zusammenziehen derselben mittelst Schrauben und Binderingen einen sehr festen Träger. Die Drehzapfen für hölzerne Axen werden in Schmiedeisen oder Gußeisen besonders ausgeführt und eingesetzt.

Schmiedeisen treffen wir in der Praxis bei Axen am häufigsten an, und zwar verwendet man für geringere Belastungen, wo die Axen selbst meist cylindrisch sind, das billigere Walzeisen, während man für schwerere Gegenstände die Axen ausschmieden läßt, sodaß sie schon annähernd die verlangte rationelle Gestalt unter dem Hammer erhalten. Geschmiedete Axen sind meist etwas dichter als blos gewalzte. Man schmiedet die Axen entweder aus Walzeisen nachträglich unter Berücksichtigung der event. nichtprismatischen Form aus oder man schmiedet sie direct aus den Packeten des Schweißofens.*)

Gußeisen findet bei Wasserrädern, hier und da bei Förderwellen ꝛc. noch vielfach Verwendung, wiewohl es immer dem Schmiedeisen und Gußstahl gegenüber den Nachtheil hat, daß man nie mit Bestimmtheit einen ganz fehlerfreien dichten Guß garantiren kann und daß die Dimensionen der Zapfen und Axenköpfe in Folge der geringeren Festigkeit unvortheilhaft groß ausfallen, was natürlich wieder größeren Reibungsverlust und Anwendung größerer Hülsen nach sich zieht. Dagegen ist das Gußeisen verhältnißmäßig billig, und kann man überdies die Zapfen besonders einsetzen.

Erhöhte Festigkeit erzielt man bei Gußeisen durch die Methode des Hart- oder Schalengusses, die sich bei Axen recht gut anwenden läßt, zum Mindesten aber wird man die Axen stets stehend und mit verlorenem Kopfe (s. „Rohre"), also unter natürlichem hydrostatischem Drucke, vergießen. Als Modell für das Einformen verwendet man bei gefiederten oder Flügel-Axen Holzmodelle, während man für Axen mit massiven und hohlen Kreisquerschnitten das Modell besser — weil selten mehr als ein Abguß erfolgt — in Lehm drehen kann. —

Die eisernen Axen werden im Allgemeinen durchaus abgedreht, die schmiedeisernen und stählernen auch an den Schenkeln und am Schafte deshalb, weil die Form entweder aus cylindrischem Walzeisen herausgedreht werden muß, oder weil,

*) Eine ausführliche Abhandlung über „Anfertigung der Axen durch Schmieden" findet man in: von Reiche, „Die Maschinenfabrikation" 1869, pag. 141.

Digitized by Google

wenn geschmiedet, die Oberfläche unter dem Hammer zu unregelmäßig ausfällt. Bei gegossenen Axen erspart man einen Theil dieser Dreher-Arbeit, indem man — namentlich bei Schalenguß — schon eine hinreichend glatte Oberfläche erhält und nur die wesentlichen Theile, als Zapfen und Axenköpfe, abzudrehen hat. Auch fällt der Umstand, daß man in Guß rationelle Profile und zusammengesetzte Querschnittsformen ohne Schwierigkeit ausführen kann, für dieses Material in die Waagschale.

Gußstahl endlich wird in rohen Barren gegossen und event. nachträglich warm unter dem Hammer ausgeschmiedet. Für größere Axen müssen besondere Formen, welche der endgiltigen Axenform entsprechen, angefertigt und die Gußstücke nach wiederholtem Glühen unter dem Hammer verdichtet werden.

Berechnung, Construction und Verhältnisse.

Wenn in der Praxis die Berechnung einer Axe vorkommt, so sind gewöhnlich die Längendimensionen der Axe gegeben, sei es, daß die resp. Abstände der Lager- und Axenkopfmittel durch die betr. Anlage fest bestimmt sind, sei es, daß man dieselben gewissen Regeln der Theorie und Praxis entsprechend zu wählen hat. Die Belastung der Axe ist ferner gegeben in dem Gewichte des von der Axe zu tragenden Gegenstandes, und wenn auf dieses Organ noch Kräfte einwirken, welche eine Normal-Componente für die Axe ergeben, so hat man die Gesammt-Biegungsbelastung durch Addition dieser Componente zu dem Gewichte des zu tragenden Körpers zu ermitteln.

Diese Belastung, welche von den Axenköpfen aufgenommen wird, überträgt sich durch die Schenkel der Axe auf die Zapfen und wird nach dem „Gesetz der Wirkung paralleler Kräfte auf ein festes System" auf die Stützpunkte vertheilt. Es wird demnach bei der Lösung derartiger Aufgaben die nächste Arbeit in der Ermittelung der Zapfendicke zu bestehen haben, worauf man die Dimensionen der Zapfen selbst nach den Formeln (3 ÷ 18) bestimmen kann.

Die übrigen Querschnittsdimensionen der Axe leitet man nus denjenigen der Zapfen ab, indem man, wie bei den Körpern von gleicher Biegungsfestigkeit (pag. 60) geschah, den aus der Festigkeitslehre hervorgehenden Satz zu Grunde legt: In einem Körper erhält man für alle Querschnitte gegen Biegung dieselbe Widerstandsfähigkeit, wenn für zwei Schnitte die Widerstands- oder Querschnittsmomente sich ebenso zu einander verhalten wie die jenen Querschnitten zugehörigen Biegungsmomente. Sind außerdem die Querschnitte der Schenkel- und Schafttheile andere als die der Zapfen, so hat man dieselben nach folgendem Festigkeitsprincipe umzuwandeln: Zwei Querschnitte von verschiedener Gestalt haben unter gleichen Umständen dieselbe Widerstandsfähigkeit gegen Biegung, wenn ihre Querschnitts-Moduli dieselbe Größe ergeben. Beim Aufzeichnen einer Axe verfährt man nun in der Weise, daß man zuerst die Zapfenumrisse, sowie Länge und Durchmesser der Axenköpfe aufträgt, daß man ferner für die Schenkel (und resp. für den Schaft) Körper von gleicher Biegungsfestigkeit construirt, dieselben beziehentlich in Ring- oder Flügelquerschnitte umrechnet und die Profile verzeichnet. Die Schenkelprofile führt man in der Praxis gewöhnlich nicht genau in der theoretischen Form aus, sondern man bildet aus geraden Linien eine annähernde Körperform.

Digitized by Google

a) Axe mit einem Tragpunkte.

α) Der Tragpunkt (Axenkopf) liegt zwischen den Stützpunkten (Zapfen).

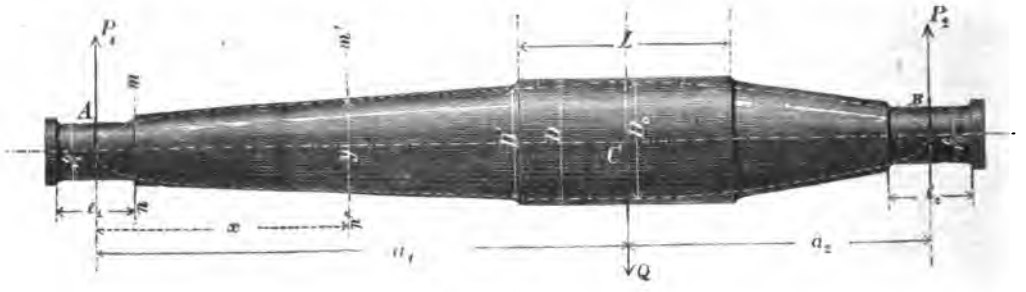


Fig. 121.

Bezeichnung:

Q = Normalbelastung der Axe,
P_1 u. P_2 = Zapfendrucke,
a_1 u. a_2 = Schenkellängen der Axe,
d_1, d_2 = Durchmesser,
l_1, l_2 = Länge der Zapfen,
D_0 = Durchmesser der ideellen Axe im Belastungspunkte,
D = Durchmesser und
L = Länge des Axenkopfes,
D' = Durchmesser der Axe unmittelbar neben dem Axenkopfe,
x = Normalabstand eines zu berechnenden Querschnittes vom zugehörigen Zapfenmittel,
y = Durchmesser des vollen Kreisquerschnittes der ideellen Axe im Abstande x.

Der Zusammenhang zwischen der Resultirenden Q und den Parallel-Componenten P_1 und P_2 ist nach der Mechanik ein dreifacher:

$$Q = P_1 + P_2$$
$$P_1 : P_2 = a_2 : a_1,$$

woraus:
$$P_1 a_1 = P_2 a_2.$$

D. h. im Belastungspunkte C erhalten wir, von beiden Zapfen ausgehend, dieselben Querschnittsdimensionen, da für denselben die beiden Schenkeln entsprechenden Biegungsmomente einander gleich sind.

Hieraus ergeben sich die Zapfendrucke, wenn der eine oder andere bekannt ist, zu:

$$P_1 = P_2 \frac{a_2}{a_1} \text{ und } P_2 = P_1 \frac{a_1}{a_2},$$

während man dieselben direct aus Q folgendermaßen erhält:

$$P_1 = Q \frac{a_2}{a_1 + a_2} \text{ und } P_2 = Q \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Die Zapfendimensionen sind nun einzeln für P_1 und P_2 zu berechnen für Axen aus Schmiedeisen, in Bronze-Lagern, bei $n < 150$, nach Formel (3 und 4) pag. 91, für Axen aus Gußeisen und Bronze-Lager, bei $n < 200$, nach Formel (11 und 12) pag. 92 ꝛc.

Digitized by Google

Es sei nun in Fig. 121 das Biegungsmoment für den Schnitt mn am inneren Ende des Zapfens = M (Hebelarm = $\frac{l}{2}$), dasjenige eines beliebigen Schnittes m'n' in der Entfernung x vom Zapfenmittel = M'; es sei ferner für mn das Widerstands- oder Querschnittsmoment = W und für den Schnitt m'n' ensprechend = W'. so hat man nach dem zuerst oben allgemein angeführten Grundsatze:

$$M : M' = W : W' \quad \ldots \ldots \text{(I)}.$$

Mit Bezug auf die Lagerung in Fig. 121 ist:

$$M = P_1 \frac{l_1}{2}; \; M' = P_1 x$$

und für vollen Kreisquerschnitt:

$$W = \frac{\pi}{32} b_1{}^3 s; \; W = \frac{\pi}{32} y^3 s'.$$

Dann heißt die Gleichung (I) folgendermaßen:

$$P_1 \frac{l_1}{2} : P_1 x = \frac{\pi}{32} b_1{}^3 s : \frac{\pi}{32} y^3 s'.$$

Nimmt man ferner in der Achse durchgehends dasselbe Material und dieselbe Sicherheit an, setzt also:

$$s = s' = \mathfrak{S},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{l_1}{2} : x = b_1{}^3 : y^3$$

und hieraus:

$$y = b_1 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_1}} \quad \ldots \ldots \text{(32)}.$$

Die Schnitte m'n' wählt man der bequemeren Rechnung wegen so, daß durch dieselbe die Schenkellänge in eine der Länge entsprechende Anzahl gleicher Theile zerlegt wird und so, daß man möglichst einfache und bequeme x erhält. Alsdann verwendet man Formel (32) besser in der folgenden Gestalt:

$$y = \left(b_1 \sqrt[3]{\frac{2}{l_1}}\right) \sqrt[3]{x};$$

oder $b_1 \sqrt[3]{\frac{2}{l_1}} = C'$ gesetzt:

$$y = C' \sqrt[3]{x} \quad \ldots \ldots \text{(32a)}.$$

C' ist nämlich ein Werth, den man bei jedem Schenkel nur einmal auszurechnen hat, und es ist derselbe zur Berechnung der verschiedenen y dann nur mit der 3. Wurzel aus dem zugehörigen x zu multipliciren.

In analoger Weise erhält man für den Belastungspunkt C:

$$D_0 = b_1 \sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}} \quad \ldots \ldots \text{(33)}$$

oder für $C' = b_1 \sqrt[3]{\frac{2}{l_1}}$ und $C'' = b_2 \sqrt[3]{\frac{2}{l_2}}$:

$$D_0 = C' \sqrt[3]{a_1} = C'' \sqrt[3]{a_2} \quad \ldots \text{(33a)}.$$

Digitized by Google

Ferner ist: $D \geq D_0$

und $$D' = b_1 \sqrt[3]{\frac{2\,(a_1 - 0{,}5\,L)}{l_1}} \quad \ldots \quad (34).$$

Die Schulterhöhe s (Fig. 121) eines, wenn nöthig, anzuordnenden Bundes macht man:

$$2{,}5 + 0{,}05\,b < s < 3 + 0{,}07\,b$$

und die Breite des Bundes wie bei Zapfen (pag. 89) = 1,5 s. Die Höhe des Anlaufes am Schenkel wird entweder eben so groß (= s) genommen oder wenn man genau construirt, macht man sie von der theoretischen Profilform des Schenkels abhängig, indem man die geradlinige Begrenzung tangirend an die berechnete Curve legt.

Da wir den Werth von b aus den Zapfenformeln, pag. 91, einführen, so liegt der Axe jedesmal dieselbe Spannungsannahme zu Grunde wie dem Zapfen.

Beispiele.

1. Aufgabe. Fig. 1, Bl. LXVII. Für ein verticales Transporteurrad von 30 Centner Gewicht ist eine schmiedeeiserne massive Axe zu construiren. Die Entfernung der betr. Lagermittel beträgt 1,2 m, und das Rad ist so auf der Axe anzuordnen, daß die Schwerpunktsebene desselben die Axenlänge im Verhältniß = 1 : 2 theilt.

Auflösung. An der Hand der in vorstehender allgemeinen Behandlung des Falles vorgezeichneten Methode gestaltet sich die numerische Rechnung folgendermaßen. Die Statik ergiebt:

$$P_1 : P_2 = a_2 : a_1 = 1 : 2 = 500 : 1000$$

$$P_1 = 500^k;\ P_2 = 1000^k;\ a_1 = 800^{mm};\ a_2 = 400^{mm}.$$

Probe: $Q = P_1 + P_2 = 500 + 1000 = 1500^k = 30$ Ctr.

Die Zapfendimensionen sind (da wir schmiedeiserne Zapfen und Lagerung in Bronze oder einer anderen Legierung voraussetzen und die Umdrehungszahl der Axe pro Minute kleiner als 150 annehmen dürfen) nach Formel (3) und (4) pag. 91:

$$b_1 = 1{,}13\sqrt{P_1} = 1{,}13\sqrt{500} = 25 \sim = 30^{mm};\ l_1 = 1{,}5\,b_1 = 42^{mm}$$

$$b_2 = 1{,}13\sqrt{P_2} = 1{,}13\sqrt{1000} = 36 \sim = 40^{mm};\ l_2 = 1{,}5\,b_2 = 54^{mm}.$$

In Fig. 1, Bl. LXVII, welche diese Axe in 1/5 wirklicher Größe darstellt, haben wir zunächst diese Dimensionen — Abstände a_1 und a_2 von Mitte C des Axenkopfes aus, Durchmesser und Länge der Zapfen von den Axen- resp. Zapfenmitteln A und B aus — aufgetragen und die äußeren Zapfen mit Bunden (entsprechend s und 1,5 s) abgeschlossen.

Zur genaueren Bestimmung der Form und Dimensionen der Axen-Schenkel AC und BC denken wir uns die Längen derselben in je 4 gleiche Theile getheilt (denn 800 und 400 sind beiderseits durch 4 ohne Rest theilbar, und wir erhalten dann einfache, abgerundete Zahlen). Die Abstände dieser Theilpunkte von den resp. Zapfenmitteln (Kraftrichtungen der Zapfendrücke) bezeichnen wir in AC mit x'_1; x'_2; x'_3 ....., die Durchmesser der Kreisquerschnitte in diesen Punkten entsprechend mit y'_1; y'_2; y_3 .... Ebenso führen wir für den Schenkel BC die Bezeichnung ein: x''_1; x''_2; x''_3 .... und y''_1; y''_2; y''_3 ....

Digitized by Google

Formel (32) und (33) liefern dann folgende numerischen Werthe:

Für $x'_1 = 200$; $x'_2 = 400$; $x'_3 = 600$; $a_1 = 800$
ist: $y'_1 = 64$; $y'_2 = 80$; $y'_3 = 92$; $D_0 = 101$.
Für $x''_1 = 100$; $x''_2 = 200$; $x''_3 = 300$; $a_2 = 400$
ist: $y''_1 = 62$; $y''_2 = 78$; $y''_3 = 90$; $D_0 = 98$.

Anmerkung. Betrachten wir einmal die Momente für die einzelnen Schnitte, so zeigt sich, daß dieselben hier zufällig paarweise an beiden Schenkeln dieselbe Größe haben. Es ist z. B. für den ersten Schnitt von den Punkten A und B aus das Biegungsmoment: $500 \times 200 = 100000 = 1000 \times 100$, für die zweiten Schnitte: $500 \times 400 = 200000 = 1000 \times 200$. Daraus erhellt, daß die Durchmesser y der Kreisquerschnitte in diesen Schnitten einander gleich sein müssen. Daß es nach der obigen Zusammenstellung nicht genau der Fall ist, liegt daran, daß wir für die Zapfendimensionen abgerundete, vergrößerte Werthe angenommen und in den Formeln (32) und (33) eingeführt haben, daß aber diese Vergrößerung bei den Zapfen nicht genau in demselben Verhältnisse stattfand. — Es ist daher richtiger, daß man die wirklichen nach Formel (3) und (4) berechneten Werthe in (32 ÷ 34) einführt und damit rechnet; es bleibt immer dann beim Aufzeichnen noch die Freiheit, die Dimensionen passend abzurunden.

Trägt man nun die so erhaltenen Werthe von y' und y'' auf den Normalen zu AB in Fig. 1, Bl. LXVII auf und verbindet man die Endpunkte derselben durch eine stetig verlaufende Curve, so entstehen die Profile von zwei cubischen Parabeln (s. Fig. 102, pag. 66). In dieser für die Herstellung sehr complicirten Gestalt führt man jedoch die Axen-Schenkel nicht aus, sondern macht die Profilbegrenzung geradlinig, indem man gerade Linien tangirend oder in geringen Abständen von der Curve anlegt. Auf diese Weise erhält man in den Schnitten, wo die gerade Linie außerhalb der Curve liegt, noch etwas größere Festigkeit, immerhin aber im Vergleich zur prismatischen Form eine bedeutende Gewichts- und Materialersparniß. Gleichzeitig ersieht man, daß die geradlinige Begrenzung die cubische Parabel nicht durchschneiden darf, wenn man nicht eine Schwächung herbeiführen will, und daß die Wurzel der Zapfen in die Oberfläche der cubischen Parabel zu liegen kommt, wie dies in der Methode der Berechnung begründet ist. — Die Länge des Axenkopfes nehmen wir zu $L = 200^{mm}$ an und geben dem Durchmesser des Nabensitzes eine solche Größe, daß derselbe an den Enden noch etwas gegen die Schenkelstärke vortritt; also hier $D = 110^{mm}$.

2. Aufgabe. Es ist eine gleichschenklige Balancieraxe von Gußstahl mit der Axenkopfbelastung von $Q = 12000^{k}$ und einer Länge von $2a = 800^{mm}$ zwischen den Lagermitteln zu construiren.

Auflösung. Die Statik dieses Trägers vereinfacht sich in Folge der Gleichheit (von a_1 und a_2) der Schenkellängen in der Weise, daß man für die Zapfendrücke im vorliegenden Falle erhält:

$$P_1 = \frac{Q}{2} = \frac{12000}{2} = 6000^{k} = P_2.$$

Es werden demzufolge die Zapfen- und Schenkeldimensionen auf beiden Seiten des Axenkopfes dieselben, und man braucht die Berechnung immer nur für eine Seite zu machen und die Maße symmetrisch aufzutragen. Für die Berechnung der Zapfenstärke benutzen wir vorliegend Formel (7) pag. 92 und erhalten:

$$b = 0{,}95\sqrt{P} = 0{,}95\sqrt{6000} = 75^{mm}.$$

Digitized by Google

Der Formel (7) entspricht nun eine Länge: $l = 1{,}75\,b$ (Formel (8); allein diese Länge ist für Balancierzapfen nicht nothwendig, weil diese blos schwingen und infolge dessen — wiewohl zwar der specif. Flächendruck dann größer ausfällt als $p_0 = 0{,}8$ (pag. 92) — keine so große Abnutzung erleiden als rotirende mit bis 150 Umdrehungen bei gleichermaßen erhöhtem spec. Flächendrucke.

Wir nehmen speciell für die Balancier-Axen:

$$l = 1{,}4\,b$$

und erhalten hier: $l = 1{,}4\,b = 1{,}4 \,.\, 75 = 100^{mm}$.

Die Nabenlänge (320^{mm}) Fig. 2, Bl. LXVII verlangt eine Axenkopflänge von $L = 350^{mm}$, und demnach fallen die conischen Theile der Axen-Schenkel sehr kurz aus. Es genügt deshalb vorliegend, daß man den Durchmesser D_0 im Belastungspunkte berechnet, welcher ist:

$$D_0 = b\sqrt[3]{\frac{2a}{l}} = 75\sqrt[3]{\frac{800}{100}} = 150^{mm}.$$

Eben weil hier der Axenkopf sehr lang ist, können wir die niedrigste Grenze für D annehmen und machen $D = D_0 = 150$. Trotzdem fällt das theoretische Profil noch weit genug innerhalb der geradlinigen Begrenzung, innerhalb des abgestutzten Kegels, dem wir an der Wurzel des Zapfens (zufolge $s = 10^{mm}$) einen Durchmesser von 95^{mm} und am Axenkopfe von 135^{mm} geben; denn die Berechnung an letzterer Stelle ergiebt nach Formel (34):

$$D' = b\sqrt[3]{\frac{2(a - 0{,}5\,L)}{l}} = 75\sqrt[3]{\frac{2\,(400 - 175)}{100}}$$

nur $D' = 125^{mm}$.

In diesem, sowie auch im folgenden Beispiele haben wir keine Bunde am Zapfenende angenommen, da in den meisten Fällen die Schulter an den Schenkeln zur Verhinderung einer seitlichen Verschiebung hinreicht.

3. Aufgabe. Es ist eine schmiedeiserne Kunstkreuz-Axe für ein gleichschenkliges Kunstkreuz mit $Q_1 = 2000^k$ Normalbelastung pro Schenkel zu construiren. Die Länge der Kunstkreuznabe sei $= 280^{mm}$ und die Entfernung der gußeisernen Froschlager (s. pag. 377, Bd. I. und Bl. LIV) demnach $2a = 500^{mm}$.

Auflösung. Nebenstehende Fig. 122 zeigt die Anordnung eines bei Wasserhaltungsanlagen der Bergwerke oft vorkommenden Kunstkreuzes. Es besteht linear in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke ABC, welches innerhalb der Dreiecksebene um den Punkt C (Projection der Axe) schwingt. Bei B ist das verticalabwärts hängende Pumpengestänge und bei A die Zugstange nach dem Motor mittelst Gabelzapfen und Zugstangenköpfen und Scheeren angekuppelt.

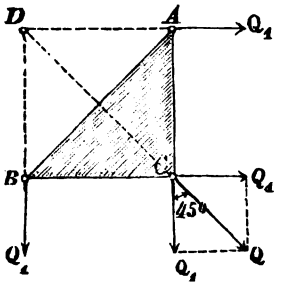


Fig. 122.

In der durch die Fig. 122 veranschaulichten Gleichgewichtslage ergeben die Rückwärtsverlängerungen von Q_1 einen Durchschnitt in D und die Verbindung von D mit C die Richtung der Resultirenden $= Q$. Trägt man nun in C die Componenten Q_1 nach Größe und Richtung an und construirt man

Digitized by Google

daselbst das Kräfteparallelogramm, so erhält man (ohne Rücksicht auf das Eigengewicht des Kunstkreuzes) die Resultirende Q als Hypotenuse eines gleichschenkligrechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten Q_1. Es ist demnach der Normaldruck

auf die Axe: $Q = Q_1\sqrt{2} = 1{,}4\,Q_1$

und numerisch: $Q = 1{,}4 \,.\, 2000 — 2800^k$.

Da wir ferner voraussetzen, daß die Schwerpunktsebene des Kunstkreuzes in die Mitte zwischen die Lager der Axe fällt, so sind wiederum die Zapfendrücke einander gleich, nämlich:

$$P_1 = P_2 = \frac{Q}{2} = 1400^k = P.$$

Für die Durchmesser der hier schmiedeisernen Zapfen, in geschlossenen gußeisernen Lagern laufend, benutzen wir Formel (13) pag. 92:

$$d = 1{,}2\sqrt{P} = 1{,}2\sqrt{1400} = 45^{mm},$$

nehmen aber die Länge nicht $= 1{,}75\,d$, wie es nach Formel (14) vorgeschrieben wird, sondern — weil die Zapfen nur eine sehr geringe, schwingende Bewegung haben — wie in Aufgabe 2):

$$l = 1{,}4\,d = 1{,}4 \,.\, 45 = 64^{mm}.$$

Da der Axenkopf (Fig. 3, Bl. LXVII) den größeren Theil der Achsenlänge in Anspruch nimmt, so lohnt es sich nicht, die Schenkel als gleich widerstandsfähige Körper zu gestalten; man macht deshalb die Axen cylindrisch, und es ergiebt sich alsdann für den Durchmesser D_0 in der Mitte der Axe nach Formel (33):

$$D_0 = d\sqrt[3]{\frac{2a}{l}} = 45\sqrt[3]{\frac{500}{64}} = 90^{mm}$$

und für einen Schnitt am Ende der Nabe:

$$D' = d\sqrt[3]{\frac{2\,(a - 0{,}5\,L)}{l}} = 45\sqrt[3]{\frac{2\,(250 - 140)}{64}} = 68^{mm}.$$

Da wollen wir im vorliegenden Falle einen Mittelwerth zwischen D_0 und D' nehmen, also den Durchmesser der cylindrischen Axe $D = 80^{mm}$ machen. Dann behält man gegenüber der Minimalgröße $D' = 68$ immer noch einen Ueberschuß von 12^{mm} zur Anbringung der Keilnuten. Schließlich erkennt man, daß, da wir die Axen einmal aus einem Stück cylindrischen Walzeisen herausdrehen, es nicht notwendig ist, die oben berechneten Minimaldurchmesser der Zapfen beizubehalten; wir nehmen vielmehr die genügende Schulterhöhe 10^{mm} an und behalten demnach eine Zapfenstärke $d = 60^{mm}$, was in Bezug auf die Abnutzung noch günstiger ist. Dem entsprechend verlängern wir die Zapfen auf 75^{mm}, da wir voraussetzen, daß das zu verwendende Lagermodell ein Längenverhältniß $= 1{,}25$ hat.

β) Der Tragpunkt liegt **außerhalb** der Stützpunkte.

Es kommt in der Praxis sehr oft der Fall vor, daß der durch eine Axe drehbar zu stützende Gegenstand am Ende der Axe angebracht werden muß, wie es Fig. 123, pag. 110 und Fig. 4, Bl. LXVII im Bilde anschaulich machen. Solche Axen nennt man dann freitragende Axen.

Die Componente P_2 ist in Bezug auf P_1 entgegengesetzt gerichtet, und dem entsprechend ändern sich dann die statischen Gleichungen gegenüber *α)* folgendermaßen:

Digitized by Google

$$Q = P_2 - P_1;\ P_1 (a_1 + a_2) = P_2 a_2.$$

Daraus: $P_1 = P_2 \frac{a_2}{a_1 + a_1}$ und $P_2 = P_1 \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_2}$;

ferner ist: $P_1 = Q \cdot \frac{a_2}{a_1}$ und $P_2 = Q \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1}$.

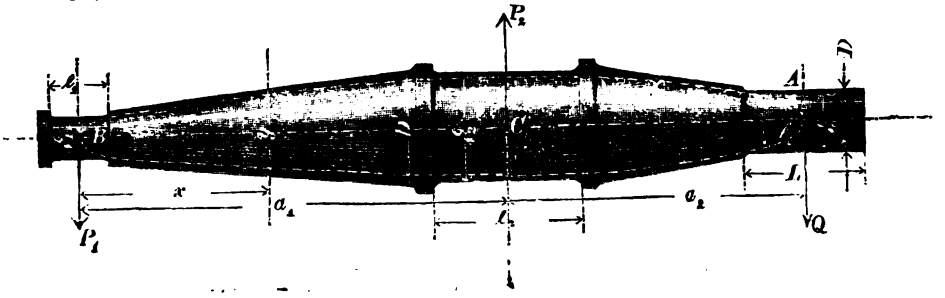


Fig. 123.

Die Dimensionen des Stirnzapfens B berechnet man nach den bekannten Zapfenformeln und construirt die (cubische) Parabel für den Schenkel BC wie sub α). Ebenso berechnet man für das Ende A einen ideellen Stirnzapfen mit den Dimensionen d_0 und l_0 und construirt das theoretische Profil für AC. Es genügt mitunter auch die Berechnung von D'_1 und D'_2 nach Formel (34), wovon man das größere Resultat beizubehalten hat.

Alsdann trägt man die Länge (L) des Nabensitzes bei A auf und erhält im Durchschnitte desselben mit der Parabel den wirklichen Durchmesser D des Nabensitzes, welcher übrigens nach:

$$D = d_0 \sqrt[3]{\frac{L}{l_0}} \quad \ldots . \quad (35)$$

berechnet werden kann. Für d_2 gelten Formel (33) oder (34), während man gewöhnlich $l_2 = d_2$ macht oder (nach Reuleaux) genügend $l_2 = \sqrt{l_1^2 + l_0^2}$, was sich sehr leicht graphisch durch das rechtwinklige Dreieck im Halbkreis ermitteln läßt. Schließlich gestaltet man die Schenkelprofile wieder als Trapeze, welche die Parabeln umschließen.

Beispiele.

1. Aufgabe: Für die Normalbelastung $Q = 16$ Ctr. $= 800^k$ ist eine massive schmiedeiserne, freitragende Axe zu construiren. Die Schenkel sind $a_1 = 1000^{mm}$ und $a_2 = 400^{mm}$, die Nabe des aufzukeilenden Gegenstandes ist $L = 100^{mm}$ lang; letztere ist in Bezug auf die Schwerpunktsebene aber einseitig, sodaß sie nach C hin 60^{mm} und nach außen 40^{mm} ausladet.

Auflösung. Fig. 4, Bl. LXVII.

Statik: $P_1 = Q \frac{a_2}{a_1} = 800 \cdot 0{,}4 = 320^k$

$P_2 = Q \frac{a_1 + a_2}{a_1} = 800 \cdot 1{,}4 = 1120^k$.

Probe: $Q = P_2 - P_1 = 1120 - 320 = 800^k$

Digitized by Google

Zapfendimensionen: $d_1 = 1{,}13\sqrt{P_1} = 1{,}13\sqrt{320} = 20^{mm}$; $l_1 = 30^{mm}$.

$d_0 = 1{,}13\sqrt{Q} = 1{,}13 \quad \overline{800} = 32^{mm}$; $l_0 = 48^{mm}$.

5 Schnitte der beiden Schenkel:

$x'_1 = 200$; $x'_2 = 400$; $x'_3 = 600$; $x'_4 = 800$; $a_1 = 1000$

$y_1 = 48$; $y_2 = 60$; $y_3 = 79$; $y_4 = 76$; $d_2 = 82$.

Nachdem wir diese Coordinaten, sowie Durchmesser und Länge des Stirnzapfens für P_1 und die Dimensionen ($d_2 = 82 = l_2$) des Halszapfens aufgetragen haben, gehen wir von Q aus um 60^{mm} nach innen und erhalten im Durchschnitte mit der Parabel den Durchmesser D des Achsenkopfes, welcher nach Formel (35) zu:

$$D = d_0 \sqrt[3]{\frac{L}{l_0}} = 32 \sqrt[3]{\frac{120^*)}{48}} = 43{,}4 \sim 45^{mm}$$

berechnet wird.

Legt man nun an die Parabel des längeren Schenkels Fig. 4, Bl. LXVII die Tangenten derart an, daß man den geringsten Materialüberschuß erhält, so zeigt es sich, daß man bei dem Stirnzapfen eine bedeutend größere Dicke bekommt, als der berechnete Durchmesser d_1 erfordert. Man wird daher in Wirklichkeit auch diesen Zapfen stärker — vielleicht $d_1 = 30^{mm}$ machen, da es ohnehin praktisch der übrigen Axe mehr angemessen ist. Ein vorhandenes Lagermodell vom Durchmesser 30^{mm} hat aber häufiger auch die entsprechende Länge $l_1 = 1{,}5 d_1 = 45^{mm}$, und deshalb geben wir dem Zapfen auch diese Längen-Dimension.

Am Zapfen P_2 erhalten wir die Schenkel so stark, daß man die Lagerstelle noch bis auf den berechneten Durchmesser d_2 eindrehen kann.

b) Axe mit zwei Traqpunkten.

α) Die Axenköpfe liegen beide **zwischen** den Zapfen.

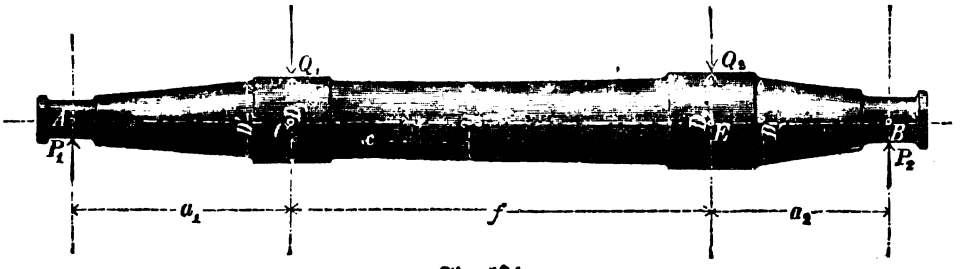


Fig. 124.

Die Axen, welche an zwei Stellen zugleich Lasten tragen, zerfallen ihrer Länge nach in drei Theile: 2 Schenkel und 1 Schaft. Die Ableitung der stat. Gleichungen zur Berechnung der Zapfendrücke erfolgt auf Grund des allgemeinen mechanischen Gesetzes für parallele Kräfte: Im Gleichgewichtszustande ist die algebraische Summe der stat. Momente gleich Null. Man stellt also der Reihe nach für die Punkte B und A als Dreh- oder Coordinatenanfangspunkte (auf welche die Hebelarme der Kräfte bezogen werden) die Momentengleichung auf und

*) Es ist in der Ableitung von Formel (35) begründet, daß man bei dieser einseitigen Nabe nicht $L = 100$, sondern $L = 2 \cdot 60 = 120^{mm}$ einzuführen hat.

Digitized by Google

ermittelt daraus eines der P Die Länge des Schaftes sei: $CE = f$; die Rechnung erfolgt zunächst ohne Rücksicht auf das Eigengewicht der Axe.

Ganz allgemein ist nach obigem Gesetze:

$$\Sigma (M) = 0,$$

mit Bezug auf unsere Figur 124 für B als Drehpunkt:

$$P_1 (a_1 + f + a_2) - Q_1 (f + a_2) - Q_2 a_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{Q_1 f + Q_1 a_2 + Q_2 a_2}{a_1 + f + a_2}$$

oder

$$P_1 = Q_1 \cdot \frac{f + a_2 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right)}{a_1 + f + a_2} \ldots . (36).$$

P_2 findet man, wenn man die Momente auf Punkt A bezieht:

$$P_2 (a_1 + f + a_2) = Q_2 (f + a_1) + Q_1 a_1$$

$$P_2 = \frac{Q_2 f + a_1 (Q_1 + Q_2)}{a_1 + f + a_2}$$

$$P^2 = Q_2 \frac{f + a_2 \left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right)}{a_1 + f + a_2} \ldots . (37).$$

Außerdem ist: $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$

und für den **besonderen Fall**, daß die Axe gleich lange Schenkel hat und die Axenköpfe gleichstark belastet sind, daß also

$$a_1 = a_2 \text{ und } Q_1 = Q_2$$

ist, ergeben die obigen Formeln:

$$P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2.$$

Die Dimensionen der Zapfen berechnet man nun ganz so wie unter a) nach denjenigen Zapfenformeln (3–18), welche dem Materiale der vorliegenden Axe zukommen. Ebenso ermittelt man die Profile der Schenkel durch Berechnung von einzelnen Querschnitten nach Formel (32) resp. (34) und die Durchmesser der Axenköpfe nach Formel (33). Diese Theile werden auch bei gußeisernen massiven und Flügel-Axen immer in vollem Kreisquerschnitte ausgeführt. Den cylindrisch zu gestaltenden Axenköpfen giebt man dann einen Durchmesser D_1 resp. D_2, der nach Erfordern etwas größer als der Durchmesser des Kreisquerschnittes der cubischen Parabel an dieser Stelle zu nehmen ist, sodaß man gegen die angrenzenden Theile der Axe immer noch einen Vorsprung oder Anlauf erhält, welcher das Aufstecken der Naben und Rosetten, sowie das Einbringen der Keilbahnen erleichtert.

Was nun den Schaft, hier also das Stück zwischen den beiden Axenköpfen anlangt, so wollen wir auch für diesen zunächst den vollen Kreis als Querschnittsform voraussetzen. Die Durchmesser von einzelnen Schnitten findet man nach eben demselben auf pag. 105 erwähnten Grundsatze der Festigkeitslehre, welcher, auf das vorliegende Beispiel einer zweifach-tragenden Axe angewendet, und wenn man die Abstände x von dem Axenkopfe C, also von der Ebene der Kraft Q_1, aus nimmt, heißt:

$$P_1 a_1 : P_1 (a_1 + x) - Q_1 x = D_1^3 : y^3.$$

Und daraus entsteht:

$$\frac{y^3}{D_1^3} = \frac{P_1 (a_1 + x) - Q_1 x}{P_1 a_1} = 1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)$$

Digitized by Google

$$y = D_1 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Dagegen für x, bezogen auf Punkt E:

$$y = D_2 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_2}\left(1 - \frac{Q_2}{P_2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (38^a).$$

Für den **besonderen Fall** einer gleichschenkligen, in beiden Tragpunkten gleichbelasteten Axe geht die Formel (38) über in:

$$y = D_1 = D_2$$

und dann ist also der Schaft cylindrisch, während er im allgemeinen Falle wieder durch zwei cubische Parabelbogen zu begrenzen ist:

Anmerkung. Die von einer solchen Axe zu tragenden Gegenstände sind entweder zwei getrennte, auf den Axenköpfen sitzende Körper, oder sie bilden — wie bei den Wasserrädern, Walzen, Trommeln, Balanciers ꝛc. — ein zusammenhängendes Ganze. Im zweiten Falle kommen auf die Axenköpfe gewöhnlich Rosetten zu sitzen, und es ist derselbe gerade so zu behandeln, als ob die Belastungen einzeln (nach Maßgabe der Schwerpunktslage) durch zwei getrennte Körper auf die Axenköpfe übertragen würden.

Beispiele.

1. Aufgabe. (Fig. 5, Bl. LXVII). Für die Belastungen $Q_1 = 3500^k$ und $Q_2 = 4200^k$ ist eine schmiedeiserne Axe zu construiren, deren Schenkel die Längen $a_1 = 700$ und $a_2 = 400^{mm}$ haben, während der Abstand der Axenköpfe von einander beträgt: $f = 1700$.

Auflösung. $$P_1 = 3500 \frac{1700 + \frac{400\,(1 + {}^6/_5)}{2800}}{} = 3225^k$$

$$P_2 = 4200 \frac{1700 + \frac{700\,(1 + {}^5/_6)}{2800}}{} = 4475$$

Probe: $Q_1 + Q_2 = 7700 = P_1 + P_2 = 3225 + 4475$.

Die Dimensionen der Zapfen sind dann nach Formel (3 und 4) entsprechend diesen Kräften:

$$d_1 = 64^{mm};\ l_1 = 96^{mm}$$
$$d_2 = 76^{mm};\ l_2 = 114^{mm}.$$

In jedem der beiden Schenkel vier Schnitte in bzhtl. gleichen Abständen von einander angenommen, ergeben sich die zusammengehörigen x und y für den Schenkel a_1:

$$x = 175;\ 350;\ 525;\ a_1 = 700$$
$$y = 98;\ 124;\ 142;\ D_1 = 156.$$

Für den Schenkel a_2:

$$x = 100;\ 200;\ 300;\ a_2 = 400$$
$$y = 91;\ 115;\ 132;\ D_2 = 145.$$

Den Schaft von 1700^{mm} Länge zerlegen wir von D_2 aus in 5 Theile, von denen die ersten vier 400^{mm} lang sind, damit $\left(\frac{x}{a_2}\right)$ immer eine einfache Zahl wird. Es ist dann nach Formel (38^a):

Digitized by Google

$$y = 145 \sqrt[3]{1 + \frac{400}{400}\left(1 - \frac{4200}{4475}\right)}$$

$x = 400;\ 800;\ 1200;\ 1600;\ f = 1700$

$y = 148;\ 150;\ 153;\ 155;\ D_1 = 156.$

Der Klammerausdruck unter der Wurzel ist für sämmtliche x des vorliegenden Beispieles constant; deshalb berechnet man ihn nur einmal, und zwar gleich zuerst. Es ist hier z. B. $\left(1 - \frac{4200}{4475}\right) = 0{,}06$.

Indem man nun in Fig. 5, Bl. LXVII die den einzelnen x entsprechenden y normal zur Axe aufträgt und die bezgl. Endpunkte der y durch eine stetige krumme Linie verbindet, erhält man zwei Parabelbögen. Dieselben weichen jedoch hier und in den meisten Fällen von der geraden Linie so wenig ab, daß man meist ohne weiteres die Endpunkte von D_1 und D_2 geradlinig mit einander verbindet, und so also den Schaft als abgestumpften Kegel construirt. Im vorliegenden Zahlenbeispiele sind außerdem die Axenkopfdurchmesser D_1 und D_2 nur wenig von einander verschieden, weshalb man die Rücksicht auf die Materialersparniß zum Theil außer Betracht läßt und die Zapfen- und Axenkopfdimensionen übereinstimmend macht, sodaß alsdann der Schaft cylindrische Form erhält.

β) Ein Axenkopf liegt **zwischen** den Zapfen, der andere **außerhalb** derselben.

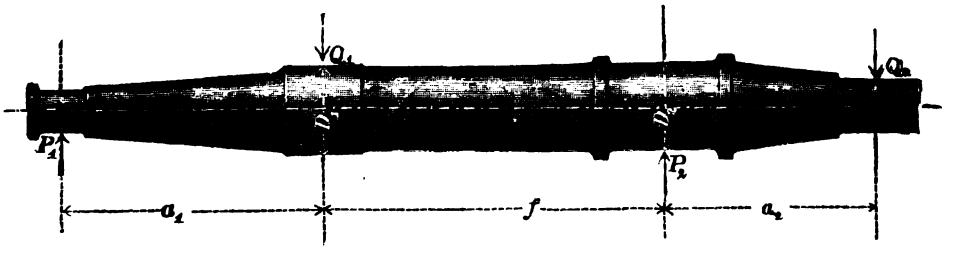


Fig. 125.

Hier verfährt man ganz analog wie im vorhergehenden Beispiele, und den Axenkopf für Q_2 construirt man entsprechend a), *β*).

Die Zapfendrücke sind jetzt:

$$P_1 (a_1 + f) = Q_1 f - Q_2 a_2$$

$$P_1 = Q_1 \frac{f - a_2 \frac{Q_2}{Q_1}}{a_1 + f} \quad \ldots : (39).$$

$$Q_1 a_1 + Q_2 (a_1 + f + a_2) = P_2 (a_1 + f)$$

$$P_2 = Q_2 \frac{f + a_2 + a_1 \left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right)}{a_1 + f} \quad \ldots . (40).$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Fig. 6, Bl. LXVII. Die Dimensionen a_1, f und a_2, sowie die Belastungen Q_1 und Q_2 sind dieselben wie bei Fig. 5 Bl. LXVII.

Digitized by Google

Auflösung. $P_1 = 3500 \frac{1700 - 400 \cdot {}^6/_5}{2400} = 1780^k$

$P_2 = 4200 \cdot \frac{1700 + 400 + 700\,(1 + {}^5/_6)}{2400} = 5920^k.$

Probe: $P_2 + P_1 = Q_1 + Q_2$

$1780 + 5920 = 7700 = 3500 + 4200.$

Die Zapfendimensionen werden berechnet zu:

$d_1 = 48;\ l_1 = 72$ } wofür wir dann bei der { $d_1 = 55;\ l_1 = 80$
$d_0 = 72;\ l_0 = 108,$ } Construction setzten: { $d_0 = 80;\ l_0 = 160.$

Mit Bezug auf die berechneten Zapfendimensionen erhält man nun für je vier Schnitte der beiden Schenkel die zusammengehörigen Werthe,

für Schenkel a_1: $x = 175;\ 350;\ 525;\ a_1 = 700$
$y = 81;\ 102;\ 117;\ D_1 = 129.$

„ Schenkel a_2: $x = 100;\ 200;\ 300;\ a_2 = 400$
$y = 88;\ 111;\ 127;\ D_2 = 140.$

Um das Profil des Schaftes zu bestimmen, legen wir einmal von Q_1 aus Schnitt in gleichen Abständen von je 140mm und dann einmal von P_2 aus dergleichen in Abständen von 200mm und berechnen die zugehörigen y im ersteren Falle nach:

$$y = D_1 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)}$$

und im letztern nach:

$$y = D_2 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_2}\left(1 - \frac{P_2}{Q_2}\right)}.$$

Von Q_1 aus ergeben sich die Durchmesser:

für $x = 140;\ 280;\ 420;\ 560;\ 700;\ 729$
$y = 120;\ 110;\ 97;\ 79;\ 44;\ 0.$

Von P_2 aus für:

$x = 200;\ 400;\ 600;\ 800;\ 971$
$y = 130;\ 117;\ 102;\ 79;\ 0.$

Das zeigt, daß bei dieser Anordnungsweise der Querschnitt an einer Stelle des Schaftes = Null werden kann. Diese Stelle ist von Q_1 aus allgemein um

$$x_0 = \frac{a_1}{\frac{Q_1}{P_1} - 1} \quad \ldots (41)$$

entfernt, was man ohne weiteres erhält, indem man in der obigen Formel beim linken Schafttheile $y = 0$ setzt. — Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, daß man in Wirklichkeit niemals $y = 0$ machen kann, da, abgesehen davon, daß dann der Zusammenhang in den beiden Theilen der Axe gelöst wäre, auch theoretisch der in einem auf Biegung beanspruchten Schnitte auftretenden abscheerenden Kraft Rechnung zu tragen ist.

Fig. 6, Bl. LXVII zeigt nun sowohl die theoretische Form der Axe, als auch die Gestalt, durch welche man eine bequeme Annäherung an jene erzielt. Lohnt es sich, so kann man in der That den Schaft bei x_0 etwas einziehen (wie es z. B.

Digitized by Google

bei Eisenbahnen zum Theil vorkommt). Uebrigens aber wird man in den meisten Fällen den Schaft als einfachen Kegelstumpf oder gar als Cylinder arbeiten.

Nach den letzten zwei Beispielen ist es nicht schwer, auch die Aufgabe zu lösen, daß die beiden Tragpunkte außerhalb der Stützpunkte oder Zapfen liegen, wie es z. B. bei Eisenbahnwagen-Axen der Fall ist. — Entsprechend den Axen berechnet man auch die Krahnsäulen.

c) Axe mit drei Tragpunkten.

Endlich wollen wir auch noch das Beispiel einer dreifach-tragenden Axe durchgehen und damit anzeigen, wie man, selbst bei mehrfacher Belastung, die Berechnung der Axe immer nach denselben vorherstehenden Grundsätzen durchführt.

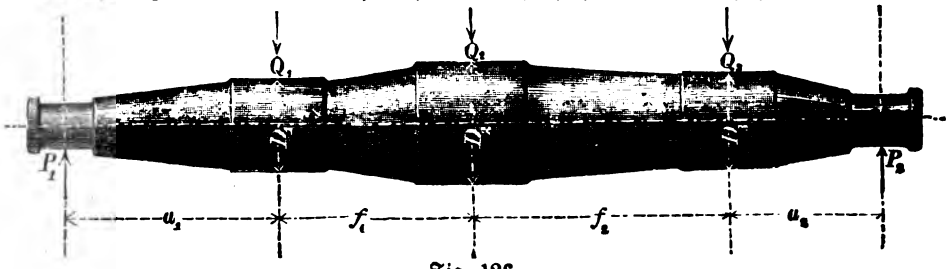


Fig. 126.

Mit Bezug auf die in nebenstehender Fig. 126 eingeführte Bezeichnung erhalten wir, wenn zunächst bei P_2 der Null-Punkt des Systems gedacht wird:

$$P_1 (a_1 + f_1 + f_2 + a_2) = Q (f_1 + f_2 + a_2) + Q_2 (f_2 + a_2) + Q_3 a_2$$

$$P_1 = \frac{Q_1 (f_1 + f_2 + a_2) + Q_2 (f_2 + a_2) + Q_3 a_2}{a_1 + f_1 + f_2 + a_2}$$

$$P_1 = Q_1 \frac{f_1 + f_2 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right) + a_2 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1}\right)}{a_1 + f_1 + f_2 + a_2} \quad \ldots (42)$$

$$P_2 = Q_3 \frac{f_2 + f_1 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_3}\right) + a_1 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_3} + \frac{Q_1}{Q_3}\right)}{a_1 + f_1 + f_2 + a_2} \quad \ldots (43).$$

Anmerkung. Die Gleichung (42) z. B. geht in die für zwei- und einfach-belastete Axen über, wenn man darin bzhtl. $Q_3 = f_2 = 0$ und $Q_3 = f_2 = Q_2 = f_2 = 0$ setzt.

Die Berechnung der Axenquerschnitte an den Tragpunkten machen wir hier der Einfachheit wegen so, daß wir uns direct auf den Zapfen bei P_1 beziehen und die bekannte Proportion für D_3 hier ansetzen:

$$\frac{P_1 l_1}{2} : P_1 (a_1 + f_1 + f_2) - Q_1 (f_1 + f_2) - Q_2 f_2 = d_1^3 : D_3^3.$$

Daraus ist:

$$\frac{D_3^3}{d_1^3} = \frac{P_1 (a_1 + f_1 + f_2) - Q_1 (f_1 + f_2) - Q_2 f_2}{P_1 \frac{l_1}{2}}$$

$$D_3 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2\left[a_1 + f_1 \left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right) + f_2 \left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1}\right)\right]}{l_1}} \quad \ldots (44).$$

Digitized by Google

Die betreffenden Werthe für D_2 und D_1 ergeben sich aus Formel (44), wenn man darin bzhtl. $f_2 = 0$ und $f_2 = f_1 = 0$ setzt. — Alles Uebrige ist bekannt. —

Beispiele.

1. Aufgabe. Fig. 1, Bl. LXVIII. Die Länge einer schmiedeisernen Axe sei von Mitte zu Mitte Lager 2,5^m. Von Mitte eines Lagers (links) bis zur Mitte des nächsten Axenkopfes sind 0,6^m, von da bis zum zweiten Axenkopfe 0,5^m und von hier bis zum dritten 0,9^m. Die beiden Axenköpfe links haben eine Normal-Belastung von je 5000^k und der dritte eine solche von 7000^k zu tragen; es ist also der Gesammtdruck auf die beiden Zapfen = 17000^k. Die Axe ist zu berechnen und zu construiren.

Auflösung. Mit Benutzung der Formeln (42) und (43) erhält man für die Zapfendrücke hier:

$$P_1 = 2\,(500 + 900 \,.\, 2 + 500 \,.\, \tfrac{17}{5}) = 8000^k$$

und $$P_2 = 7000 \,.\, \frac{900 + 500\,(1 + \frac{5}{7}) + 600\,(1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7})}{2500} = 9000^k,$$

was zusammen in der That = 17000^k ausmacht.

Die Zapfendimensionen sind nach Formel (3) und (4):

$$d_1 = 100;\ l_1 = 150$$
$$d_2 = 107;\ l_2 = 160.$$

Die beiden Schenkel a_1 und a_2 der Axe bestimmen wir wie früher, und zwar in 5 verschnittenen Schnitten, sodaß für a_1 entsteht:

$$x = 120;\ 240;\ 360;\ 480;\ a_1 = 600$$
$$y = 117;\ 147;\ 168;\ 185;\ D_1 = 200$$

und für a_2: $$x = 100;\ 200;\ 300;\ 400;\ a_2 = 500$$
$$y = 115;\ 145;\ 166;\ 183;\ D_3 = 197.$$

Den Durchmesser dieses Axenkopfes neben dem kürzeren Schenkel erhalten wir ebenso aus Formel (44) zu:

$$D_3 = 100 \sqrt[3]{\frac{2\,[600 + 500\,(1 - {}^5/_8) + 900\,(1 - {}^5/_8 - {}^5/_8)]}{150}}$$

$$= 100 \sqrt[3]{\frac{2\,[600 + 187{,}5 - 225]}{150}} = 197.$$

Setzen wir ferner in Formel (44) $f_2 = 0$, so erhalten wir den Durchmesser D_2 des mittleren Axenkopfes zu:

$$D_2 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2\left(a_1 + f_1\left(1 - \frac{Q_2}{P_1}\right)\right)}{l_1}}$$

und in Zahlen:

$$D_2 = 100 \sqrt[3]{\frac{2\,[600 + 500\,(1 - {}^5/_8)]}{150}} = 218^{mm}.$$

Endlich ist, wenn wir in Formel (44) auch noch $f_1 = 0$ setzen:

Digitized by Google

$$D_1 = b_1 \sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}} = 100 \sqrt[3]{\frac{1200}{150}} = 100 \sqrt[3]{8} = 200^{mm},$$

wie wir bereits oben fanden.

Tragen wir nun die so gefundenen Dimensionen in den gehörigen Axial-Abständen auf, und geben wir den Axenköpfen eine entsprechende Verstärkung und Längen, wie es die aufzusteckenden Naben und Rosetten verlangen (Fig. 1, Bl. LXVIII), so ist die Axe bis auf die zwei Schafttheile fertig construirt. Für diese Letzteren lassen sich analog der Formel (44) einzelne Durchmesser ableiten. Allein es hat uns bereits Fig. 5 des vorhergehenden Blattes gezeigt, daß die genaue theoretische Profilform in solchem Falle nicht wesentlich von der angenäherten Kegelform abweicht, und man kann deshalb, wenn es sich nicht um sehr große Lasten und besondere Genauigkeit handelt, ohne weiteres die Axenkopfbegrenzungen geradlinig verbinden. — Aus dem Vorstehenden wird man nun ohne Schwierigkeit die allgemeine Methode dieser statischen Berechnungen erkennen, sodaß man auch für die Fälle, wo mehr als drei Belastungspunkte vorhanden sind, oder wo einer der Schenkel negativ ist, den richtigen Weg zur Erlangung der Dimensionen einschlagen wird. —

Reine Axen mit zusammengesetzten (insbesondere zusammengesetzten Schaft-) Querschnitten.

Für Axen, welche in Gußeisen ausgeführt werden, wählt man — wenigstens bei voraussichtlich großen Querschnittsdimensionen — vorzugsweise combinirte Querschnittsformen, da solche Axen leichter fehlerfrei gegossen werden können als massive, bei denen das Gußmaterial einen ungegliederten, starken Körper bildet. Dieselben werden durch Verbindung von Kreis mit Kreis oder von Kreis mit Rechteck componirt und womöglich immer so, daß sie in Bezug auf zwei zu einander rechtwinklige Schwerpunktsaxen dieselbe Symetrie zeigen, weil nur dadurch in den verschiedenen Lagen der sich drehenden Axe eine genau oder annähernd gleiche Widerstandsfähigkeit gegen Biegung erzielt wird.

a) Gußeiserne Axen mit Kreisringquerschnitt.

Von den Axen mit zusammengesetzten Querschnitten ist die vorliegende Art am einfachsten und billigsten herzustellen, da man in der Regel kein Holzmodell braucht, sondern selbige ohne weiteres in Lehm modelliren kann, wie es bei hohlen Rotationskörpern überhaupt meistens geschieht. Die Construction und äußere Gestalt der hohlen Gußaxen ist ebenso wie bei massiven Axen mit Kreisquerschnitt.

Die Berechnung macht man entweder so, daß man zuerst die Zapfen nach der auf pag. 93 angeführten Methode als hohle Zapfen dem äußeren Durchmesser nach bestimmt, dieselben nach einem angenommenen Höhlungsverhältnisse $\left(\beta = \frac{b}{D}\right)$ aushöhlt und darauf die übrigen Querschnitte der Axe mit Zugrundelegung der Proportionalität von Biegungs- und Widerstandsmomenten für einen bekannten und einen zu berechnenden Querschnitt ableitet, wie wir es bisher bei den massiv-kreisförmigen Axen gehalten haben.

Digitized by Google

Die Axen Fig. 2, 3 und 4, Bl. LXVIII haben wir, um einen Vergleich der verschiedenen Constructionen zu erleichtern, für dieselben Verhältnisse construirt, und zu diesem Zwecke die anderweite Methode der Berechnung angewendet, bei welcher man eine sogenannte ideelle Axe zu Grunde legt.

Man berechnet also zuerst die vollständige massive Gußaxe, welche nun für die genannten drei Beispiele dieselbe ist, und wandelt alsdann die vollen Kreisquerschnitte in combinirte mit derselben Tragfähigkeit um, indem man den Querschnittsmodulus $\left(q = \frac{J}{a}\right)$ des vollen Kreisquerschnittes gleich demjenigen des combinirten Querschnittes setzt.

Anmerkung. Die Anwendung hohler Formen zeigt sich in solchen Fällen als durchaus rationell, besonders rücksichtlich der Materialersparniß. So ergiebt z. B. die Vergleichung der Querschnittsmoduli eines vollen und eines um $^1/_3$ des äußern Durchmessers ausgehöhlten Kreisquerschnittes vom selben Durchmesser d —

$$\frac{\pi}{32} d^3 : \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d^4 - (0{,}33\,d)^4}{d} = d^3 : d^3 - 0{,}11866\,d^3 = 1 : 0{,}988$$

— eine nur um das 0,012-fache verminderte Festigkeit des hohlen Querschnittes gegenüber dem vollen, während die Materialersparniß bei dem Ringquerschnitte im Vergleich zum vollen —

$$\frac{\pi}{4} d^2 : \frac{\pi}{4} (d^2 - 0{,}1089\,d^2) = 1 : 0{,}891$$

— beinahe 0,11 beträgt.

Man kann deshalb auch die vollberechneten Zapfen und Schenkel der Flügelaxen (Fig. 3 und 4) ohne Bedenken um $^1/_3$ ihres jetzigen Durchmessers aushöhlen; denn der geringe Festigkeitsverlust von 0,012 wird jedenfalls durch den dichteren Guß aufgewogen.

Beispiele.

1. Aufgabe. Hohle Gußaxe Fig. 2, Bl. LXVIII, mit 2 gleichen Belastungen und gleichen Schenkellängen $Q_1 = Q_2 = Q\ 5400^k$; $a_1 = a_2 = a = 450^{mm}$; $f = 1{,}800^m$.

Auflösung. In diesem Falle ist analog pag. 107:

$$P_1 = P_2 = \frac{2Q}{2} = 5400^k = P.$$

Wir erhalten demnach zwei ganz gleiche Stirnzapfen, zwei gleiche Schenkel, zwei gleiche Axenköpfe und ein cylindrisches Mittelstück und brauchen die Rechnung dann nur für einen Zapfen und einen Schenkel mit Axenkopf durchzuführen.

Es ist nach Formel (11) für einen gußeisernen massiv-cylindrischen Zapfen, welcher hier als ideeller Zapfen zu Grunde gelegt wird:

$$d_0 = 1{,}5\sqrt{P} = 1{,}5\sqrt{5400} = 1{,}5 \,.\, 73{,}48 = 110^{mm}$$
$$l_0 = 1{,}3 \,.\, d_0 = 1{,}3 \,.\, 110 = 145^{mm}.$$

Nehmen wir in den Schenkeln fünf Schnitte in den gleichen Abständen von je 90^{mm} an, so erhalten wir für die Schenkelprofile der massiven Gußaxe die Dimensionen:

Digitized by Google

$$y_0 = b_0 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_0}} = \left(b_0 \sqrt[3]{\frac{2}{l_0}}\right) \sqrt[3]{x} = 26{,}4 \sqrt[3]{x}$$

$x = 90;\ 180;\ 270;\ 360;\ a = 450$

$y_0 = 118;\ 149;\ 170;\ 188;\ D_0 = 202.$

Da ferner unter den in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen —

$$a_1 = a_2 \text{ und } Q_1 = Q_2$$

— Formel (38) übergeht in

$$y = D_1,$$

so ist im vorliegenden Falle der Durchmesser des massiv-cylindrischen Schaftes $D_0 = 202^{mm}$.

Aus Rücksicht für den Einfluß des Eigengewichtes giebt man besser dem Schafte eine nach der Schwerpunktslage derselben hin zunehmende Stärke, da das Eigengewicht als eine über den Körper gleichmäßig vertheilte Belastung angesehen werden kann. —

So hätten wir nun die ideelle massive Gußaxe construirt, und es handelt sich nun darum, die vollen Kreisquerschnitte derselben in ringförmige umzuwandeln. Dabei verfahren wir gerade so, wie pag. 93 bei den hohlen Zapfen geschehen ist. In Tab. IX. pag. 94 haben wir die drei Bedingungen:

$$\frac{\mathfrak{D}}{L} = \frac{b_0}{l_0};\ L = l_0;\ \mathfrak{D} L = b_0 l_0;$$

d. h der hohle Zapfen hat entweder dasselbe Längenverhältniß wie der gleichwerthig-massive oder er hat dieselbe Länge wie dieser, oder endlich, er erleidet denselben specifischen Flächendruck wie der massive. Am üblichsten ist davon die zweite Bedingung $L = l_0$, und wollen wir dieselbe auch hier annehmen, sodaß wir erhalten:

$$L = l_0 = 145^{mm}.$$

Wählen wir ferner unter den Höhlungsverhältnissen $\beta = 0{,}5$ (Tab. IX), so ist $\frac{\mathfrak{D}}{b_0} = 1{,}02$, und wir erhalten im vorliegenden Falle eine Wandstärke der Zapfen: $\delta = 28$. Das ist etwas zu stark, und da hier der innere Durchmesser $\mathfrak{d} = 56^{mm}$, so erhält man eine verhältnißmäßig zu schwache Höhlung, sodaß unter Umständen die Kernspindel für den Formkern darin nicht Platz genug haben würde.

Bei $\beta = 0{,}7$ ist $\delta = 18$; das ist zu wenig. Wir nehmen daher $\beta = 0{,}6$. Diesem entspricht: $\frac{\mathfrak{D}}{b_0} = 1{,}05$, und ist alsdann der äußere Durchmesser der Zapfen: $\mathfrak{D} = 1{,}05 \cdot b_0 = 1{,}05 \cdot 110 = 116^{mm}$;
der innere Durchmesser derselben:

$$\mathfrak{d} = 0{,}6 \cdot \mathfrak{D} = 0{,}6 \cdot 116 = 70^{mm}.$$

Danach ist die Wandstärke bei den Zapfen $\delta = 23^{mm}$.

Bezeichnen wir nun die äußeren Durchmesser der hohlen Schenkel in den betr. fünf Schnitten mit y und die zugehörigen inneren mit y', so erhalten wir für die hohle Axe durch Querschnittsverwandlung:

für $x = 90;\ 180;\ 270;\ 360;\ a = 450$

$y = 124;\ 156;\ 178;\ 197;\ D = 212$

$y' = 74;\ 93;\ 107;\ 118;\ D' = 127$

$\delta = 25;\ 31{,}5;\ 35{,}5;\ 39{,}5;\ \delta = 42{,}5.$

Digitized by Google

Beim Aufzeichnen der hohlen Axe Fig. 2, Bl. LXVIII geben wir dem Zapfen rund 120mm äußeren Durchmesser und den Axenköpfen 230mm, sodaß man mit der angenäherten Kegelform der Schenkel noch bequem außerhalb der cubischen Parabel bleibt.

Vergleicht man nun die d und y der letzteren Reihen mit den d_0 und y_0 der vorhergehenden, so erkennt man, daß die äußeren Durchmesser der hohlen Kreisquerschnitte hier nur um 0,05 d_0 resp. 0,05 y_0 größer sind als die der vollen, während man beim hohlen Querschnitte einen Kreis von fast $^2/_3$ y concentrisch herausgenommen hat, sodaß sich bei nur geringer Vermehrung der äußeren Durchmesser eine ganz namhafte Materialersparniß ergiebt; der dabei erzielte dichtere Guß ist noch außerdem vortheilhaft.

b) Gußeiserne Axen mit Kreuzquerschnitt.

Speciell bei den Wasserrädern kommen neben den Hohlguß-Axen besonders noch gefiederte, sogenannte Flügelaxen vor, d. s. gußeiserne Axen mit Kreuzquerschnitt. Dieselben werden gewöhnlich für zwei oder drei Tragpunkte construirt und sind immer zwei von diesen, wie das zur Erzielung von Minimaldimensionen überhaupt nothwendig ist, möglichst nahe dem Zapfen gelegen, während event. der dritte regelmäßig in der Mitte zwischen den beiden andern angeordnet wird.

Diese Axenköpfe sind an der Oberfläche entweder volle Cylinder oder axiale Streifen einer Cylinderfläche. Im letzteren Falle ist der Querschnitt der Axenköpfe ebenfalls kreuzförmig, und es werden die Flügel dann an der Oberfläche abgedreht und sämmtlich oder zum Theil mit Keilnuten versehen; in dieser Weise wird meistens der mittlere, wenn drei Axenköpfe vorhanden sind, ausgeführt. Die Schenkel solcher Flügelaxen sind entweder massiv, wie in Fig. 5, Bl. LXVII und Fig. 1, Bl. LXVIII oder hohl, wie in Fig. 2, Bl. LXVIII.

Wesentlich Neues bietet sich uns hier also eigentlich nur in Bezug auf den Schaft, indem gewöhnlich nur dieser in kreuzförmigem Querschnitte ausgeführt wird.

Untersuchen wir einmal bei einem einfachen Kreuzquerschnitte den Einfluß der Lage in Bezug auf die in jedem Falle als vertical abwärts wirkende Belastung. Es sei in Fig. 127 ein solcher Querschnitt in zwei verschiedenen Lagen gezeichnet: Einmal (I) bildet die Höhe (h) eines Flügels mit der Verticalen einen Winkel = Null, einmal (II) sei dieser Winkel = α. Im Falle I sei die Entfernung der am weitesten vom Schwerpunkte gelegenen Querschnittselemente = a, im Falle II gleich a'. Es ist nun:

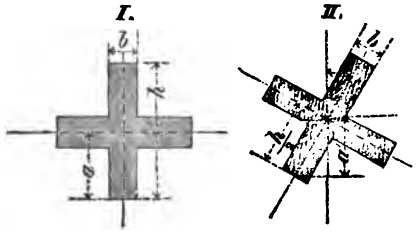


Fig. 127.

$$\text{I)}\quad a = \frac{h}{2}$$

$$\text{II)}\quad a' = \frac{h}{2}\cos\alpha.$$

Während der $^1/_4$-Drehung eines Flügels durchläuft Winkel α die Größen von 0° bis 90°, und demnach erhält cos α nach einander die Werthe von 1 bis 0.

Digitized by Google

Im vorliegenden Falle kommt jedoch nur $^1/_8$-Drehung in Frage, denn wenn $\alpha > 45^0$, so ist das (a) im Sinne der Biegungsfestigkeit bereits wieder in dem bei der Drehung nachfolgenden Flügel zu suchen. Wir haben also $\left(a' : \frac{h}{2}\right)$ nur in den Grenzen 1 und $^1/_2 \sqrt{2}$ oder zwischen 1 und 0,7 zu suchen.

$\cos \alpha = 1$ (d. h. $\alpha = 0$) giebt den Fall (I), $a' = a = \frac{h}{2}$;

$\cos \alpha = 0{,}7$ (d. h. $\alpha = 45^0$) giebt $a' = 0{,}7 \frac{h}{2}$.

Da nun in dem Ausdrucke

$$Pl = \frac{J}{a} s$$

a als Divisor auftritt, so wird der gefährlichere Fall der sein, wo a seinen größten Wert erlangt; und das ist vorwiegend bei $\alpha = 0$, also wenn ein Flügel in die Verticalebene und der andere in die Horizontalebene fällt. Diesen Fall legen wir bei den folgenden Rechnungen deshalb zu Grunde, weil für denselben sich die geringste Tragfähigkeit (P) ergiebt, oder weil für eine bekannte Kraft (P) man dann größere, d. h. dem ungünstigsten Falle entsprechende Querschnittsdimensionen erhält.

Indem man Kreuzquerschnitte bei Axen anwendet, bezweckt man (wie bei Hohlguß) damit, an Stelle der im Gusse leicht undicht ausfallenden vollen, massiven Körper gegliederte, schwachwandige herzustellen. Da nun bei zwei- oder dreifach-belasteten Axen (d. A. Fig. 5, Bl. LXVII und Fig. 1, Bl. LXVIII) bei vollem Kreisquerschnitte der Schaft niemals schwächer wird als der entsprechende Axenkopf (nach der Rechnung), so ersieht man, daß ein gleichwerthiger Flügelquerschnitt größere Dimensionen haben muß als ein voller Kreisquerschnitt. Damit aber an den (resp. an den beiden äußeren) Axenköpfen ein gehöriger Uebergang der verschiedenen Querschnitte bewirkt werden kann, giebt man den Flügeln ein von der Mitte (resp. dem mittleren Axenkopfe) aus nach den Enden hin sich verjüngendes Profil, das sich durch Construction und im Modelle leicht herstellen läßt. Auch macht man bei diesen Axen die (event. die bei den äußeren) Axenköpfe deshalb möglichst gleichstark — und zwar so, wie es das bei der Rechnung erhaltene größere Resultat erfordert — damit man auch in Bezug auf die Verticalebene ein symetrisches Flügelprofil erhält.

Fig. 128 zeigt eine Form des Kreuzquerschnittes, welche die üblichsten dieser Art Flügelquerschnitte in sich enthält, und für welche das Trägheitsmoment (J) aus solchen für Rechtecke und Kreis nach Tab. II, pag. 46 und 47 durch Addition und Subtraction abgeleitet werden kann.

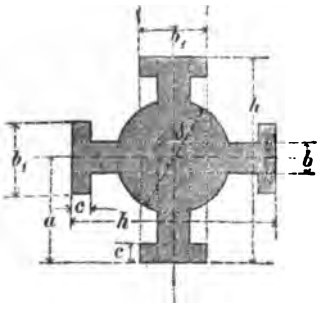


Fig. 128.

Die Berechnung von Flügel-Axen wird nämlich auf dieselbe Weise vorgenommen wie die der hohlen. Man berechnet immer wieder zuerst die Zapfendrücke aus den gegebenen Belastungen und Schenkel- resp. Schaftlängen, ermittelt die Zapfendimensionen und die darauf bezogenen Durchmesser der Schenkel und Axenköpfe, sowie die Durchmesser eines als massiv angenommenen Schaftes mit Kreisquerschnitt (Durchm. = y) von demselben Materiale wie die zu con-

Digitized by Google

struirende Axe. Erst hieraus leitet man unter Zugrundelegung des Satzes von der gleichen Widerstandsfähigkeit der Querschnitte mit gleichem Querschnittsmodulus $\left(\frac{J}{a} = q\right)$ die den einzelnen Stellen des Schaftes zukommenden Kreuzquerschnittsdimensionen ab. Bei dieser Rechnung erhält man also auf einer Seite der Gleichung den Querschnittsmodulus des vollen Kreuzquerschnittes:

$$q = \frac{J}{a} = \frac{\pi}{32} y^3.$$

Auf der anderen Seite stehen dann die einzelnen Trägheitsmomente derjenigen Flächen, in welche man sich im vorliegenden Falle (Fig. 128) den Querschnitt im Sinne der Festigkeitslehre zerlegt denken kann. Dieselben, im Sinne der Geometrie addirt*) und zusammen durch die Größe $a = \frac{h}{2}$ dividirt, geben den Querschnittsmodulus der genannten Figur, welcher gleich sein muß dem obigen (q).

Es entsteht darnach folgende Gleichung:

$$\frac{\pi}{32} y^3 = \frac{2}{h}\left\{\overset{1}{\frac{\pi}{64}\delta^4} + \frac{(h-\delta)\,b^3}{12} + \frac{2\,c\,(b_1{}^{\overset{3}{3}} - b^3)}{12} + \frac{b\,(\overset{4}{h^3} - \delta^3)}{12}\right.$$
$$\left. + \frac{(b_1 - b)\,[h^3 - (\overset{5}{h} - 2c)^3]}{12}\right\}$$

1. Glied = Trägheitsmoment der Kreisfläche vom Durchmesser δ,
2. Glied = Trägheitsmoment der 2 horizontalen (Fig. 128) Flügel (ohne Saumnerven),
3. Glied = Trägheitsmoment der Saumnerven dieser Flügel,
4. Glied = Trägheitsmoment der 2 verticalen Flügel (ohne Saumnerven),
5. Glied = Trägheitsmoment der Saumnerven dieser Flügel.

Nehmen wir hierin 12 als gemeinschaftlicher Nenner heraus, so ist:

$$\frac{\pi}{32} y^3 = \frac{1}{6h}\left\{0{,}589\,\delta^4 + (h-\delta)\,b^3 + 2c\,(b_1{}^3 - b^3) + b\,(h^3 - \delta^3)\right.$$
$$\left. + (b_1 - b)\,[h^3 - (h - 2c)^3]\right\}$$

und wenn wir noch $(h - 2c)^3$ ausrechnen, so erhalten wir:

$$\frac{\pi}{32} y^3 = \frac{1}{6h}\left\{0{,}589\,\delta^4 + (h-\delta)\,b^3 + 2c\,(b_1{}^3 - b^3)\right.$$
$$\left. + b\,(h^3 - \delta^3) + (b_1 - b)\,[6ch^2 - 12c^2h + 8c^3]\right\} \quad \ldots \quad (45).$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für die Umrechnung von einem vollen Kreisquerschnitte mit dem Durchmesser y in einen gleichwerthigen Kreuzquerschnitt mit der Flügelhöhe h, der Flügelstärke b, mit dem Kerndurchmesser δ, der Saumnervenbreite b_1 und der Saumnervendicke c.

Will man nun einen solchen Querschnitt anwenden, jedoch ohne Kreiskern, so setzt man in Formel (45) in allen Gliedern, wo es vorkommt, δ = Null. Ausgenommen hierbei ist nur das 4. Glied. Setzt man auch im 4. Gliede δ = Null, so wird dasselbe ein wenig zu groß, weil man dann die kleine quadratische Fläche b^2, in welcher sich die zwei Rechtecke (b . h) der Flügelquerschnitte

*) Geringe Vernachlässigungen sind unter gewöhnlichen Verhältnissen hierbei statthaft.

Digitized by Google

decken, zweimal in Rechnung bringt. Im 4. Gliede darf man dann richtiger nur setzen $\delta = b$.

Setzt man ferner in Gleichung (45) auch noch $b_1 = b$ oder, was dasselbe ist, $c = 0$, so behält man ein reines Kreuz übrig. Am üblichsten sind bei Flügelaxen folgende Querschnitte:

1) $b = \text{constant}$; $b_1 = \text{variabel}$; $c = \text{constant}$; $\delta = 0$ (im 4. Gliede $\delta = b$);
2) $b = \text{constant}$; $b_1 = \text{constant}$; $c = \text{constant}$; $\delta = \text{variabel}$;
3) $b = \text{constant}$; $b_1 = b$; $\delta = \text{constant}$ (cylindrischer Kern; ohne Saumnerven);
4) $b = \text{constant}$; $b_1 = b$; $\delta = \text{variabel}$ (conoidischer Kern; ohne Saumnerven); (Fig. 3, Bl. LXVIII);
5) $b = \text{variabel}$; $b_1 = b$; $\delta = 0$ (im 4. Gliede $\delta = b$); (ohne Kern und ohne Saumnerven) (Fig. 4, Bl. LXVIII).

Beispiele.

1. Aufgabe. Hinsichtlich der Belastungen, sowie der Schenkel- und Schaftlängen conform Aufgabe 1) pag. 119; die Zapfen und Schenkel aber massiv, rund und der Schaft kreuzförmig.

Auflösung. Die Rechnung ist im vorliegenden Falle soweit mit der für Fig. 2, Bl. LXVIII ganz übereinstimmend, als es sich dort um die Berechnung der Dimensionen einer massiv-gußeisernen Axe handelt. Wir haben demnach in Fig. 3, Bl. LXVIII folgende Dimensionen:

Zapfendurchmesser: $d_1 = d_2 = 110^{mm}$
Zapfenlänge: $l_1 = l_2 = 145^{mm}$.

In den fünf Schnitten eines jeden Schenkels:
für die Durchmesser $x = 90;\ 180;\ 270;\ 360;\ a_1 = a_2 = 450^{mm}$
$y = 118;\ 149;\ 170;\ 188;\ D_1 = D_2 = 202^{mm}$.

Wir machen dann in Wirklichkeit die Durchmesser der Axenköpfe $= 210^{mm}$ und nehmen die Länge derselben wie im vorhergehenden Beispiele $= 280^{mm}$.

Sollte man Grund haben zu der Voraussetzung, daß die Nabe der aufzusteckenden Rosette nicht in ihrer ganzen Länge gleichförmig aufsitzt, so müßte man den Durchmesser der Axenköpfe selbst bis auf 220^{mm} erhöhen, welches Maß den Schnitten entspricht, wo die Axenköpfe an den Schaft grenzen.

Für den Schaft selbst wollen wir nun einen einfachen, im Modell leicht ausführbaren Kreuzquerschnitt annehmen, so nämlich, daß wir vier gleichstarke Flügel (ohne Saumnerven) erhalten und wir von den cylindrischen Axenköpfen aus einen passenden Uebergang durch Anwendung eines sich nach der Mitte verjüngenden Kernes erzielen. Es ist nämlich schon zum Voraus ersichtlich, daß, wenn die Flügelhöhe sich von der Mitte aus nach den Enden hin verjüngt, umgekehrt, da im vorliegenden Falle der Schaft der massiven runden Axe cylindrisch, also $y = \text{constant}$ ist, der kreisförmige, variable Kern bei constanter Flügelbreite b nach den Enden hin größer werden muß.

Setzen wir also in Formel (45) ein:

$b = \text{constant}$ und $b_1 = b$,

so erhalten wir:

Digitized by Google

$$\frac{\pi}{32} y^3 = \frac{1}{6h} [0{,}589\,\delta^4 + (h - \delta)\, b^3 + b\,(h^3 - \delta^3)] \quad \ldots \quad (I.)$$

Hierin ist allein bekannt $y = 210$, während h, b und δ zu ermitteln sind. Bezüglich der Flügelhöhe (h) stellten wir voran, daß dieselbe stets angenommen werden soll. Das geschieht in der Weise, daß man in der halben Länge des Schaftes eine der Axen- resp. Schaftlänge entsprechende Maximalhöhe annimmt und die Endpunkte dieser Höhe mit den Axenkopfbegrenzungen durch gerade oder krumme Linien verbindet. Wir machen z. B. hier $h = 0{,}15\ (a_1 + f + a_2) = 0{,}15 \,.\, 27000 \sim = 420^{mm}$ und profiliren die Flügel nach *paraboliſchen* Bögen. Wir theilen zu dieſem Zwecke die halbe Schaftlänge MN in ſechs gleiche Theile und ziehen in den Theilpunkten a, b, c, d, e, M Normalen zur geometriſchen Axe des Schaftes. Die Höhe von N bis auf die den Schaft begrenzende Schulter, d. i. die Pfeilhöhe des verlangten Parabelbogens, theilen wir ebenfalls in ſechs gleiche Theile 1, 2, 3 . . ., ziehen von 1, 2, 3, 4, 5 und 6 je eine gerade Linie nach dem Punkte M, ſo ſind die Durchſchnitte von 1 M mit der Normalen in c ꝛc. Punkte der verlangten Curve. Hat man auf dieſe Weiſe für ein Viertel des ſymetriſchen Flügels die Begrenzung beſtimmt, ſo überträgt man dieſelbe mittelſt Abtragens der Coordinaten der einzelnen Punkte auf die übrigen drei Theile oder man fertigt ſich eine Papierſchablone nach dem gefundenen Bogen, welchen man dann ſofort beim Ausziehen der Bleiſtiftzeichnung wieder verwenden kann.

Auf dieſe Weiſe ſind alſo die Höhen der Flügelprofile in den verſchiedenen etwa zu unterſuchenden Querſchnitten des Schaftes feſtgeſtellt, und wir gehen nun über zur Breite b derſelben. Dieſe ſoll durchgehends dieſelbe ſein. Wir können ſie aber aus unſerer ſpecialiſirten Formel nicht entwickeln, weil das unbekannte δ darin iſt. Wir müſſen alſo zum Probiren unſere Zuflucht nehmen. Nun wollen wir, um die Sache zu vereinfachen, einmal noch δ unberückſichtigt laſſen, da beſonders im Mittelſchnitte, den wir jetzt im Auge haben, die in der Nähe der neutralen Axe angeordneten Flächenelemente des Kreiskernes ohne großen Einfluß ſein werden. Wir wollen alſo einmal erſt in Formel (45) ſetzen:

$$b_1 = b \text{ und } \delta = 0.$$

$$\frac{\pi}{32} y^3 = \frac{1}{6h} [h\,b^3 + b\,(b^3 - b^3)] \quad \ldots \quad (II.)$$

Im 4. Gliede iſt alſo, wie wir oben erwähnten, nicht $\delta = 0$, ſondern $\delta = b$. Hier iſt nun $y = 210$ (= Durchmeſſer der Axenköpfe resp. des maſſivcylindriſchen Schaftes) $h = 420$:

$$0{,}09816 \,.\, 210^3 = \frac{1}{6 \,.\, 420} [420\,b^3 + b\,(420^3 - b^3)]$$

$$5454730 = b^3 + b \,.\, 420^2 - \frac{b^4}{420}$$

$$5454730 = b^3 + 176400\,b - \frac{b^4}{420}$$

Dieſer Gleichung genügt beinahe der Werth $b = 30$. Wenn wir nämlich $b = 30$ einführen, bekommen wir auf der linken Seite 5317071 anſtatt 5454730. Wir können es aber bei $b = 30^{mm}$ laſſen, da ja in Wirklichkeit noch der Kreiskern hinzukommt.

Digitized by Google

Wäre b nach Formel (II) für $h = 420^{mm}$ zu groß (vielleicht $b > 60^{mm}$) ausgefallen, so müßten wir dann ein höheres Profil wählen, und wäre es umgekehrt zu klein (etwa $b < 20^{mm}$) geworden, so müßten wir das Profil verkleinern.

Führen wir nun die Rippenbreite $b = 30^{mm} = \text{constant}$ in Formel (I) ein, so heißt dieselbe:

$$\frac{\pi}{32}\overline{210}^3 = \frac{1}{h}[0{,}589\delta^4 + (h-\delta)\,27000 + 30h^3 - 30\delta^3].$$

Für den Mittelschnitt des Schaftes ist $h = 420$, demnach:

$$5454730 \,.\, 420 = 0{,}589\delta^4 + 420\,.\,27000 - 27000\delta + 30\,.\,74088000 - 30\delta^3$$
$$2290986600 = 0{,}589\,.\,\delta^4 - 30\delta^3 - 27000\delta + 2233980000$$
$$57006600 = 0{,}589\delta^4 - 30\delta^3 - 27000\delta.$$

Dieser Gleichung genügt der Werth $\delta = 116^{mm}$.

Wir tragen also die constante Rippenbreite $b = 30^{mm}$ in Fig. 3, Bl. LXVIII auf und in der Mitte des Schaftes den Kerndurchmesser rund $\delta = 120$, ziehen von den Endpunkten desselben geradlinig nach den Axenköpfen, so erhalten wir den Kern als zwei sich nach der Schaftmitte hin verjüngende Kegelstumpfe. Es ist dies eine hinreichende Annäherung, während man zur Darstellung der genauen Form nach Formel (I) noch mehrere (δ) für die entsprechenden Profile aufsuchen müßte. Schließlich bringt man in der Mitte des Schaftes, sobald daselbst kein Nabensitz nothwendig ist, zur Aussteifung der Flügel noch Rippen in der Normalebene des Schaftes an.

2. Aufgabe. Es ist eine gußeiserne Flügelaxe für dieselben Bedingungen wie in Aufgabe 1) zu construiren; der Querschnitt des Schaftes sei aber ein bloßes Kreuz.

Auflösung. Fig. 4, Bl. LXVIII zeigt diese Axe, bei welcher also gegen die vorhergehende nur der Schaft etwas anders erscheint. Bei der Berechnung der Querschnitte dieses Schaftes hat man ebenfalls die allgemeine Formel (45) zu benutzen und darin zu setzen:

$$b_1 = b \text{ und } \delta = 0.$$

Dieselbe heißt dann wie Formel (II) pag. 125:

$$\frac{\pi}{32}y^3 = \frac{1}{6h}[hb^3 + b(h^3 - b^3)]$$

und es ist wieder, da $y = 210 = \text{constant}$ angenommen wird:

$$5454730 = b^3 + bh^2 - \frac{b^4}{h}.$$

Die Profilhöhe in der Mitte des Schaftes machen wir wieder $h = 420^{mm}$ und formen das Flügelprofil nach Sinoidenbögen. Zu diesem Zwecke zeichnen wir im Mittelpunkte des Schaftes einen Kreis vom Durchmesser $h = 420^{mm}$ und schneiden davon durch geradlinige Verbindung der Axenkopf-Schultern ein Bogenstück ab, welches wir von M aus in sechs gleiche Theile theilen, wie es in gleicher Weise mit der halben Schaftlänge auf dieser Seite geschieht. Legen wir nun durch die Theilpunkte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Horizontalen und durch die Theilpunkte a, b, c, d, e Normalen, so sind die Punkte, wo sich die Horizontale durch 1 mit der Verticalen durch a, wo sich die Horizontale durch 2 mit der Normalen durch b . . . . schneidet, Punkte der verlangten Sinoide. Ueberträgt man nun

Digitized by Google

den gefundenen Bogen auch auf die übrigen drei Viertel des Flügels, so erhält man das vollständige Flügelprofil, und man kann nun an einzelnen Stellen des Schaftes die Höhen abmessen, um dieselben zur Berechnung der variablen Rippenbreite b an den betreffenden Stellen in Formel (II) einzuführen.

Auf diese Weise erhalten wir für

$h = 420$: $5454730 = b^3 + 176400 \cdot b - \frac{b^4}{420}$; $b = 32^{mm}$

$h = 400$: $5454730 = b^3 + 160000 \cdot b - \frac{b^4}{400}$; $b = 34^{mm}$

$h = 370$: $5454730 = b^3 + 136900 \cdot b - \frac{b^4}{370}$; $b = 39^{mm}$

$h = 333$: $5454730 = b^3 + 110889 \cdot b - \frac{b^4}{333}$; $b = 49^{mm}$

$h = 288$: $5454730 = b^3 + 82944 \cdot b - \frac{b^4}{288}$; $b = 65^{mm}$

$h = 258$: $5454730 = b^3 + 66564 \cdot b - \frac{b^4}{258}$; $b = 82^{mm}$.

Trägt man nun diese Flügelbreiten der Reihe nach in den betreffenden Punkten auf, verbindet dieselben durch stetige krumme Linien und nimmt man an, daß der Schaft wie aus einem Rotationskörper herausgeschält erscheinen soll, daß also die Kreuzquerschnitte in einen Kreis eingeschrieben werden können, so erhält man zwei in die Conturen der Flügelprofile verlaufende Curven.

Hölzerne Axen.

Eine besondere Beachtung verdienen, selbst bei der immer mehr sich geltend machenden Verdrängung des Holzes durch Eisen, die hölzernen Axen, welche namentlich bei Wasserrädern, Windrädern, Krahnen ꝛc. noch vorkommen.

Wenn schon die ungleichartige Beschaffenheit des Holzes und die vielfach schwankenden Festigkeitscoefficienten, sowie die immerhin leichte Zerstörbarkeit des Holzes die Vortheile einer genauen Berechnung etwas illusorisch machen, so lohnt es sich doch in den meisten Fällen der Mühe, wenigstens eine Festigkeitsprüfung durch Rechnung anzustellen; dabei steht es Einem immer noch frei, die gefundenen Resultate den speciellen Umständen entsprechend abzuändern.

Zunächst leuchtet ein, daß man die Drehzapfen einer hölzernen Axe nicht auch aus Holz machen kann, daß man vielmehr dazu Guß- oder Schmiedeisen anwenden muß. Weiter folgt, daß man diese Zapfen mit der Holzaxe in gehörige, feste Verbindung zu bringen hat. In Fig. 5, Bl. LXVIII haben wir zwei der gebräuchlichsten Zapfenverbindungen verwendet. Der eine Zapfen (links) ist ein sogenannter vierflüglicher Blattzapfen von Gußeisen, der andere (rechts) besteht ebenfalls aus einem cylindrischen Zapfen mit nach innen verlaufendem conischen Kern, von dem aus sich in zwei zu einander normalen Ebenen die Flügel verbreiten; diese sind aber hier an ihrem äußeren Umfange noch durch eine conische, angegossene Hülse verbunden. Solche Blattzapfen mit Hülse wendet man besonders da an, wo die Rosette sehr nahe dem Zapfen angeordnet wird, weil man nämlich die Hülse sofort als Nabensitz benutzen kann. Man gießt zu diesem

Digitized by Google

Zwecke am äußeren Umfange der Hülse 4, 6 oder 8 Keilbahnen auf, welche dann abgedreht und mit Keilnuten versehen werden. In den conisch abgearbeiteten und kreuzweise durchbrochenen Schenkel der Holzaxe schneidet man dann noch Aussparungen ein, in denen die Hakenschrauben zur Befestigung und zum Nachziehen des Zapfens eingelassen werden. Dieselben gehen vorn cylindrisch durch an der Stirnseite angegossene Augen und erhalten daselbst Vorlegscheiben mit Muttern vorgeschraubt. Die Blattzapfen haben oft nur 2 oder 3 Flügel und werden, wenn sie ohne Hülse sind, durch warm aufgezogene, schmiedeiserne Binderinge an dem Holzkörper befestigt. Die zweiflüglichen Blattzapfen macht man, speciell für starke Belastungen, mitunter auch von Schmiedeisen.

Die Berechnung hölzerner Axen erfolgt nun gewöhnlich in der Weise, daß man — je nachdem gußeiserne oder schmiedeiserne Zapfen verwendet werden sollen — zuerst eine guß- resp. schmiedeiserne Axe nach Zapfen und Axenkopfdimensionen ausmittelt und dann den Querschnitt des (bei verschiedenen Axenköpfen größeren) Axenkopfes für Holz als Material umrechnet. Mit der Materialersparniß nimmt man es hier natürlich nicht so genau wie bei Eisen, und deshalb giebt man dem Schafte eine prismatische Gestalt.

Die Querschnitte der hölzernen Axen sind entweder vier-, sechs-, acht- oder vieleckige Polygone oder Kreise, und muß man die Dimensionen derselben oft entweder der Zapfenverbindung entsprechend vergrößern, oder auch dann, wenn die Axe etwa für durchzusteckende Arme u. dergl. durchbrochen wird.

Beispiele.

1. Aufgabe. Es ist eine hölzerne Wasserradaxe zu construiren. Die Länge derselben zwischen den Zapfenmitteln betrage $2{,}7^{m}$, die Schenkellängen seien $a_1 = 0{,}8^{m}$ und $a_2 = 0{,}45^{m}$, und die betr. Belastungen normal zur Axe $Q_1 = 4000^{k}$ und $Q_2 = 5000^{k}$. Die Zapfen sind von Gußeisen.

Auflösung. Fig. 5, Bl. LXVIII. Zur Ermittelung der Zapfendrücke P_1 und P_2 haben wir die statischen Gleichungen zu benutzen, welche wir bei der zweifach-belasteten Axe pag. 112 ableiteten.

Es ist also:

$$P_1 = Q_1 \frac{f + a_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right)}{a_1 + f + a_2}$$

$$P_1 = 5000 \frac{1450 + 450\,(1 + {}^{4}/_{5})}{2700} = 4185^{k}$$

und

$$P_2 + Q_2 \frac{f + a_1\left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right)}{a_1 + f + a_2}$$

$$P_1 = 4000 \frac{1450 + 800\,(1 + {}^{5}/_{4})}{2700} = 4815^{k}.$$

Probe: $4000 + 5000 = 9000 = 4185 + 4815$.

Die Durchmesser der Zapfen sind nach Formel (11) für ein Längenverhältniß von $\frac{l}{b} = 1{,}3$ zu berechnen; da wir aber im vorliegenden Falle (Fig. 5, Bl. LXVIII)

Digitized by Google

das Längenverhältniß $\frac{b}{l} = 1{,}5$ voraussetzen, so müssen wir die Durchmesser entsprechend vergrößern.

Es seien b und l die Dimensionen eines Zapfens für $\frac{l}{b} = 1{,}3$, b' und l' diejenigen eines Zapfens mit dem Verhältnis $\frac{l'}{b'} = 1{,}5$; dann sind die entsprechenden Momentengleichungen:

$$P\frac{l}{2} = \frac{J}{a}s = \frac{\pi}{32}b^3 s$$

und

$$P\frac{l'}{2} = \frac{J}{a}s = \frac{\pi}{32}b'^3 s.$$

Dieselben geben durch einander dividirt:

$$l : l' = b^3 : b'^3.$$

Also ist:

$$b'^3 = b^3\frac{l'}{l}$$

und für l und l' die Werthe 1,3 b und 1,5 b' eingesetzt:

$$b' = b\sqrt[3]{\frac{1{,}5}{1{,}3}} = 1{,}154\,b.$$

Nun ist zunächst:

$$b_1 = 1{,}5\sqrt{P_1} = 1{,}5\sqrt{4185} = 97$$
$$b'_1 = 1{,}154 \cdot 97 = 112^{mm} \text{ und } l'_1 = 1{,}5 \cdot 112 = 170^{mm}$$
$$b_2 = 1{,}5\sqrt{P_2} = 1{,}5\sqrt{4815} = 104$$
$$b'_2 = 1{,}154 \cdot 104 = 120^{mm} \text{ und } l_2 = 1{,}5 \cdot 120 = 180^{mm}.$$

Für die Durchmesser D_1 und D_2 der Axenköpfe einer gleichwerthigen gußeisernen, massiven Axe erhalten wir nach Formel (33):

$$D_1 = b'_1\sqrt[3]{\frac{2a_1}{l'_1}} = 112\sqrt[3]{\frac{1600}{170}} = 236^{mm}$$

und

$$D_2 = b'_2\sqrt[3]{\frac{2a_2}{l'_2}} = 120\sqrt[3]{\frac{900}{180}} = 205^{mm}.$$

Das Verhältniß, nach welchem nun diese Axenkopfdurchmesser für Holz umzurechnen sind, ergiebt sich durch Division der zwei Fundamentalformeln für Biegungsfestigkeit, welche einem und demselben Biegungsmomente Pl, aber einmal dem Tragmodulus Z für Gußeisen und dann demjenigen für Holz $= Z_1$ entsprechen. Es ist also:

$$Pl = \frac{\pi}{32}D^3 Z$$

$$Pl = \frac{\pi}{32}D_1{}^3 Z_1.$$

Daraus:

$$D_1 = D\sqrt[3]{\frac{Z}{Z_1}}.$$

Digitized by Google

Nehmen wir an:

für Gußeisen $Z = 7{,}5^k$ pr. $\square^{mm}$,
„ Holz $Z_1 = 2{,}0^k$ „ „

so ist: $$D_1 = D \sqrt[3]{\frac{7{,}5}{2}} = 1{,}553 \,.\, D.$$

Für den größeren Axenkopf erhalten wir also:

$$D'_1 = 1{,}553 \,.\, 236 = 366^{mm};$$

den anderen lassen wir als kleineren ganz unberücksichtigt, da wir die Axe prismatisch machen.

Es würde also die vorliegende Axe in cylindrischer Gestalt eine Stärke $D'_1 = 366^{mm}$ erhalten.

Wollen wir noch wissen, wie groß die Dimensionen bei einem regulär-sechseckigen Querschnitte ausfallen, so haben wir zuerst zu ermitteln, welchen von beiden Querschnittsmoduln — Fig. 77ª oder 77ᵇ, pag. 46 und 47 — wir zu nehmen haben, wenn die Axe in der ungünstigen Lage die gehörige Festigkeit haben soll.

In der Lage Fig. 77ª (flach) ist:

$$b^3 = \frac{M}{0{,}625 \,.\, s'}$$

in der Lage Fig. 77ᵇ (über Eck):

$$b^3 = \frac{M}{0{,}5413 \,.\, s'}$$

Offenbar enthält die letztere Lage den ungünstigeren Fall, weil daselbst b größer ausfällt als nach der ersteren Gleichung. Es ist nun:

$$\frac{\pi}{32} D'^3_1 = 0{,}5413 \,.\, b^3$$

$$b = 0{,}5656 \, D'_1 = 0{,}5656 \,.\, 366$$

$$b = 207^{mm}$$

die Seite des sechseckigen Axenquerschnittes und dieser entspricht:

$$D_0 = 2a = 2 \,.\, 0{,}866 \,.\, b = 1{,}732 \,.\, 207$$

$$D_0 = 358 \sim 360^{mm}$$

als Durchmesser des umschreibenden Kreises. Wollten wir die Holzaxe nicht stärker machen, so würden die Schenkel durch die Aussparungen für die Blattzapfen zu schwach, und wir richten unsere Construction daher nach den Erfordernissen der Zapfenverbindungen und nehmen den Durchmesser des cylindrischen Schaftes $= 470^{mm}$; dann können wir ein beliebiges Polygon darum legen, und wir sind sicher, daß der Schaft noch bedeutend höhere Festigkeit besitzt als die genügende an den Schenkeln ist.

Digitized by Google

8. Wellen.

Erklärung und Eintheilung.

Wellen nennt man im Maschinenbau diejenigen Organe, welche eine Arbeit (Kraft mal Geschwindigkeit) von einem Orte der Anlage nach einem anderen, und zwar meistens mit drehender Bewegungsform, übertragen.

Denken wir uns also z. B. eine cylindrische Welle in zwei Lagern gestützt, an einem Ende derselben eine Kurbel aufgesteckt, welche durch thierische oder Elementar-Kraft in Umdrehung versetzt wird, am anderen Ende entweder eine Rolle mit der Welle fest verbunden, mittelst deren durch Aufwickelung eines Seiles eine Last gehoben wird (Fig. 110, pag. 73) oder ein Rad (Zahnrad oder Riemenscheibe) am Wellenende festgekeilt, welches ein solches an einer zweiten Welle in Umdrehung versetzt und damit einen (nützlichen) Widerstand überwindet, so haben wir die einfachste Vorstellung von einer Torsionswelle.

Das Stück Welle zwischen Kurbel und Rad oder Rolle wird dann in allen Querschnitten gleich stark auf Torsion oder Verdrehung in Anspruch genommen (vergl. pag. 7 und 69 Bd. II). Außerdem aber bewirken das eigene Gewicht der Welle, die von der Welle getragenen Gegenstände — Kurbel, Rad, Rolle, Kupplungen ꝛc. — sowie Zahneingriff, Riemen- und Seilspannung, Frictionsräderdruck, an einer Rolle oder Trommel angehängte Lasten u. dergl. jeder Zeit noch eine Biegungsbelastung der Welle und es hängt dann von dem Einflusse derselben im Vergleich zur Größe der zur übertragenden Arbeit ab, ob jene bei der Berechnung der Wellen zu berücksichtigen ist oder nicht.

Danach unterscheidet man dann reine Wellen, welche nur auf Torsion berechnet werden — bei denen dann stillschweigend vorausgesetzt wird, daß sie auch der in Wirklichkeit unvermeidlichen Biegung noch genügenden Widerstand leisten — und gemischte Wellen, bei denen die Querschnittsdimensionen gleichzeitig in Bezug auf Torsions- und Biegungsbeanspruchung zu berechnen sind. Gemischte Wellen sind dann ganz dasselbe wie gemischte Axen. Wenn man nämlich die verschiedenen daraufbezüglichen Fälle der Praxis ansieht, so findet man, daß dort das Princip der reinen Wellen und Axen niemals genau und scharf begrenzt auftritt, daß vielmehr sich ein allmäliger Uebergang zeigt, welcher durch die gemischten Axen oder Wellen repräsentirt wird. Wir wollen deshalb die Begriffe der reinen Axen und Wellen nur theoretisch auf Grund der zukommenden Berechnungsweisen scheiden und schließlich die gemischten Axen oder Wellen als eine besondere dritte Classe betrachten und behandeln.

Zu den reinen Wellen rechnet man besonders die Transmissionswellen, Vorgelegwellen und überhaupt Wellen in Arbeitsmaschinen, sofern sie nicht hervorragend durch Biegungsbelastung in Anspruch genommen sind.

Form, Material und Herstellung.

Die reinen Wellen sind ausschließlich cylindrisch geformt, werden fast nur aus Schmiedeisen (Walzeisen) gefertigt und kommen sowohl stehend, als auch schräg und liegend vor. Die Länge derselben ist durch die Anlage, durch den geometrischen

Digitized by Google

Zusammenhang der Maschine bedingt. Sobald diese Länge aber das Maß — circa $\div$ 7^m — der praktisch in einem Stücke ausführbaren Wellen überschreitet, muß man mehrere Wellenstücke mit einander durch Kupplungen (s. d.) zu einem Wellenstrange verbinden. Diese Maximallänge für ein Wellenstück ist theils durch die Handhabung beim Walzen und beim Transporte, theils durch die begrenzte Länge der Drehbank gegeben. Uebrigens hält man einmal die Wellen nicht länger, als im Allgemeinen nothwendig erscheint, dann aber darf man auch nicht zuviel Gewicht auf eine derartige Ersparniß legen und dadurch nicht etwa andere Nachtheile herbeiführen oder die Möglichkeit eines leichten Anschlusses, einer Veränderung ꝛc. beeinträchtigen.

Die Querschnitte der reinen Wellen sind, sofern diese cylindrische Gestalt haben, volle Kreise, und zwar innerhalb eines Wellenstückes von demselben Durchmesser. Die Lagerstellen werden in der Regel nur bei denjenigen Wellen abgesetzt, welche dem antreibenden Motore zunächst gelegen sind und überhaupt eine verhältnismäßig bedeutende Reaction in Richtung der geometrischen Axe aufweisen. Da nämlich die Wellen fast immer aus Walzeisen gefertigt werden, so müßte man die Zapfen besonders absetzen, damit würde aber die Torsionsfestigkeit der Welle bis auf die Größe, welche dem Zapfenquerschnitte zukommt, herabgemindert, und das übrige stärkere Stück zwischen den Lagern würde unnöthig viel Material enthalten. Es ließe sich höchstens dadurch rechtfertigen, daß man die übrige Stärke auf die Durchbiegung rechnet. Es sind bei den Wellen, welche oft in sehr langen Strängen auftreten, noch die wesentlichen Umstände zu berücksichtigen, daß einmal in Folge der Temperaturdifferenzen die Wellen sich ausdehnen und verkürzen und in dieser Beziehung mit den an Wänden oder Decken oder auf Fußböden befestigten Lagern nicht gleichen Schritt halten, und daß bei eingedrehten Lagerstellen schon die Montage sehr erschwert wird, daß sogar bei der Wandelbarkeit der Gebäude ꝛc. durch nachträgliche Veränderungen in der gegenseitigen Lage der „festen Flächen" Klemmungen und Brüche doppelt wahrscheinlich werden.

Dieselben Uebelstände haben aufgeschweißte Bunde (solche sind jedoch mitunter durch andere Rücksichten gefordert), abgesehen noch von der vermehrten Kostspieligkeit, welche durch das Aufschweißen und Abdrehen entsteht. Früher, wo man oft noch gußeiserne Wellen anwandte, hatten eingedrehte Lagerstellen und angegossene Bunde ihre volle Berechtigung, weil man da eben nur die Lagerstellen drehte. Ebenso ist dies heutzutage mit den sogenannten schwarzen Wellen, welche, aus Walzeisen bestehend, auch nur an den Lagerstellen ein wenig gedreht werden. Sind die Wellen eingedreht oder mit Bundringen versehen, so versäume man nicht, die Uebergänge durch Hohlkehlen zu bewirken, da durch dieselben der Gefahr eines Bruches in etwas begegnet wird.

Man fertigt also jetzt die Wellen ganz cylindrisch und steckt, um eine Längenverschiebung zu hindern, an geeigneten Stellen neben den Lagern Stellringe auf (s. Fig. 4, Bl. LXX). Das sind einfache schmiedeiserne Ringe, welche leicht auf die Welle gehen und mittelst einer Kopfschraube an jeder beliebigen Stelle festgemacht werden. Aus Rücksicht für etwaige verschiedene Ausdehnungen in Folge von Temperaturdifferenzen, ordnet man bei einem langen Wellenstrange die Stellringe, sofern es aus anderen Gründen statthaft ist, möglichst immer an einer

Digitized by Google

Seite (rechts oder links) der Lager an. Ueberdies haben die Stellringe noch den Vortheil, daß man sie nach etwaigen Lagenänderungen oder nach eingetretener Abnutzung an den Stirnflächen nachstellen kann.

Eine Formänderung, namentlich der Transmissionswellen, läßt sich theoretisch und genau in den meisten Fällen gar nicht bestimmen. Man weiß nur, daß sie durch das Torsionsmoment verwunden und durch das (resultirende) Biegungsmoment durchgebogen werden. Aber namentlich das letztere setzt sich aus so vielen verschiedenen Einflüssen zusammen, daß man nur annähernd durch Schätzung in den einzelnen Fällen demselben bei Bestimmung des Querschnittes Rechnung tragen kann. Jedenfalls befolgt man aber die allgemeine Regel bei der Anordnung, daß man die eine Welle belastenden Gegenstände immer möglichst nahe den Lagern bringt.

Die Herstellung der Wellen zerfällt, wenn man die von dem Walzewerk gelieferten Rundeisenstäbe als Rohmaterial ansieht, in folgende Arbeiten: Wenn das vorhandene Wellenstück zu lang ist, wird es an betr. Stelle rothwarm gemacht und abgeschrotet; wenn es zu kurz ist, wird ein Stück angeschweißt. Es sind dies also Arbeiten für den Schmied, und hat derselbe außerdem darauf zu sehen, daß er die Welle in möglichst geradem Zustande abliefert, unter Umständen also, da die rohe Welle immer nur 2 ÷ 4 mm (für schwarze Wellen sogar nur 1 ÷ 1,5 mm) stärker als die fertig verlangte genommen wird, ein Richten nach Augenmaß oder mittelst Richtscheit resp. Schnur vorzunehmen.

Alsdann wird die Welle an den beiden Enden gekörnert und auf der Drehbank centrirt und, wenn nöthig, nochmals durch Hammerschläge auf die concaven (unterstützten) Stellen oder durch (hydraulischen) Druck auf die convexen Stellen genau durchgerichtet. Hierauf dreht man die Welle durch mindestens zweimaliges Uebergehen — einmal mit einem starken, dann mit einem schwachen Spahne — ab und feilt die Riefen, resp. etwa stehen gebliebene Ungleichheiten bei fortgesetzter Drehung ab, wobei man ein bestimmtes Kaliber für jede Wellenstärke als sicheren Maßstab zu Grunde legt. Dieser ist deshalb wichtig, weil man nur dadurch eine Gewähr erhält, daß die nach übereinstimmenden Stichmaßen ausgebohrten Räder, Riemen- oder Seilscheiben, Kupplungen ꝛc auch bei etwaiger Nachbestellung gut passen.

Lange Wellen, die schwächer sind als 80 ÷ 100 mm, werden nicht mit einem auf den Drehbankwangen hingleitenden und durch das Triebwerk der Drehbank selbstthätig fortbewegten Support und Stahl abgedreht, sondern durch einen sogenannten Schlittensupport. Derselbe besteht aus zwei halbcylindrischen, ausgekehlten Holzbacken, welche durch Schrauben fest an die Welle angedrückt werden und an denen in möglichst unverrückbarer Lage der Drehstahl angebracht ist. Die beim Drehen entstehenden Riefen am Umfange der Welle drücken sich in das Holz ein und leiten die Backen, da dieselben an einer Drehung mit der Welle gehindert sind, an der Welle selbst fort. Natürlich muß man zuerst an einem Ende der Welle ein Stück, so lang wie die Holzbacken, von Hand oder mit Support in der betr. Stärke andrehen. Nachdem schließlich die Wellen fertig gedreht und abgeschlichtet sind, werden in denselben die Nuten für aufzusteckende Gegenstände an den gehörigen Stellen eingehauen oder eingehobelt. —

Digitized by Google

Berechnung der Wellen.

Die Berechnung der Querschnittsdimensionen der Wellen erfolgt, da die Beanspruchung im vorliegenden Falle conform Fig. 109 pag. 73 (durch Drehmoment) stattfindet, nach den Regeln der Torsions- oder Verdrehungsfestigkeit, und hat man einmal genügende Festigkeit anzustreben und zum Andern — besonders bei langen Wellen — darauf zu achten, daß sich dieselben nicht zu stark verwinden. Außer der Torsionsbeanspruchung findet aber, wie früher bemerkt wurde, in den meisten Fällen noch eine Biegungsbelastung statt, und man hat, wo solche für die Bestimmung der Wellenstärke von wesentlichem Einfluß erachtet wird, bei der Dimensionsberechnung dieselbe mit zu berücksichtigen; in welcher Weise dies geschehen kann, werden wir am Schlusse dieses Kapitels besprechen.

Sobald die Angaben für das Verdrehungsmoment bei Aufgaben der Praxis so einfach und klar ausgedrückt sind wie etwa in dem Beispiele Fig. 110, pag. 73 der Festigkeitslehre, so bietet die Lösung der Aufgabe durchaus keine Schwierigkeiten, und man hat einfach die betr. Werthe in die Fundamentalformel (34) einzusetzen und eine Querschnittsdimension daraus zu entwickeln.

Sehr oft, und namentlich bei Transmissionswellen, ist jedoch die Torsionsbelastung derart, daß von einem Wellenstrange aus gleichzeitig (mittelst Riemen- oder Rädertrieb) mehrere Kraftmomente abgegeben werden, daß also die durch einen Motor in die Welle eingeführte Arbeit in mehreren verschiedenen Theilen wieder abgegeben wird, daß, mit anderen Worten, der Widerstand in verschiedenen Portionen und an verschiedenen Stellen wirksam ist. Für eine genaue Rechnung würde es hiernach nothwendig sein, daß man jedes Wellenstück zwischen zwei Orten, wo Kraft abgegeben wird, für sich einzeln berechnete und als Verdrehungsmoment die Summe derjenigen Momente einführte, welche innerhalb der Strecke vom Ende der Welle bis an die fragliche Stelle abgesetzt werden.

Eine Transmission ist demnach zu vergleichen mit einem Baume: Wie sich bei diesem der Stamm, die Aeste und Zweige nach außen an Stärke in dem Maße verjüngen, wie die Abgabe des Saftes in die einzelnen Zweige und Blätter stattfindet, so werden die Transmissionswellen nach ihren Enden hin immer schwächer. Wollte man nun in der Praxis streng hiernach verfahren, so würden selbst Wellenstücke von $5 \div 6^{m}$ Länge, welche im Ganzen aus einer Rundeisenstange hergestellt werden, oft mehreremal abgesetzt werden, sobald an mehreren Stellen derselben Kraft durch Riemen- oder Rädertrieb ꝛc. abgegeben wird. Man würde demnach entweder die Welle gleich aus verschieden starken Wellenstücken zusammenschweißen müssen oder es würden die überflüssigen Stärken in die Spähne gedreht. In jedem Falle würde man mit großem Verlust fabriciren und könnte auch die auf der Welle befindlichen Räder und Scheiben nicht beliebig hin und her rücken, was doch oft sehr wesentlich ist; man läßt daher höchstens an den Kupplungen, welche zwei Wellenstücke mit einander verbinden, eine Verjüngung eintreten, aber auch nur dann, wenn der Unterschied der Wellenstärken der beiden anstoßenden Stücke mindestens $5 \div 10^{mm}$ beträgt.

Während nun bei kurzen Wellen (für Winden u. dergl.) das **Kraftmoment** meistens in der Form PR (= Kraft mal Kurbellänge oder = Zahndruck mal Radhalbmesser), also wie in der Fundamentalformel (34) für Torsionsfestigkeit

Digitized by Google

bekannt ist, rechnet man bei Transmissionswellen bequemer mit dem Verhältniß $\frac{N}{n}$, Pferdestärken durch Umdrehungszahlen, d. h. mit mechanischer Arbeit, beides wird jedoch in Kilogramm-Meter (km) ausgedrückt.

Zur Umrechnung für beide Ausdrücke erhält man eine Formel auf folgende Weise:

Es sei P^k = Kraft in einem Kurbel- oder Theilkreise, am Umfange einer Riemen- oder Seilscheibe ꝛc.,

R^{mm} = deren Hebelarm, Kurbellänge, Theilkreis oder Scheiben-Halbmesser,

v^m = Geschwindigkeit (= Weg in Meter pro 1 Secunde) des Angriffspunktes der Kraft P,

n = Anzahl Umdrehungen pro Minute,

N = „ Pferdestärken; 1 Pferdestärke (HP = horse-power) $= 75^{km}$.

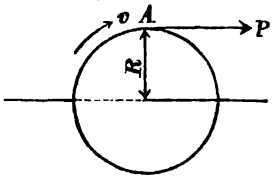


Fig. 129.

Die theoretische Leistung wird in der Mechanik ausgedrückt durch:

$$E = P \,.\, v = 75N.$$

Wenn sich aber der Angriffspunkt A einer Kraft, wie es bei Beanspruchung auf Torsion vorausgesetzt wird, in einem Kreise bewegt, so ist der Weg desselben bei n Umdrehungen in einer Minute:

$$= 2R\pi \,.\, n$$

und in einer Secunde, weil außerdem R in Millimeter und v in Meter ausgedrückt ist:

$$v = \frac{2R\pi \,.\, n}{60 \,.\, 1000}.$$

Demnach ist:

$$Pv = P \,.\, \frac{2R\pi \,.\, n}{60} = 75N$$

und daraus:

$$PR = \frac{60 \,.\, 75 \,.\, 1000}{2\pi} \,.\, \frac{N}{n}$$

$$PR = 716200 \,.\, \frac{N}{n} \quad \ldots \text{ (III.)}$$

Indem wir nun zur Berechnung der Torsionswellen selbst übergehen, bemerken wir, daß wir unsere Betrachtung auf schmiedeiserne und gußeiserne, massiv-cylindrische Wellen beschränken, da die Anwendung der allgemeinen Festigkeitsregeln auf andere Formen und Materiale — was übrigens in der Praxis nicht sehr häufig vorkommt — nach dem Vorausgegangenen keine Schwierigkeiten bietet, uns aber hier zu weit führen würde. Wir behandeln zunächst: A) Die reinen Torsionswellen, a) mit Rücksicht auf Festigkeit allein, b) mit Rücksicht auf Verdrehung allein und B) Das Beispiel einer belasteten, also gemischten Welle.

A. Reine Wellen,

a) mit Rücksicht auf Festigkeit allein berechnet.

Legen wir die allgemeine Formel (34) pag. 71 zu Grunde und nehmen wir an, das Torsionsmoment sei allgemein:

Digitized by Google

$$M = PR,$$

so haben wir: $$PR = \frac{J_p}{a} \cdot s.$$

Für vollen Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d ist das polare Trägheitsmoment:

$$J_p = 2J = 2 \cdot \frac{\pi}{64} d^4; \; a = \frac{d}{2},$$

demnach: $$PR = \frac{\pi}{16} d^3 \cdot s$$

und der Durchmesser:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{PR}{s}}.$$

Die Belastung an der Elasticitätsgrenze ist bei Torsion nach pag. 72 zu nehmen:

$$s = 0{,}8\,Z, \text{ wenn } Z \leqq D;$$

d. i. mit Bezug auf Tab. I, pag. 14 und 15:

für Gußeisen: $s = 0{,}8 \cdot 7{,}5 = 6{,}0^k$ pro $\square^{mm}$

„ Schmiedeisen: $s = 0{,}8 \cdot 14 = 11{,}2^k$ „ „

Davon rechnet man für zulässige Belastung ungefähr die Hälfte und setzt also:

für Gußeisen: $s = 3^k$ pr. $\square^{mm}$.

und „ Schmiedeisen: $s = 6^k$ „ „

Dann ist:

α) der Durchmesser für schmiedeiserne, massiv-cylindrische Wellen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{6\pi}} \sqrt[3]{PR}$$

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{PR} \ldots (46^a).$$

Dasselbe ausgedrückt durch HP und Umdrehungszahlen pr. Minute:

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{716200 \frac{N}{n}}$$

$$d = 85 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (46^b).$$

β) Der Durchmesser derselben Wellen in Gußeisen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}} \sqrt[3]{PR}$$

$$d = 1{,}2 \sqrt[3]{PR} \ldots (47^a)$$

$$d = 107 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (47^b)$$

b) Mit Rücksicht auf die **Größe der Verdrehung** allein berechnet.

Im vorliegenden Falle haben wir Formel (36) und (37) pag. 72 und 73 zu Grunde zu legen und erhalten für α in Bogenmaß:

$$\alpha = \frac{PR}{J_p G} \cdot l = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{PR}{d^4 G} \cdot l;$$

Digitized by Google

für α in Gradmaß:

$$\alpha^0 = \frac{32}{0{,}01745\pi} \cdot \frac{PR}{d^4 G} \cdot l = 583{,}7 \frac{PR}{d^4 G} l.$$

Daraus ist:

$d^4 = 583{,}7 \frac{PR}{\alpha^0 G} l$; oder wenn wir anstatt l, die Länge der Welle in Millimeter, dieselbe L in Meter einführen:

$$d^4 = 583700 \cdot \frac{PR}{\alpha^0 G} L \text{ und}$$

$$d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{PR}{\alpha^0 G} \cdot L}.$$

Die Größe der Verdrehung ist lt. pag. 73 proportional der freien, d. h. der in Betracht kommenden Länge der Welle; wir setzen also z. B.:

$$\alpha^0 = C \cdot L.$$

Dann ist:

$$d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{PR}{CG}}$$

und es bedeutet C eine Constante, welche man für gewöhnliche Fälle zu $^1/_4$ annimmt.

$$\alpha^0 = \tfrac{1}{4} L$$

heißt, daß sich die Welle auf den laufenden Meter um $^1/_4{}^0$, daß eine 20^m lange Welle sich also um 5^0 verdrehen oder verwinden darf.

Den Werth $\alpha^0 = 0{,}25\,L$ in die obige Formel eingeführt, erhält man, wenn außerdem $G = 0{,}4\,\varepsilon = 0{,}4 \cdot 20000 = 8000$ ist:

α) für schmiedeiserne Wellen:

$$d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{PR \cdot L}{8000 \cdot 0{,}25 L}}$$

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR} \quad \ldots\ldots \quad (48^a).$$

Wenn der Widerstand ausgedrückt ist durch Pferdestärken und Umdrehungszahlen:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{716200} \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (48^b).$$

β) Für Gußeisen,

wo $G = 0{,}4\,\varepsilon = 0{,}4 \cdot 10000$, ist:

$$d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{PR}{4000 \cdot 0{,}25}} = \frac{27{,}64}{5{,}62} \sqrt[4]{PR}$$

$$d = 4{,}9 \sqrt[4]{PR} \quad \ldots\ldots \quad (49^a)$$

$$d = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (49^b).$$

Digitized by Google

Beispiele.

1. Aufgabe. Es sind die Durchmesser der schmiedeisernen Wellen einer Windevorrichtung (mit doppelter Uebersetzung) zu berechnen. An der Kurbel, deren Länge $l = 360^{mm}$ beträgt, wirkt eine Kraft $P = 32^{k}$. An dieser Welle sitzt ein Getriebe vom Halbmesser $r_1 = 60^{mm}$ und greift in ein Rad vom Halbmesser $R_1 = 300^{mm}$, auf der zweiten Welle sitzend. Letzterem gegenüber sitzt auf derselben Welle ein Getriebe vom Halbmesser $r_2 = 75^{mm}$, und dieses greift in ein Rad von $R_2 = 300^{mm}$, welches sich auf der Trommelwelle befindet. Der Halbmesser der Trommelwelle beträgt $\varrho = 120^{mm}$.

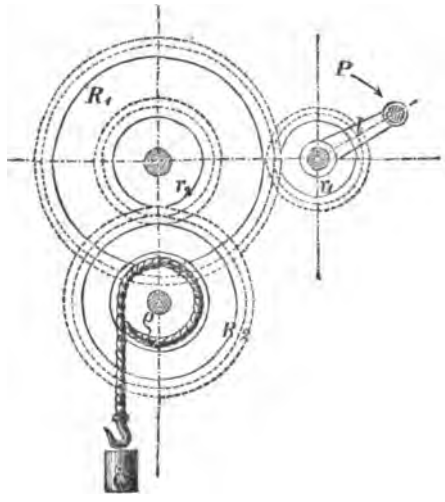


Fig. 130.

Auflösung. Sämmtliche Wellen haben innerhalb der wirksamen Momente nur eine sehr geringe Länge und können daher ohne weiteres auf Festigkeit allein berechnet werden.

Für die erste, die sogen. Kurbel- oder Antriebwelle ist das Moment $M = Pl = 32 \cdot 360 = 11520^{kmm}$. Demnach erhalten wir unter Benutzung der Formel (46ª) die Wellenstärke:

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{11520} = 0{,}95 \cdot 22{,}584$$
$$d = 21{,}5^{mm}.$$

Wenn nun in der Welle (d) ein Moment $M = 11520^{kmm}$ enthalten ist, so hat man am Umfange des Rades vom Halbmesser $r_1 = 60^{mm}$ einen (Zahn-) Druck $x_1 = 11520 : 60 = 192^{k}$, und es entsteht für die zweite Welle, die sogen. Vorgelegwelle, ein Moment: $M_1 = x_1 \cdot R_1 = 192 \cdot 300 = 57600^{kmm}$, welchem die Wellenstärke

$$d_1 = 0{,}95 \sqrt[3]{57600} = 38{,}62 \cdot 0{,}95$$
$$d_1 = 36{,}7^{mm} \text{ entspricht.}$$

Das Moment in der Trommelwelle ist nun:

$$M_2 = Q \cdot \varrho = M_1 \cdot \frac{300}{75} = 57600 \cdot 4 = 230400^{kmm};$$

$$\text{also:} \quad d_2 = 0{,}95 \sqrt[3]{230400} = 0{,}95 \cdot 61{,}3.$$
$$d_2 = 58{,}2^{mm}.$$

Die Kurbelwelle wird man in Wirklichkeit etwas stärker, vielleicht nicht unter 30^{mm} ausführen, damit sie auch praktischen Rücksichten (sie wird z. B. an der Kurbel meist vierkantig abgesetzt) gehörig entspricht. — Dividirt man das Moment M_2 der Trommelwelle durch den Radius der Trommel, so erhält man die zu hebende Last:

Digitized by Google

$$Q = \frac{230400}{120} = 1920^{k} \sim = 40 \text{ Ctr.}$$

2. Aufgabe. Beim Entwurfe einer Transmissionsanlage findet man, daß eine schmiedeiserne Welle nöthig wird, welche auf eine Länge von 2^{m}

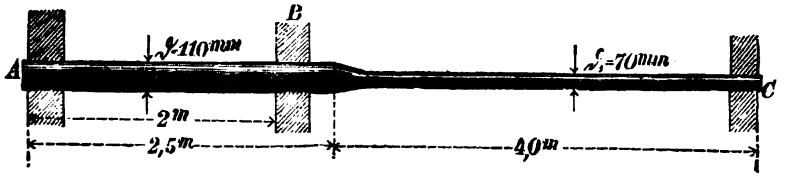


Fig. 131.

45 HP und auf weitere 4^{m} 5 HP bei 60 Umdrehungen in der Minute zu übertragen hat. In dem Vorrath der betreffenden Maschinenfabrik liegt eine Welle von den Dimensionen der vorstehenden Skizze, welche hinsichtlich ihrer Längen für die fragliche Anlage passen würde; es fragt sich nur noch, in wie weit es mit den Stärken der Fall ist, und deshalb soll sie mittelst Rechnung in folgenden Richtungen untersucht werden:

a) Wie stark müßten die beiden Wellentheile den obigen Angaben entsprechend und mit Rücksicht auf Verdrehung sein?
b) Welche Arbeiten würde die Welle, wie sie vorhanden ist, übertragen?
c) Wie groß ist die Inanspruchnahme der vorhandenen Welle, wenn sie in der betreffenden Anlage verwendet wird, und um wie viel mal ist jeder Theil der Welle an Festigkeit größer als nöthig wäre?
d) Wie groß ist die Verdrehung in jedem der beiden Theile?
e) Wie viel Pferdestärken würde jeder Theil der Welle übertragen, wenn man dabei nur Festigkeit voraussetzt?

Auflösung a). Wenn die Welle Fig. 131, welche in der Minute 60 Umgänge macht, bei B eine Arbeit von 45 HP (incl. die schädlichen Widerstände) abgiebt und bei C eine solche von 5 PH, so erleidet, da die bewegende Kraft bei A eingeführt wird, das Stück AB offenbar eine Torsionsbeanspruchung von (45 + 5) HP, und man hat, wenn der Durchmesser desselben mit Rücksicht auf Verdrehung ermittelt werden soll, nach Formel (48^{b}) zu rechnen und darin für N = 50 und für n = 60 einzuführen:

$$\delta = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 120 \sqrt[4]{\frac{50}{60}} = 120 \,.\, 0{,}955$$

$$\delta = 115^{mm}.$$

Für das schwächere Wellenstück finden wir entsprechend:

$$\delta_1 = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 120 \sqrt[4]{\frac{5}{60}} = 120 \,.\, 0{,}537$$

$$\delta_1 = 65^{mm}.$$

Es wäre demnach die vorhandene Welle am starken Theile 5^{mm} zu schwach, am schwachen dagegen 5^{mm} zu stark; wir werden aber bei der folgenden Untersuchung weiter einsehen, daß wir sie dennoch für die vorliegende Anlage verwenden können.

Digitized by Google

Auflösung b). Sehen wir nun umgekehrt nach, welche Arbeiten die vorhandene Welle in ihren einzelnen Theilen und mit Rücksicht auf die Voraussetzungen in Formel (48^b) übertragen kann. Zu diesem Zwecke reduciren wir diese Formel auf N:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}; \quad d^4 = \overline{120}^4$$

und:
$$N = n \frac{d^4}{\overline{120}^4} = 60 \frac{146410000}{207360000}$$

$$N = 42{,}4 \text{ HP.}$$

$$N = n \cdot \frac{d_1^4}{\overline{120}^4} = 60 \frac{24010000}{207360000}$$

$$N = 6{,}95 \sim = 7 \text{ HP.}$$

Der stärkere Theil würde also eigentlich 7,6 HP weniger, der schwächere dagegen 2 HP mehr zu übertragen im Stande sein.

Auflösung c). Die unter c) aufgestellte Frage beantworten wir, indem wir die Spannung ermitteln, welche bei den vorliegenden Angaben auf 1 □^{mm} des Querschnittes der beiden Wellentheile kommt. Die Fundamentalformel für Verdrehungsfestigkeit heißt bei Kreisquerschnitt:

$$PR = \frac{\pi}{16} d^3 s. \quad \text{Laut Formel III, pag. 135 ist:}$$

$$PR = 716200 \frac{N}{n};$$

also:
$$716200 \frac{N}{n} = \frac{\pi}{16} d^3 s$$

und:
$$s = \frac{716200 \cdot 16}{3{,}1416} \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{1}{d^3}$$

$$s = \frac{1145920}{18{,}85} \cdot \frac{N}{d^3} = 60800 \cdot \frac{50}{1331000}$$

$$s = 2{,}3^k \text{ pr. □}^{mm}.$$

Wir lassen aber nach Vorstehendem eine Inanspruchnahme von $s = 6^k$ pr. □^{mm} zu, haben demnach vorliegend 15-fache Sicherheit gegen Bruch, während das starke Wellenstück hier, trotzdem nach Auflösung a) dasselbe 5^{mm} zu schwach war, mit Rücksicht auf Festigkeit allein noch 2,6 mal fester ist, als nöthig wäre.

Für das 70^{mm} starke Ende ist nun:

$$s = 60800 \frac{5}{343000}$$

$$s = 0{,}88^k \text{ pr. □}^{mm},$$

also circa 40-fache Sicherheit und 6,8 mal fester als nöthig.

Auflösung d). Für die Größe der Verdrehung haben wir nach der Ableitung pag. 73:

$$1) \quad \alpha^0 = \frac{1}{0{,}01745} \cdot \frac{PR}{J^p} \cdot \frac{l}{G}.$$

Für $\frac{PR}{J^p}$ können wir nach der Fundamentalformel setzen: $\frac{s}{a}$; demnach:

Digitized by Google

$$2)\ \alpha^0 = \frac{1}{0{,}01745} \cdot \frac{s}{G} \cdot \frac{l}{a},$$

und betrachten wir die nebenbei geführte Berechnung nach der 2. Formel als Probe für die Richtigkeit der Rechnung. Es ist nun vorliegend:

$$\alpha^0 = \frac{1000 \,.\, 32 \,.\, 716200}{0{,}01745 \,.\, 3{,}1416} \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{L}{b^4 G} = 418066400000 \frac{N}{n} \cdot \frac{L}{b^4 G}$$

$$1)\ \alpha^0 = 52258300 \frac{N}{n} \cdot \frac{L}{b^4}$$

und:

$$\alpha^0 = \frac{1000}{0{,}01745} \cdot \frac{s}{G} \cdot \frac{L}{0{,}5\, b}.$$

$$2)\ \alpha^0 = 16{,}475 \frac{L}{0{,}5\, b}.$$

Für den Theil AB der Welle also:

$$1)\ \alpha^0 = 52258300 \,.\, \frac{50}{60} \cdot \frac{2}{146410000} = \frac{522583}{878460}$$

$$\alpha^0 = 0{,}59^0.$$

$$2)\ \alpha^0 = 16{,}475 \,.\, \frac{2}{55} = 0{,}59^0.$$

Das ist pr. 1^m Länge: $\alpha^0 = 0{,}295^0$, während nach der allgemeinen Entwickelung nur $0{,}25^0$ pr. 1^m vorausgesetzt wird.

Für den Theil BC (Fig. 131) erhalten wir dagegen:

$$1)\ \alpha^0 = 52258300 \,.\, \frac{5}{60} \cdot \frac{4{,}5}{240100}$$

$$\alpha^0 = 0{,}8^0.$$

$$2)\ \alpha^0 = \frac{1000}{0{,}01745} \cdot \frac{0{,}88}{8000} \cdot \frac{0{,}9}{7} = \frac{0{,}792}{0{,}9772} = 0{,}8^0.$$

Das ist pro 1^m circa $0{,}18^0$, also $0{,}07^0$ weniger als vorausgesetzt. In Wirklichkeit wird hier α deshalb etwas geringer ausfallen, weil die Welle nur auf 4^m Länge 70^{mm} stark ist und der übrige $^1/_2{}^m$ 110^{mm} Stärke hat.

Auflösung e). Nach Formel (46^b) ist:

$$b = 85 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};\ b^3 = \overline{85}^3 \frac{N}{n}$$

$$N = n \cdot \frac{b^3}{\overline{85}^3} = \frac{60}{614125} b^3 = \frac{60 \,.\, \overline{110}^3}{614125}$$

$$N = 130 \text{ HP und}$$

$$N = \frac{60 \,.\, \overline{70}^3}{614125} = \frac{60 \,.\, 343000}{614125}$$

$$N = 33{,}5 \text{ HP}.$$

Anmerkung 1). Die vorstehende Untersuchung läßt erkennen, daß eine Welle, welche mit Rücksicht auf die Größe der Verdrehung berechnet wird, in jedem Falle stärker ausfällt, als mit Bezug auf die Festigkeit allein nothwendig wäre, während umgekehrt Wellen, nach Festigkeit allein berechnet, wenn sie nur irgend etwas lang sind, eine stärkere Verdrehung erleiden, als im Allgemeinen angenommen wird.

Digitized by Google

Je schwächer die Wellen sind, desto größer ist der Unterschied in den Resultaten nach Festigkeit und Verdrehung, so zwar, daß bei Wellen gegen 300 mm Stärke die Formeln für Festigkeit und Verdrehung dieselben Werthe ergeben. Die Gefahr des stärkeren Verwindens liegt also bei schwachen Wellen näher als bei starken.

Bei kurzen Wellenstücken genügen die Formeln $46^a \div 47^b$ meistens, während für Transmissionswellen, überhaupt für lange Wellenstücke die Formeln $48^a \div 49^b$ anzuwenden sind und dort ganz gute Mittelwerthe liefern, die mitunter aus Rücksicht für etwaige sehr starke Durchbiegung um eine Kleinigkeit zu erhöhen sind.

Die Formeln unter b) sind aber schon deshalb sehr vortheilhaft, weil sie in Folge der vermehrten Festigkeit, die sie bieten, den Rücksichten auf Biegung in gewöhnlichen Fällen Rechnung tragen. Ueberdies sucht man auch dadurch die Wellenstärken herabzumindern, daß man den Transmissionswellen größere Geschwindigkeiten ertheilt. Man hält im Allgemeinen bei Transmissions-Anlagen das Princip fest, vom Motor aus die Uebersetzungen so zu gestalten, daß die Haupt- und Zweigtransmissionswellen nach einander immer größere Tourenzahlen bekommen und daß von der Transmissionswelle aus nach den einzelnen Arbeitsmaschinen hin dann eine Rückwärtsübersetzung stattfindet. Es mag dies zunächst unrationell erscheinen, wenn man erst die Geschwindigkeit vergrößert und dann wieder vermindert, während man doch gleich vom Motor aus die Geschwindigkeit der Transmission so bemessen könnte, daß sie den Arbeitsmaschinen, resp. deren Vorgelege entspricht. Für eine verhältnismäßig größere Umdrehungszahl der Transmission spricht aber einmal der bereits angeführte Umstand, daß sich dadurch die Stärke der Transmissionswellen verringert, weiter aber, daß doch von einer Transmission aus oft sehr verschiedene Arbeitsmaschinen getrieben werden und diese mitunter sehr verschiedene Geschwindigkeiten verlangen, daß die ganze Transmission dadurch mehr Schwung, also mehr lebendige Kraft erhält und, was sehr schwer wiegt, daß die Riemen, wie man sagt, „besser ziehen", weil sie bei größerer Geschwindigkeit geringere Kraft zu übertragen haben. Eine Maschine verlangt immer nur einen gewissen Effect = Kraft mal Geschwindigkeit; dieses Product kann man aber innerhalb der Transmission beliebig zerlegen: gebe ich daher einer Welle größere Geschwindigkeit, so vermindert sich auch in derselben Weise die Größe der Kraft am Umfange der Riemen- oder Seilscheiben, man braucht nicht so viel Reibung zwischen dem Zugorgane und dem Scheibenumfange, also auch nicht so starke Anspannung der Riemen, was weiter zur Folge hat, daß der schädliche Widerstand sich verringert.

Anmerkung 2). In dem letzten Beispiele haben wir unter anderem auch den Verdrehungswinkel einer bekannten Welle und bei bekannter Inanspruchnahme berechnet. Die entsprechenden Formeln entwickelt man sich aus den Fundamentalgleichungen für die Verdrehung von prismatischen Körpern. Man findet aber dabei, daß in einer solchen Formel s und d, die zulässige Belastung und der Durchmesser gleichzeitig vorkommen; deshalb ist es nöthig, daß man z. B. s für den betr. Fall berechnet haben muß, daß man es also hier nicht beliebig annehmen kann. So setzten wir bei $d = 110$ für $s = 2{,}3$ und bei $d_1 = 70$, $s = 0{,}88$.

Die Berechnung der Verdrehung wird dann sehr verwickelt, wenn die Welle innerhalb ihrer Länge an mehreren Orten verschiedene Kräfte abgiebt. Hier hilft man sich dadurch, daß man innerhalb der Wellenlänge aus den einzelnen Kräften

Digitized by Google

(mechan. Arbeiten) und ihren Angriffspunkten einen Schwerpunkt als Angriffspunkt für eine resultirende Arbeit sucht und die Wellenlänge blos bis zu diesem Punkte gerechnet einführt. Sind also die Scheiben annähernd gleichmäßig vertheilt und enthalten dieselben annähernd gleiche Momente, so läge der Angriffspunkt eines resultirenden Momentes in der halben Länge der Welle, bei gleichmäßig nach dem Ende abnehmend vertheilten Momenten, am Ende des 1. Drittels der Wellenlänge, und hätte man im ersten Falle anstatt L nur $\frac{L}{2}$, im zweiten nur $\frac{L}{3}$ in die Formel für α einzuführen.

Anmerkung 3). Mit Bezug auf die Verbindung, Stützung und Anordnung der Wellen ist noch kurz zu bemerken, daß man die in einer Länge bis zu 6 und 7^m hergestellten und auf der Drehbank rein cylindrisch abgedrehten Wellenstücke mittelst sogen. Kupplungen (s. d.) fest, aber lösbar mit einander verbindet, dann in Lager (Bock-, Wand- oder Hängelager) legt und diese letzteren innerhalb der Länge der Transmission, den Momenten und Belastungen entsprechend, vertheilt. Hierbei befolgt man die Regel, die Lager, wenn irgend möglich so anzuordnen, daß sie in die Nähe von den die Welle schwer belastenden Scheiben, Rädern, Kupplungen ꝛc. zu stehen kommen.

Die Lagerstellen werden, wie früher bemerkt, in der Regel hier nicht eingedreht und sind überdies lange Lager, womöglich mit beweglichen Schalen bei Transmissionswellen am vortheilhaftesten (s. d. Sellers'sche Lager, Fig. 2, Bl. XLII).

Anmerkung 4). Torsionswellen mit polygonalen, hohlen und zusammengesetzten Querschnitten werden auf dieselbe Weise berechnet wie dergleichen Axen (s. pag. 118 und Bl. LXIII). Man berechnet zuerst eine massive Welle mit Kreisquerschnitt von dem betr. Materiale — gewöhnlich Gußeisen oder Holz — und wandelt dann den Kreisquerschnitt durch Gleichsetzen der betr. Querschnittsmoduli, wie bei den Axen gezeigt, in den verlangten Querschnitt um.

Für hölzerne Wellen, welche meist in Vieleckquerschnitt ausgeführt werden, wofür man aber sofort den eingeschriebenen Kreis setzen kann, hat man dann vorher einen Coefficienten zu suchen, mit welchem der Durchmesser z. B. einer massiven Gußeisenwelle zu multipliciren ist, damit man die Stärke der massiven Holzwelle mit Kreisquerschnitt erhält, und diesen Coefficienten findet man, wenn man, wo die Größe der Verdrehung berücksichtigt werden soll, in die Formel: $d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{P \cdot R}{G \cdot C}}$ nach einander den Drehmodulus für Gußeisen (oder direct die Elasticitätsmoduli $e = 10000$ für Gußeisen und $e = 1100$ für Holz) und den für Holz einsetzt und dann beide Gleichungen durch einander dividirt. Nimmt man hier für Holz die zulässige Verdrehung per 1^m ebenfalls zu $C = \frac{1}{4}{}^0$ an, so hat man überhaupt nur das Verhältniß der 4. Wurzel aus den Elasticitäts- oder Drehmoduln zu suchen, und das giebt = 1,74; demnach ist eine Holzwelle mindestens 1,74 mal so stark zu machen als eine gleichwerthige Gußeisenwelle.

Digitized by Google

B. Gemischte Wellen.

Die vorstehenden Betrachtungen ergaben, daß streng genommen alle Wellen als gemischte zu bezeichnen sind, da sie sämmtlich neben der Torsion einer mehr oder weniger starken Biegungsbeanspruchung unterworfen sind. Wir wollen speciell hier unter gemischten Wellen nur diejenigen verstehen, bei denen Biegungs- und Torsionsbeanspruchung in Bezug auf Intensität beinahe gleich sind, beide aber für die Bestimmung der Wellendimensionen als wesentlich anerkannt werden. Die praktischen Beispiele, welche man hierzu rechnen kann, beschränken sich im Allgemeinen auf einzelne Specialitäten, wie Schwungrad- und Wasserradwellen und einzelne sehr schwere Vorgeleg- und Transmissionswellen.

Bei Wellen, wo die Inanspruchnahme im Ganzen nicht sehr beträchtlich ist, bestimmt man die Querschnittsdimensionen einmal aus der Biegung und einmal aus der Torsion, wählt davon das größere Resultat und erhöht dasselbe aus Rücksicht für das gleichzeitig bestehende andere Moment in entsprechender Weise durch Schätzung.

Bei Wellen, die an und für sich stark ausfallen, lohnt es sich aber, daß man die Untersuchung etwas strenger führt. Ueberträgt z. B. eine Welle ein Moment M_t und wird dieselbe durch einen Gegenstand von namhaftem Gewichte Q belastet, so berechnet man zuerst einen vollen Kreisquerschnitt aus der Torsionsbelastung M_t (Formel 34, pag. 71) und fügt diesem einen Ringquerschnitt oder Rippen zu, welche für sich allein der Biegungsbelastung (Formel 16, pag. 48) genügend widerstehen. Streng wissenschaftliche, sowie praktische Prüfungen solcher Resultate ergeben, daß diese etwas größer ausfallen als unbedingt nöthig.

Handelt es sich daher um noch genauere Resultate, so muß man die Regeln der „zusammengesetzten Festigkeit im engeren Sinne" zu Grunde legen.

Für den vorliegenden Fall, wo Torsions- und Biegungsfestigkeit gleichzeitig auftreten, liefert die Festigkeitslehre folgenden Ausdruck für ein sogenanntes ideelles oder resultirendes Moment:

$$M = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_t^2} \quad \ldots . \quad (50),$$

welches als Biegungsmoment zu behandeln ist.

Darin bedeutet M_t = Torsionsmoment für einen Querschnitt, M_b = Biegungsmoment für denselben Querschnitt. Ein entsprechendes resultirendes Torsionsmoment würde heißen:

$$M' = \frac{3}{4} M_b + \frac{5}{4} \sqrt{M_b^2 + M_t^2} \quad \ldots . \quad (51).$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Eine Kurbelwelle von Gußstahl ist bestimmt, bei 50 Umdrehungen in der Minute 30 HP zu übertragen. Dieselbe hat zwischen den beiden Lagern eine Länge = 2,0 m und trägt in der Mitte zwischen den Lagern ein Schwungrad von Q = 40 Ctr. Gewicht.

Wie stark ist die Welle aus Rücksicht für Torsion allein in voll-cylindrischer Gestalt zu machen und um wieviel ist sie für die Biegungsbelastung mit Berücksichtigung des Eigengewichtes der Torsionswelle zu verstärken?

Digitized by Google

Auflösung. Für Gußstahl haben wir Formeln speciell nicht abgeleitet; wir können aber entweder die Schmiedeisen-Formel nach dem Verhältnis der 3. resp. 4. Wurzeln der zulässigen Spannungen bezhtl. der Drehmoduli umrechnen, oder wir gehen wieder von den allgemeinen Formeln für Torsion aus und setzten darin die bezgl. Werthe von (s) oder (G) für Gußstahl ein. Wir schlagen das letztere Verfahren hier ein und benutzen zunächst die allgemeine Formel von pag. 136:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{PR}{s}}.$$

Darin ist zu setzen: $PR = 716200 \frac{N}{n}$,

und da $Z = 30$; $0{,}8\,Z = 24$; $s = \frac{Z}{2} = 12^k$ pr. $\square^{mm}$:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{716200}{12}} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 67{,}23 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

oder annähernd:

$$d = 70 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

$$d = 70 \sqrt[3]{\frac{30}{50}} = 70 \,.\, 0{,}84 = 58{,}8$$

$$d = 60^{mm}.$$

Die Maximalverwindung von $0{,}25^0$ pr. 1^m vorausgesetzt, gehen wir von der Formel

$$d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{PR}{G \,.\, C}}$$

(pag. 137) aus und setzen darin für den vorliegenden Fall:

$$PR = 716200 \frac{N}{n};\ G = 9000;\ C = 0{,}25.$$

$$d = 27{,}64 \sqrt[4]{\frac{716200}{0{,}25 \,.\, 9000}} \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 27{,}64 \,.\, 4{,}226 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

$$d = 117 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 117 \sqrt[4]{\frac{3}{5}} = 117 \,.\, 0{,}88 = 102{,}96$$

$$d = 100^{mm}.$$

Da die Schwungradwelle überhaupt ein sehr wichtiges Organ ist und mitunter viel zu leiden hat, nehmen wir den letzten Werth und kommen damit auch der Praxis etwas näher.

Der massiv-cylindrische Kern für die Torsion allein hat also 100^{mm} Stärke, und wir müssen nun darum eine hohle Gußstahlhülse gelegt denken, welche der Biegungsbelastung Rechnung trägt, in Wirklichkeit aber natürlich mit dem Kern in einem Stücke ausgeführt wird. Für die Berechnung des Ringquerschnittes an dem Belastungspunkte haben wir die allgemeine Formel (17a) pag. 52 und setzen darin: $P = 2120^k$, da 2000^k das Gewicht des Rades und $120^k = \frac{\pi}{4} d^2 l \gamma$

Digitized by Google

$= 0{,}785 \cdot 1^2 \cdot 20 \cdot 7{,}7$ das Eigengewicht der Welle ist; $l = 2000$; $q = \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D}$.

Demnach: $$Pl = 4qs$$

und $$Pl = 4 \cdot \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D}s,$$

wenn wir mit D den äußeren und mit $d = 100$ den inneren Durchmesser der hohlcylindrischen Verstärkung bezeichnen. $s = 16$ und die übrigen Werthe eingesetzt:

$$\frac{8 \cdot 2120 \cdot 2000}{3{,}1416 \cdot 16} = \frac{D^4 - d^4}{D} = 674815.$$

Daraus findet man durch Probiren:

$$115 < D < 116 \text{ oder annähernd:}$$

$$D = 120^{mm}.$$

2. Aufgabe. Eine schmiedeiserne Welle Fig. 132 ist bei A und B in Lagern drehbar gestützt, trägt bei C ein Stirnrad von $1{,}2^m$ Durchmesser und ist bei K an eine andere Welle angekuppelt, auf welche sie die durch das Rad C aufgenommene Kraft $Q = 3000^k$ überträgt; $a_1 = 1200^{mm}$ und $a_2 = 2000^{mm}$. Welche Dimensionen erhält die Welle bei C, A und B in Berücksichtigung der Torsion und Biegung?

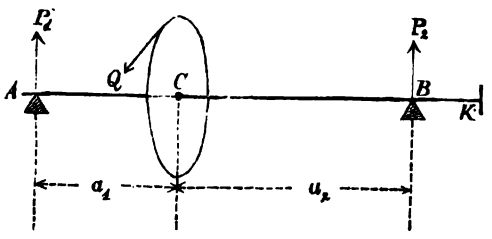


Fig. 132.

Auflösung. Der Zapfendruck in A ist:

$$P_1 = Q\frac{a_2}{a_1 + a_2} = 3000 \cdot \frac{2000}{1200}$$

$$P_1 = 1875^k,$$

demnach das Biegungsmoment im Punkte C:

$$M_b = 1875 \cdot 1200 = 2250000^{kmm},$$

das Torsionsmoment daselbst:

$$M_t = 3000 \cdot 600 = 1800000^{kmm}.$$

Das ideelle Biegungsmoment also nach Formel (50):

$$M = \tfrac{3}{8}M_b + \tfrac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_t^2}$$

$$M = 843750 + \tfrac{5}{8}\sqrt{8302500000000}$$

$$M = 843750 + 1800881$$

$$M = 2644631.$$

Für vollen Kreisquerschnitt vom Durchmesser D ist:

$$M = \frac{\pi}{32}D^3 s,$$

und da für Schmiedeisen $s = 6^k$:

$$D = \sqrt[3]{\frac{2644631 \cdot 32}{3{,}1416 \cdot 6}} = \sqrt[3]{4490000}$$

$$D = 165^{mm}.$$

Digitized by Google

Diesen Durchmesser erhält die Welle nur am Axenkopfe C, während man die Schenkel, wenn es sich lohnen sollte, nach den Stützpunkten hin nach Maßgabe der geringeren Biegungsmomente verjüngen kann.

Der Theil AC ist nur auf Biegung beansprucht, und erhält der Zapfen daselbst nach Formel (3) pag. 91 die Stärke:

$$d_1 = 1{,}13\sqrt{1875} = 48{,}9 \sim = 50^{mm}.$$

Von A aus vergrößert sich der Querschnitt allmälig und geht am Axenkopfe in Folge der hinzutretenden Torsion plötzlich in den vom Durchmesser $D = 165^{mm}$ über. Der Zapfen bei B ist, wenn man von der dort verhältnißmäßig geringen Biegungsbelastung von $P_2 = 1125^k$ absieht, für Torsionsfestigkeit nach Formel (46ᵃ), da $M = P \cdot R = 3000 \cdot 600 = 1800000^{kmm}$:

$$d_2 = 0{,}95\sqrt[3]{1800000} = 116^{mm}$$

und für Verdrehung:

$$d_2 = 4{,}13\sqrt[4]{1800000} = 150^{mm}.$$

Das letztere Resultat wird man deshalb vorziehen, weil man dann die Welle von C bis B cylindrisch fertigen und bei B die Lagerstelle auf 150^{mm} eindrehen kann. Dann ist man auch sicher, daß dort in Folge von P_2 nicht zu starke Beanspruchung stattfindet.

VII. Kupplungen

sind Verbindungsorgane für Wellen und haben den Zweck, je zwei mit ihren Endflächen aneinander stoßende Wellenstücke so zu verbinden, daß die drehende Bewegung des einen (möglichst) unverändert auf das andere übertragen wird. Wir nennen hier das nach dem Motor zu gelegene Wellenstück die „treibende Welle“ und das daranstoßende, welches seine Bewegung von jenem erhält, die „getriebene Welle“. Denkt man sich zwei Wellen mit ihren Enden gegen einander gelegt und die eine um ihre geometrische Axe gedreht, so wird die andere nur dann mit an der Bewegung theilnehmen, wenn sie gehörig fest mit der ersten verbunden ist; und dies wird eben durch die Kupplung erreicht. —

Die Verkupplung geschieht entweder mit oder ohne Hilfsstücke (Ineinanderstecken, resp. Mitnehmerkupplungen, Fig. 2ᵇ, Bl. LXX). Im ersten Falle werden die Hilfsstücken mittelst Keilen, welche zur Hälfte in die Welle, zur Hälfte in das Hilfsstück eingelassen sind, auf der cylindrischen Welle (am Kupplungskopfe) befestigt.

Veranlaßt ist die Anbringung einer Kupplung entweder durch den Umstand, daß der Wellenstrang länger verlangt wird, als man eine Welle im Ganzen herstellen kann, oder daß die Stärken sehr wesentlich verschieden sind — ist hierbei jedoch ein Stück nur kurz, so hilft man sich durch Anschweißen —, daß die Welle an betreffender Stelle in gewissen Grenzen normal zur Länge beweglich verlangt wird, oder endlich dadurch, daß an dieser Stelle eine Auslösung möglich sein soll.

Digitized by Google

Hieraus erhellt zunächst, daß die Kupplungen in verschiedenen Formen auszuführen und in Berücksichtigung der vorliegenden Verhältnisse verschiedenartig zu construiren sind.

Man hat daher zunächst zu unterscheiden: Feste und bewegliche Kupplungen. Bei ersteren wird vorausgesetzt, daß die treibende und die getriebene Welle in derselben Axenrichtung liegen und unverändert darin verbleiben; zwei solcherart gekuppelte Wellen erscheinen als ein Ganzes, und diese Kupplungen haben im Allgemeinen entweder die Form von cylindrischen Muffen oder Scheiben, sind ein- oder zweitheilig; mitunter ist wohl auch ein oder jeder Kupplungstheil mit der zugehörigen Welle aus einem Stücke hergestellt. Die beweglichen Kupplungen sind stets zweitheilig, $\parallel$ oder $\perp$ zur Wellenaxe getheilt; es besteht die Beweglichkeit entweder darin, daß die beiden Wellen in zwei verschiedenen, aber zueinander $\parallel$ Ebenen liegen können, daß sie einen stumpfen Winkel miteinander bilden oder daß sich eine Kupplungshälfte auf der zugehörigen Welle $\parallel$ zu derselben, bezhtl. mit derselben, verschieben läßt.

Zu den beweglichen Kupplungen mit Verschiebung einer Kupplungshälfte, parallel zur gemeinschaftlichen Axenrichtung, gehören diejenigen Wellenverbindungen, welche man unter dem gemeinsamen Namen „lösbare" oder „Ausrück-Kupplungen" vorfindet. Dieselben gestatten jederzeit, die getriebene Welle von der Theilnahme an der Drehbewegung auszuschließen und sind mit Rücksicht darauf, daß dies rasch und ohne Schwierigkeit zu geschehen hat, entsprechend construirt.

Nach der Art, wie die Wellen, oder besser, die Kupplungstheile die drehende Bewegung einander mittheilen, unterscheidet man Torsions- oder Muffenkupplungen, Mitnehmer- und Frictionskupplungen. Bei den Torsionskupplungen findet ein Ineinander- oder Ueberstecken der betr. Theile statt, und überträgt das Verbindungsorgan die mechanische Arbeit durch den Torsionswiderstand des Muffes. Die Mitnehmerkupplungen sind zweitheilig, scheiben- oder kurbelförmig und werden entweder durch Schrauben mit einander verbunden oder durch Zapfen, welche in dem einen Theile befestigt sind und in resp. Löcher des anderen Theiles eingreifen, für die Bewegungsübertragung geeignet gemacht.

Bei Frictionskupplungen werden die conischen oder scheibenförmigen Kupplungstheile so gegeneinander gepreßt, daß sie in Folge der entstehenden Reibung fest mit einander verbunden erscheinen und eine Kraft zu übertragen im Stande sind.

Ein Bestreben, die Wellen in Richtung ihrer Axen von einander zu entfernen, ist fast nie vorhanden, und sollte es dennoch in geringem Grade der Fall sein, so genügt die Reibung der Kupplungstheile auf den Wellenstücken, vermehrt durch das Anziehen der Keile, um eine Verschiebung zu verhindern.

Eine besondere Classe bilden endlich die sogen. Motoren- oder Kraftkupplungen. Sie werden da angewendet, wo zwei oder mehrere Motore (also z. B. eine Dampfmaschine und ein Wasserrad ꝛc.) zum Betriebe einer Fabriktransmission vorhanden sind, und entweder einer der Motore abwechselnd für sich allein oder beide gleichzeitig die bewegende Arbeit, den Betrieb unabhängig von einander besorgen.

Digitized by Google

Als Material für die Kupplungen verwendet man fast ausschließlich Gußeisen, während in Schmiedeeisen und Stahl nur die etwaigen Mitnehmertheile, Klinken ꝛc. gefertigt werden.

Die Wellenenden von zwei zu verkuppelnden Wellen werden gegenwärtig meist stumpf an einander gestoßen, während man sie früher zum Theil überplattete, und zwar entweder so (⌐¬), daß die Ueberplattung nur eine Mitnahme der getriebenen Welle unterstützt oder so (N oder ⌙⌜), daß sie außerdem eine Verschiebung in der Axenrichtuug verhindert. — Zu beobachten ist jedenfalls hierbei, daß die Drehkörner nicht beseitigt werden sollen, falls etwa später ein Nachdrehen sich nothwendig macht. Ferner vermeide man unbedingt bei Kupplungen alle vorstehenden Theile — Schrauben, Keile oder dergl. — durch welche Gefahr entstehen könnte, indem Riemen oder die Kleider der Arbeiter davon erfaßt werden. Für die Anordnung gilt die Regel, daß die treibende oder überhaupt eine von den beiden Wellen möglichst unmittelbar vor der Kupplung durch ein Lager zu unterstützen ist.

Die Beanspruchung der Kupplungen durch die zu übertragende Kraft ist sehr verschieden und ganz von der Construction abhängig. Eine rationelle Berechnungsweise läßt sich im Allgemeinen nicht angeben, man muß sich vielmehr an gute Muster halten und deren Verhältnisse auf verwandte und gleiche Constructionen übertragen. Nur in ganz außergewöhnlichen Fällen und unter sehr großen Verhältnissen dürfte eine wissenschaftliche Untersuchung einzelner wesentlicher Theile der Kupplung von Wichtigkeit sein.

Bei verschiedeu starken Wellen bezieht man die Dimensionsverhältnisse auf den Durchmesser der getriebenen, also gewöhnlich schwächeren Welle, weil die Kupplung eben nicht stärker in Anspruch genommen wird als die getriebene Welle.

1) Feste Kupplungen.

Die Scheiben- oder Flantschenkupplung (Fig. 1, Bl. LXIX) betrachten wir als typische Form für die festen Kupplungen überhaupt, weil sie gegenwärtig mit Vorzug bei Transmissionsanlagen angewendet wird. Sie ist eine getheilte oder zweitheilige Kupplung, und zwar liegt die Theilfuge in einer zur Wellenaxe normalen Ebene. Die Grundform eines jeden Theiles ist eine kreisförmige Scheibe mit einer centrisch angegossenen, cylindrischen oder conisch verjüngten Erhöhung, die Nabe genannt.

Fig. 1, Bl. LXIX zeigt zwei verschiedene Constructionen dieser Kupplung in axialen Schnitten und je einer halben Seitenansicht in $^1/_2$ der wirklichen Größe.

Fig. 1ª. Die zwei gußeisernen Kupplungshälften sind durch vier Mutterschrauben, welche durch die Scheiben hindurch gehen, mit einander verbunden, und an der Peripherie der Scheiben sind nach außen vorspringende Ränder angegossen, welche die Muttern und Köpfe der Schrauben verdecken. Auf diese Weise erhält man eine Art Riemscheibe und kann unter Umständen die Scheibenkupplung als solche benutzen; deshalb ist das Profil der Scheiben am Umfange (s. untere Hälfte des Schnittes) häufig kreisbogenförmig abgerundet.

Digitized by Google

Jede Kupplungshälfte ist auf den Durchmesser des Wellenendes cylindrisch ausgebohrt und vermittelst eines Längskeiles auf letzterem fest angezogen, so daß eine Drehung der Kupplung um die Welle und zugleich eine Verschiebung in der Axenrichtung derselben, sofern in letzterer Beziehung nicht allzustarke Kräfte auftreten, verhindert wird. —

Wir begegnen hier zum ersten Male den sogenannten

Längskeilen,

als Verbindungsorganen der Wellen resp. Zapfen oder Axen mit Gegenständen, welche von jenen getragen werden oder welche eine Arbeit übertragen und wollen, da dieselben in der Folge — bei den Zahnrädern, Riemen- und Seilscheiben, Kurbeln, Balanciers, Trommeln ꝛc. — sehr oft vorkommen, uns hier etwas weiter darüber verbreiten.

Die Querkeile (pag. 169 Bd. I und Bl. XXIV ÷ XXVII) sind ebenfalls Verbindungsorgane, dienen aber anderen Zwecken und sind in anderer Weise beansprucht und angeordnet als die Längskeile. Letztere haben den Zweck, in dem cylindrischen Umfange einer Welle, eines Axenkopfes u. dergl. eine Unterbrechung, einen Vorsprung zu erzeugen, sodaß ein cylindrisch auf den Durchmesser der betr. Welle ausgebohrter Körper (Nabe oder Hülse), welcher auf die Welle gesteckt ist, sich nicht um diese drehen kann; überdies aber bezwecken sie in Folge des Anzuges (s. pag. 176 Bd. I) ein festes Anpressen des cylindrischen Vollkörpers an die cylindrische Innenfläche des ihn umhüllenden Organes.

Die Längskeile werden deshalb gleich den Querkeilen als abgestutzt-keilförmige Körper mit rechteckigem Querschnitte ausgeführt. Während aber bei jenen der Anzug in der Ebene der größeren Seiten des Rechteckquerschnittes liegt, ist er hier parallel den kleineren Seiten; auch sind bei den Längskeilen Nasen (am starken Ende) häufiger nothwendig, damit man nämlich die Keile nach Erfordern ausziehen kann, wo ein Herausschlagen von dem verjüngten Ende her nicht möglich ist.

In der Seitenansicht Fig. 1, Bl. LXIX sind nun zur Veranschaulichung der Methoden drei Keile angeordnet, von denen der oberste je zur Hälfte in entsprechende Nuten der Welle und der Kupplungsnabe eingelassen ist; der Keil rechts unten berührt die Welle nur in einer eben gefeilten Fläche derselben von der Breite gleich der des Keiles, und der dritte Keil links unten schließt sich mit seiner cylindrisch ausgehobelten und gefeilten Fläche an den unveränderten Cylinderumfang der Welle an. In diesem letzteren Falle wird also auch die Drehung des aufzukeilenden Gegenstandes um die Welle nur durch die Reibung zwischen Keil und Wellenoberfläche verhindert. Man wendet deshalb diese Methode nur bei schwachen Kräften an, insbesondere da, wo der aufzusteckende Gegenstand von Zeit zu Zeit an eine andere Stelle der Welle gebracht werden soll, und es wird dann wohl auch der Keil ganz prismatisch gemacht und das Andrücken durch eine oder zwei Preßschrauben bewirkt. — Auch die zweite Methode, wonach auf der Welle nur eine ebene Fläche angefeilt wird, ist für die Uebertragung großer Kräfte ungeeignet, wenigstens ist es gut, wenn man dann 2 oder 3 (unter 120° gestellt) oder 4 Keile am Umfange anordnet.

Die Keilnuten werden in der Welle, höchstens in einer Tiefe gleich der halben Keilhöhe, genau eingearbeitet, und es geschieht dies bei irgend langen Nuten am

Digitized by Google

rationellsten auf der Langloch-Bohrmaschine oder, bei sehr langen Nuten, auf der Hobelmaschine, während man in kleinen Verhältnissen sich nur der Kreuz- und Flachmeisel, sowie der Feilen bedient. Unter Umständen, besonders wenn die Nabe eines Rades oder dergl. nicht am Ende der Welle oder Axe, oder wenn sie neben einem Lager sitzt, muß man die Nut etwas mehr als doppelt so lang machen, als die Länge des Keiles ist, damit man diesen herausziehen kann.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man hinsichtlich der Inanspruchnahme unterscheidet: Tragkeile und Torsionskeile. Erstere dienen zur Befestigung von Gegenständen, die nur von der Axe getragen werden, letztere dagegen kommen da vor, wo aus der Welle oder Axe ein Moment in den zu befestigenden Gegenstand übergeht, und es haben diese demzufolge mehr auszuhalten als die Tragkeile. — Es ist in jedem Falle rathsam, die Keile aus Stahl zu fertigen. —

Denken wir uns nun einerseits die beiden Kupplungshälften Fig. 1ª, Bl. LXIX auf die angegebene Weise mit den betr. Wellenenden und andererseits die Scheiben mit einander vermittelst der Schrauben fest verbunden, so wird ein mechanisches Moment, welches von der treibenden Welle durch den Keil in die zugehörige Kupplungshälfte eingeführt ist, durch die Schrauben in die andere Hälfte und von da auf die getriebene Welle übertragen. Damit dies zweckentsprechend und ohne Störung ausgeführt werden kann, ist es nöthig, die Schrauben abzudrehen und genau in die gebohrten Schraubenlöcher einzupassen, wie es in Fig. 1ᵇ, Bl. LXIX angenommen ist, und es werden dann die Schrauben auf Abscheerung in Anspruch genommen. Um aber dieses, sowie die kostspielige Herstellung gedrehter Schrauben zu vermeiden, läßt man die eine Scheibe (links Fig. 1ª) in die andere (rechts) etwas eingreifen, und dies geschieht am einfachsten durch eine an der Stoßfläche der einen Hälfte excendrisch angedrehte Scheibe oder Erhöhung, welche in eine entsprechende Vertiefung der anderen Hälfte eingreift und so eine Art Mitnehmer bildet. Die Wellenenden und Keile schließen dann bündig mit den Scheiben ab, während man da, wo diese Excenter fehlen, das eine Wellenende etwas in die andere Kupplung eintreten läßt (Fig. 1ᵇ), damit die Wellen immer genau concentrisch erhalten bleiben.

Die Herstellung der Scheibenkupplung bietet, soweit es die Anfertigung des Scheibenmodelles und das Vergießen in der Form anlangt, nichts Besonderes in diesen Arbeiten dar. Es ist selbstverständlich, daß man das Modell einer Kupplungshälfte für beide Theile verwendet, daß man event. die excentrische Scheibe (Fig. 1ª, links) im Modelle besonders aufsetzt und die Vertiefung (rechts) aus der vollen Scheibe herausdreht.

In der mechan. Werkstatt werden zuerst die Scheiben an den Stoßflächen (event. auch die excentrische Erhöhung und Vertiefung) abgedreht und aufgepaßt, hierauf, wenn nöthig, die Schraubenlöcher gebohrt, und nachdem man die beiden Kupplungshälften fest zusammengeschraubt hat, werden diese gemeinschaftlich ausgebohrt, dann auf dem Dorne außen abgedreht und die Keilnuten eingestoßen, resp. mit dem Meisel eingehauen. Die Keile werden bei diesen Kupplungen von dem Ende der Wellen her eingetrieben; das erleichtert einmal die Arbeit beim Aufpassen und verhindert zugleich sehr wirksam eine Lösung der Welle aus der festen Kupplung. — Mathematisch streng genommen fallen die geometrischen Axen einer Welle und eines auf derselben vermittelst eines Längskeiles befestigten Gegenstandes

Digitized by Google

nie zusammen in eine gerade Linie, da infolge des Anzuges, wenn auch Bohrung und Wellendurchmesser ganz genau übereinstimmen, bei der immerhin stattfindenden Zusammendrückbarkeit der Materiale der Mittelpunkt des aufzukeilenden Gegenstandes, hier also der Kupplung, aus dem Wellmittel nach der Keilnute hin gerückt wird. Damit ist unter Umständen auch eine Neigung der Bohrungsaxe gegen die Wellenaxe verbunden, sodaß die Stoßfläche nicht mehr normal zur Richtung der Welle steht und schließlich die zu verkuppelnden Wellen selbst nicht in eine Richtung fallen. Deshalb nimmt man schließlich, nachdem die zwei Kupplungshälften auf ein Wellenstück aufgekeilt sind, die Welle mit den Kupplungen noch einmal auf die Drehbank und dreht an den Stoßflächen der Kupplungen noch einen dünnen Spahn nach.

Bei der Construction Fig. 1ª, Bl. LXIX dreht man äußerlich an der Kupplung nur die Peripherie der Scheiben und die Endflächen der Naben ab, während bei der Construction Fig. 1ᵇ, wo beiderseits kreisförmige Löcher für die Versenkung der Muttern und Köpfe eingefraist werden, man nicht selten die ganze Oberfläche der Kupplung blank dreht.

Bei der Construction solcher Kupplungen geht man in der Weise vor, daß man zuerst die Nabe nach Durchmesser und Länge feststellt und dabei die Wandstärke (w) so bemißt, daß sie dem zu übertragenden Torsionsmomente und dem Anzuge durch den Keil genügend Widerstand leistet; die Länge der Nabe ist um so vortheilhafter für die Befestigung, je größer sie ist. Alsdann calculirt man die Stärke der Schrauben, die, entsprechend den Verhältnissen der Kupplung überhaupt bemessen, stets hinreichend stark für die Größe der zu übertragenden Kraft ausfallen. Den Abstand der Schrauben von der Oberfläche nimmt man so groß, daß man mit einem gewöhnlichen Mutterschlüssel oder (bei Fig. 1ᵇ) mit einem Kanonenschlüssel bequem anziehen kann; danach bestimmt sich schließlich auch der Durchmesser (K) der Kupplung. —

Für die Scheibenkupplungen haben wir folgende, als allgemeine Normen bei der Construction derselben zu betrachtenden

Verhältnißwerthe

mit Berücksichtigung guter Ausführungen festgestellt. — Den Durchmesser der getriebenen Welle = d gesetzt, sei die

Länge einer Kupplungsscheibe:

$$\mathfrak{L} = 25 + 1{,}3\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots (1)$$

Wandstärke der Nabe:

$$\mathfrak{w} = 10 + 0{,}3\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots (2)$$

Dicke der Scheibe oder des Flantsches:

$$\mathfrak{d} = 15 + 0{,}2\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots (3)$$

Anzahl der Verbindungsschrauben:

$$\mathfrak{A} = 3 + 0{,}02\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots (4)$$

Durchmesser der Verbindungsschrauben:

$$\mathfrak{d} = 5 + 0{,}2\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots (5)$$

Aeußere Durchmesser der Kupplungsscheiben:

$$\mathfrak{K} = 70 + 3\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots (6)$$

Digitized by Google

Breite einer Scheibe incl. Rand:

$$b = 25 + 0{,}5\,d \ldots . (7).$$

Speciell für Fig. 1[b] gilt außerdem:

Breite = Dicke der Scheibe:

$$b' = 20 + 0{,}4\,d \ldots . (8)$$

Durchmesser der eingefraisten Vertiefungen für die Schraubenköpfe und Muttern:

$$v = 17 + 1{,}7\,d \ldots . (9)$$

und außerdem für die Breite der Keile:

$$k = 5 + 0{,}2\,d \ldots . (10).$$

Die Anzahl (A) der Verbindungsschrauben nimmt man unter den gewöhnlichen Verhältnissen fast immer gleich 4 an.

Fig. 2, Bl. LXIX stellt eine Scheibenkupplung der einfachsten Art in $^1/_5$ der wirklichen Größe dar, wie solche bei ganz schwachen Wellen, z. B. bei den Schlagbäumen der Straßenübergänge an Eisenbahnen vorkommen, wo sie die Hebelbewegung von der einen Schlag-Barrière auf die andere übertragen.

Die Scheiben oder Flantschen sind hier direct an die Wellenenden angeschweißt und an den Stoßflächen normal zur Welle durch Abdrehen oder Feilen geebnet. Zur Verbindung genügen hier 3 Schrauben, und will man diese von der Abscheerung durch die Torsiorsübertragung entlasten, so setzt man an der Stoßfuge eine nach beiden Enden hin verjüngte Keilplatte ein, welche in Folge der doppelschwalbenschwanzförmigen Gestalt bei der Drehung vor dem Herausfallen gehindert wird.

In älteren Transmissionsanlagen für schwere Maschinen, wo man das Gußeisen als Wellenmaterial verwendete, findet man die Kupplungen auf die gleiche einfache Weise ausgeführt.

Eine andere feste, zweitheilige Kupplung, bei welcher die Theilfuge in der Ebene der Wellen liegt, und die durch wesentliche Vorzüge, wie: Einfachheit in der Construction und Herstellung, genau concentrische Verbindung der Wellenstücke, bequeme Aufstellung und Abnahme, ausgezeichnet ist, ist die sogen. Schalenkupplung Fig. 3, Bl. LXIX. Sie besteht aus zwei congruenten, die aneinander stoßenden Wellenenden an dem cylindrischen Umfange umschließenden Schalen, welche an den Stellen, wo sie sich in der Ebene der Wellenaxe berühren, in vorspringende Lappen oder Flantschen zum Zwecke der Verschraubung übergehen und außerdem mit Rippen, welche eine Erhöhung der Festigkeit und die Bergung der Schraubenköpfe und Muttern bewirken, armirt sind. Zur sicheren Torsionsübertragung sind, wie der Querschnitt Fig 3 erkennen läßt, zwei einander gegenüberstehende durchgehende Federn (prismat. Keilplatten) eingelassen, welche auch durch wirkliche Keile, die von beiden Enden der Kupplung her einzutreiben sind, ersetzt werden können.

Je nach der nöthig erachteten Länge der Kupplung ordnet man 2, 4 oder 6 Schrauben an, welche, damit der Umfang der Kupplung nicht zu groß ausfällt, möglichst nahe an die Wellenaxe heranzurücken sind.

Die Herstellung solcher Schalenkupplungen geschieht gleichwie bei getheilten Rädern und Riemenscheiben in der Weise, daß man zuerst die Lappen an den Flächen, mit welchen sie sich berühren, bearbeitet: hobelt und feilt, dann die beiden Theile, nachdem man Packpapier zwischen die bearbeiteten Flächen gelegt hat, zusammenschraubt und gemeinschaftlich auf den genauen Durchmesser der Wellenenden

Digitized by Google

ausbohrt; dabei kann man die Endflächen der Kupplung mit abdrehen, während sonst alles Uebrige roh bleibt und auch die Schraubenlöcher, da sich die Schalen auf den Wellen selbst centriren, eingegossen sein können. Werden dann bei der Montage die Papiereinlagen entfernt, so lassen sich die Schalen mittelst der Schrauben entsprechend der Papierstärke auf den Wellen festpressen, und es entsteht somit eine sehr einfache, solide Verbindung, welche übrigens allemal da angewendet werden muß, wo an Stelle einer unbrauchbar gewordenen Kupplung eine neue anzubringen ist, ohne daß man erst die betr. Wellen demontirt.

Die Verhältnißwerthe der Schalenkupplungen sind, da die Construction eine wesentlich andere ist als die der Scheibenkupplungen, in vieler Beziehung abweichend gegen die der Letzteren. Bezogen auf den Durchmesser (d) der getriebenen Welle, als Einheit, ist

die Länge der Kupplungsschalen:

$$\mathfrak{L} = 90 + 2{,}7\,\mathfrak{d} \ldots . (11)$$

die Wandstärke der Schalen:

$$\mathfrak{w} = 15 + 0{,}28\,\mathfrak{d} \ldots (12).$$

Den Durchmesser der Verbindungsschrauben nehme man bei:

$\mathfrak{A} = 6$ Schrauben $\mathfrak{d} = 10 + 0{,}10\,\mathfrak{d} \ldots (13^a)$

$\mathfrak{A} = 4$ „ $\mathfrak{d} = 12 + 0{,}12\,\mathfrak{d} \ldots (13^b)$

$\mathfrak{A} = 2$ „ $\mathfrak{d} = 13 + 0{,}13\,\mathfrak{d} \ldots (13^c)$

Durchmesser der Kupplung:

$$\mathfrak{K} = 50 + 2{,}2\,\mathfrak{d} \ldots (14).$$

Die Länge (L) richtet sich im Allgemeinen nach der Anzahl der Schrauben, und man kann daher jene auch danach feststellen, daß man die axialen Schraubenabstände bemißt nach:

$$\mathfrak{a} = 30 + 0{,}8\,\mathfrak{d} \ldots (15).$$

Sollte das Bestreben, die Welle aus der Kupplung herauszuziehen in einem besonderen Falle sehr stark auftreten, so kann man dann in die Wellen cylindrische Nuten eindrehen und die Höhlung der Kupplung mit entsprechenden Erhöhungen versehen, welche in die Nuten passend eingreifen. Die dadurch entstehende Schwächung der Welle ist, da man aus Rücksicht auf Biegung oder auf die Stärke der Verdrehung die Wellendurchmesser ohnehin reichlich erhält, nicht bedenklich.

Eine besondere Art Schalenkupplung, die sich für schwächere Wellen recht gut eignen mag, ist die von Reuleaux*) construirte Kegelschalen-Kupplung Fig. 4, Bl. LXIX, die zur Verbindung keine Befestigungsschrauben nöthig hat und hinsichtlich ihrer äußeren Gestalt einen organischen Uebergang zu den Muffen-Kupplungen bildet.

Die Kegelschalen-Kupplung besteht aus einem in Richtung der Axe getheilten, cylindrisch auf den Durchmesser der Wellen ausgebohrten und mit zwei Federn versehenen Conus. Diese Federn, welche nur so lang sind wie die Aussparung im Innern des Conus, sich aber über die Theile, welche ausgebohrt werden müssen, nicht erstrecken, greifen in entsprechende Nuten der Wellen ein und gestatten insofern die Uebertragung der Torsionswirkung in die Kupplung und von da auf die

*) Constr., pag. 257.

Digitized by Google

andere Welle. Zur Befestigung der Schalen auf den Wellen dient ein nach Art der conischen Begrenzung der Schalen ausgebohrter Muff, welcher entweder durch versenkte Preßschrauben oder, wie im vorliegenden Beispiele, mittelst Gewinde, welches am Ende der Schalen und des Muffes angeschnitten ist, auf den Schalen befestigt wird. Im letzteren Falle bewirkt man das Anziehen des Muffes durch Stifte, welche in die am Umfange desselben angebrachten Löcher eingesteckt werden. Diese Befestigung der Kupplungstheile unter einander hat in der Hauptsache nur ein durch etwaige Stöße veranlaßtes Rutschen der Muffe zu verhindern, da schon der Anzug des Conus so bemessen ist, daß bei stoßfreier Drehung die Reibung an den Kegelflächen hinreicht, ein Abrutschen zu verhüten.

Die der Fig. 4, Bl. LXIX beigeschriebenen Verhältnißzahlen beziehen sich auf einen Modulus:

$$\delta = 5 + \frac{b}{3}.$$

Hier sind, was im vorhergehenden Beispiele nur erwähnt wurde, Vorrichtungen zur Verhinderung einer Längsverschiebung angebracht; doch sind auch diese, namentlich in Anbetracht der Federn, meistens entbehrlich. —

Die Construction der reinen **Muffenkupplung** wird durch zwei verschiedene Formen auf Bl. LXIX repräsentirt. Diese Art Wellenverbindung ist zwar die älteste, einfachste und billigste, hat aber den großen Nachtheil, daß sie die Aufstellung und Abnahme wegen des nothwendigen Verschiebens des Muffes auf der Welle ungemein erschwert, das Letztere besonders dann, wenn der Muff auf den Wellen festgerostet ist.

Wir haben in Fig. 5, Bl. LXIX die einfache Muffenkupplung, wobei der cylindrisch ausgebohrte Muff als Hilfsstück der Verkupplung zu betrachten ist, auf eine Verbindung gußeiserner, an ihren Enden verkämmend in einander greifenden Wellen angewendet und unmittelbar neben der Kupplung eine Lagerstelle angenommen. Da hier nicht die ganze Länge der Welle abgedreht wird, gleichwohl aber die Stelle, wohin der Muff zu sitzen kommt, eine glatte cylindrische Oberfläche haben muß, so macht man schon im Modelle den Kupplungskopf etwas stärker und dreht ihn nachher am Gußstücke gehörig ab.

Fig. 6, Bl. LXIX*) zeigt den Kuppelmuff einer „Walzenstraße", mittelst deren nämlich die Bewegung einer Walze auf eine entsprechende des nebenstehenden Stabeisen-Walzwerkes übertragen wird. Diese Muffen sind, wie auch die Walzen, meistens von Gußeisen, werden nicht besonders genau bearbeitet, sind aber dafür mit vier cylinderbogenförmigen Erhöhungen im Innern versehen, welche in entsprechende Vertiefungen der Walzenzapfen eingreifen. Jeder solcher Zapfen greift bis auf die Hälfte der Mufflänge in diesen ein, und es ist die Inanspruchnahme der betr. Theile eine sehr starke und ungleichförmige, daher sich eine besonders solide und feste Verbindung nöthig macht. —

*) Von der „Königin Marienhütte" in Cainsdorf bei Zwickau i./S.

Digitized by Google

2) Bewegliche Kupplungen.

Im Eingange dieses Kapitels hoben wir schon hervor, daß die Beweglichkeit der Kupplungen in dreifach verschiedener Gestalt ausführbar ist: Querbeweglich nennen wir die Kupplung, wenn dieselbe gestattet, daß die zwei zu verkuppelnden Wellenstücke in gewissen Grenzen in normaler Richtung zur Wellenlage parallel zu einander verschoben werden können, daß also die Mittellinien der Wellen stets in derselben oder in verschiedenen, aber zu einander parallelen Ebenen liegen.

Kreuz- oder Gelenk-Kupplungen sind da anzuwenden, wo je zwei Wellenstücke in ihren Verlängerungen sich schneiden, also in einer gemeinschaftlichen Ebene liegen, aber einen (stumpfen) Winkel mit einander bilden. Die Bedingungen der querbeweglichen und der Kreuz-Kupplungen mit einander combinirt, geben eine Kupplung für gekreuzte oder geschränkte Wellen. Fallen endlich die Schwerpunkts-Axen der Wellen in eine Richtung und gestattet die Kupplung auch nur in der Axenrichtung eine gewisse Beweglichkeit, so nennt man sie längsbeweglich. Hierzu gehören auch die sogen. lösbaren oder Ausrück-Kupplungen.

a) Längsbewegliche Kupplungen

entstehen sofort aus Muffenkupplungen, wenn man diese in der Richtung des Umfanges (normal zur Axe) nach einer gebrochenen Linie zertheilt denkt; sie entstehen ferner aus Scheibenkupplungen, wenn man auf den Stoßflächen der Scheiben abwechselnd Erhöhungen, Klauen, aufgesetzt denkt, welche kammartig in einander greifen. Eine Kupplung, deren Theile also wie die feste Hälfte (links) der Ausrückkupplung Fig. 4, Bl. LXX gestaltet sind, wo jede aber mit dem zugehörigen Wellenstücke fest verbunden (aufgekeilt) ist, stellt eine solche längs bewegliche Kupplung dar.

Es ist leicht ersichtlich, daß, wenn zwei in einer Axe liegende Wellen auf solche Art mit einander verkuppelt werden, diese nach Maßgabe der Klauenlänge eine Verschiebung in der Axenrichtung erleiden können, ohne daß die gleichförmige Bewegungsübertragung gestört wird. In constructiver Hinsicht ist nur zu bemerken, daß man die Klauen so stark machen, die Anzahl derselben also so wählen muß, daß eine dergleichen im Stande ist, die ganze in die getriebene Welle zu übertragende Kraft des Torsionsmomentes mit genügender Festigkeit gegen Bruch aufzunehmen. Außerdem findet man bei diesen Kupplungen gewöhnlich an der Peripherie noch einen bis zur halben Höhe der Klauen und Zähne reichenden geschlossenen Rand, so daß, wenn die beiden Kupplungshälften ganz zusammenstehen, sich an dem Umfange nicht eine gebrochenlinige Fuge, sondern eine ebenkreisförmige zeigt.

In Fig. 4, Bl. LXX haben wir zur Erhaltung einer genau centrischen Wellenlage angenommen, daß die eine Welle mit einem cylindrischen Zapfen in die andere eingreift. Dasselbe kann, besonders bei den nur längsbeweglichen Kupplungen auch dadurch erreicht werden, daß die eine Welle ein Stück in die Hülse der gegenüberstehenden Kupplung eintritt.

Diese Kupplung, welche von Sharp-Brothers in Manchester früher ausschließlich angewendet wurde, macht sich jedenfalls da nöthig, wo in den Wellen eingedrehte Lager und dergleichen Widerstände vorkommen, damit nämlich dem Einflusse der

Digitized by Google

Temperaturdifferenzen Genüge geleistet werde. An den meisten Transmissionswellen sind sie jedoch heut' zu Tage entbehrlich, weil man eben dort die Lagerstellen nicht mehr eindreht; sie haben auch den großen Nachtheil, daß sie die Montage und Demontage erschweren, da man hierbei die eine Kupplungshälfte um die Zahnhöhe auf der Welle verschieben muß.

Die Herstellung der Sharp'schen Kupplung wird dadurch sehr vereinfacht, daß man nur die eine Hälfte ganz nach dem Modelle abgießt und die zweite Hälfte, soweit es die Klauen betrifft, über dem fertigen Gußstücke der ersten. Dadurch wird die Bearbeitung der Klauen unnöthig, und dieselben passen dennoch gut ineinander. Uebrigens gestattet diese Klauenkupplung auch ein geringes „Ecken" der Wellen; sie ist also da zu empfehlen, wo voraussichtlich die Wellen in Folge Veränderlichkeit der festen Flächen etwas von der genau geradlinigen Richtung abweichen werden. — Mit Zugrundelegung der erforderlichen Bedingungen läßt sich eine solche Kupplung auch noch auf andere Weise construiren. —

b) Querbewegliche Kupplungen.

Ist man von zwei zu verkuppelnden Wellen überzeugt, daß sie unverändert eine parallele Lage zu einander einnehmen und beibehalten werden, ist es aber nicht möglich, die geometrischen Axen derselben in eine Richtung zu verlegen, so wendet man zur Verbindung die Oldham'sche*) Kreuzscheiben-Kupplung, Fig. 1, Bl. LXX an, welche auch eine gleichförmige Bewegungsübertragung bewirkt. Dieselbe besteht aus zwei gleichen, je auf einem der beiden Wellenenden mittelst Torsionskeilen befestigten Kupplungsscheiben, von denen jede eine auf der Stirnfläche central eingehobelte prismatische Nut enthält. Dazu kommt noch eine cylindrische Hilfsscheibe von dem gleichen Durchmesser wie der der Kuppelscheiben, welche an jeder ihrer ebenen Stirnseiten eine in die Nut der betr. Kupplungsscheibe passende prismatische Erhöhung (Feder) trägt. Diese beiden Federn stehen rechtwinklig zu einander, sodaß, wenn die Kupplung einmal montirt ist, die Zwischen- oder Mitnehmerscheibe in jeder Lage von den Kupplungsscheiben festgehalten wird.

Fallen nun die Normal-Projectionen der Wellenaxen in einem Punkte C (Fig. 1, Bl. LXX) zusammen, so bewegt sich bei der Drehung auch die Hilfsscheibe um ihren festen Mittelpunkt in C, und man hat weiter nichts als eine Mitnehmerkupplung. Liegen dagegen die Mittellinien der beiden parallelen Wellen in verschiedenen Ebenen, also die Projectionen derselben z. B. in C und C', so befindet sich bei der gezeichneten Stellung das Centrum der Mitnehmerscheibe in dem Durchschnittspunkte O der beiden durch die Centren C und C' gelegten, einander rechtwinklig kreuzenden Strahlen m n und m' n', d. i. mit anderen Worten: in der Peripherie eines Kreises vom Durchmesser C C'. Daraus geht hervor, daß sich bei der Drehung der Mittelpunkt der Hilfsscheibe in einem Kreise bewegt, dessen Durchmesser durch den Normalabstand der Wellenaxen gebildet wird, und zwar geschieht dies während einer ganzen Umdrehung der Wellen zweimal, da, während der Strahl m' n' sich von P P' aus um 90° dreht, der Schnittpunkt O desselben mit dem Kreise C O C' die halbe Peripherie dieses Kreises durchläuft, bei $4 \times 90°$ Drehung von m' n' also viermal der Halbkreis von C O C' durchlaufen wird.

*) Reuleaux 1869, pag. 260.

Digitized by Google

Die Peripherie der Kreuzscheibe bewegt sich dabei innerhalb einer Kreisfläche vom Durchmesser P P', und es ist bei der Anlage darauf Rücksicht zu nehmen, daß ihr ein entsprechender Raum zur ungestörten Bewegung verfügbar ist.

In Fig. 1, Bl. LXX haben wir angenommen, daß die Wellenenden etwas, vielleicht um die Größe $s = 2{,}5 + 0{,}05\,d$ abgesetzt werden, wodurch, da unsere Formeln für die Wellenstärken einestheils mit Rücksicht auf Durchbiegung, anderntheils mit Rücksicht auf den Verdrehungswinkel abgeleitet sind, eine nachtheilige Schwächung nicht wohl entstehen kann. Der sich ergebende Wellenansatz ist aber hier deshalb von Werth, weil bei dieser Kupplung auf eine gehörige Berührung der einzelnen Theile an ihren Stirnflächen gesehen werden muß. Außerdem ist selbstverständlich, daß die Wellen nur bis an die betr. Federn der Mittelscheibe heranreichen dürfen.

Die Dimensionen der Kupplungsscheiben sind entsprechend denjenigen der Scheibenkupplungen gewählt und die Verhältnisse aus den der Fig. 1 beigeschriebenen Werthen zu ersehen. —

Für die Hauptwellen von zwei zu verkuppelnden Motoren wendete man früher die Krummzapfen- oder Schleppkurbel-Kupplung*) an, welche darin besteht, daß die zwei, je an einem Ende der einander gegenüberstehenden Wellen befestigten, Kurbeln mit ihren Kurbelzapfen durch eine Zugstangenscheere (Zugorgan) verbunden sind, sodaß die eine Kurbel die andere vermittelst der Scheere als Zugorgan mit fortzieht. Auch hier können die Wellen parallel zu einander etwas verschoben werden und, wenn die Kurbelzapfen kugelförmig gestaltet sind, kann auch der Axenwinkel um ein Weniges von der gestreckten Form (180°) abweichen. —

Fig 2ᵇ, Bl. LXX ist eine Hebel- oder Mitnehmerkupplung der einfachsten Construction. Sie ist hier nur in der Seitenansicht (Grundriß) gezeichnet, so daß man die Profile der Hebel erkennt; übrigens ist sie ganz ähnlich gestaltet wie die vorhergehende, allerdings nur „gelenkige" Kupplung Fig. 2ᵃ, und sie bildet den Uebergang von den längs- und querbeweglichen Kupplungen zu den gelenkigen oder Kreuz-Kupplungen.

In Fig. 2ᵇ, Bl. LXX ist angenommen, daß die beiden Wellen mit ihren Mittellinien in eine Richtung fallen. An jedem der betr. Wellenenden ist normal zur Wellenaxe ein doppelarmiger Hebel angeschweißt, und einer derselben ist wiederum an seinen Enden mit prismatischen, parallel zur Wellenaxe vorspringenden Ansätzen versehen, welche sich an zwei gegenüberstehenden Seiten des anderen Hebels gegen diesen anlegen, ihn also „mitnehmen".

Die Art und Weise dieser ziemlich freien Berührung läßt erkennen, daß zwei solcher Art verbundene Wellen in engen Grenzen, sowohl längs- und querbeweglich, als auch gelenkig verkuppelt sind. Dabei, und zwar eben auf Grund der freien Beweglichkeit, wird jedoch erfordert, daß beide Wellenstücke neben den bezüglichen Kupplungshebeln gelagert sein müssen, wie es sich für schwere Wellen auch bei der Construction Fig. 1 und bei der Schleppkurbel-Kupplung nothwendig macht.

*) Wiebe, „Die Lehre von den einfachen Maschinentheilen", Fig. 20, Taf. 15.

Digitized by Google

c) Gelenkige und Kreuzgelenk-Kupplungen.

Die Bezeichnung „gelenkig" ist speciell angewendet auf die der vorhergehenden Construction verwandte Mitnehmerkupplung, Fig. 2ª, Bl. LXX. Die doppelarmigen Hebel sind hier (von Gußeisen) in Form von ovalen Scheiben ausgeführt und die Mitnehmer oder Zapfen (von Stahl) in die eine der Scheiben wie Kurbelzapfen eingesetzt. Dadurch, daß die rundlich profilirten Zapfen in cylindrisch ausgebohrte Löcher der gegenüberstehenden Scheibe eingreifen, wird eine Uebertragung in jedem Drehungssinne möglich, und die Wellen können mit ihren Axenrichtungen ein wenig von dem gestreckten Winkel abweichen.

In constructiver Hinsicht ist zu bemerken, daß strenggenommen die Profilbogen der Zapfen vom Wellenstoße im Wellenmittel aus beschrieben werden müssen, und bezüglich der Festigkeit beobachte man die Forderungen der Biegungsfestigkeit und berechne hier, wie auch bei Fig. 2ᵇ, jeden Hebelarm und jeden Zapfen auf die ganze zu übertragende Kraft.

Bezeichnet nämlich

$$M = PR$$

das Torsionsmoment der getriebenen Welle, und ist R = Normal-Entfernung des Zapfenmittels von der Wellenaxe, so hat man für die Kraft P im Zapfen, resp. im Hebelende:

$$P = \frac{M}{R}.$$

Fig. 3, Bl. LXX. Mit den Namen Kreuzgelenk-Kupplung, Universal-Gelenk oder -Kupplung, Hooke'scher Schlüssel bezeichnet man eine dem Principe nach von dem Italiener Cardano im 16. Jahrhundert erfundene und von dem Engländer Hooke im 17. Jahrhundert zuerst auf Wellen angewendete Verbindung stangenförmiger Körper, welche die Eigenthümlichkeit besitzt, daß sie die drehende Bewegung der einen Stange auf die andere noch überträgt, selbst wenn die Mittellinien der Stangen wesentlich (bis 30° ungefähr) von der geraden Richtung abweichen, wenn sie mit einander einen Winkel von 180° bis 150° einschließen. Freilich ist dann, wenn der Axenwinkel $\alpha < 180°$ ist, die Bewegungsübertragung nicht mehr übereinstimmend gleichförmig*): Die Drehung der treibenden Welle als „gleichförmig" vorausgesetzt, erleidet dann die getriebene Welle während einer Umdrehung (um 360°) zweimal wiederkehrende Schwankungen, Ab- und Zunahme in der Geschwindigkeit, welche im Allgemeinen mit der Abweichung des Axenwinkels von der gestreckten Lage an Größe zunehmen und innerhalb einer Drehung bei 45°, 135°, 225° und 315° absolut ihre größten Werthe (abwechselnd negativ und positiv) erlangen; zwischen diesen Stadien giebt es je eines (90°, 180°, 270° und 360°), wo die zurückgelegten Winkeldrehungen beider Wellen übereinstimmen.

Bei $\alpha = 170°$ ist die größte Differenz der Winkeldrehung 26 Minuten und bei $\alpha = 150°$ ist sie 4° 06", und es können also bei stärkerer Abweichung die Unregelmäßigkeiten der Drehungsübertragung wesentliche Störungen im Betriebe von Maschinen verursachen, deren Mechanismen solche Kreuzgelenkkupplungen enthalten, resp. dadurch betrieben werden.

*) Resultate über einschlagende theoret. Untersuchungen s. Reuleaux, Constructeur 1869, pag. 261. — Ebendaselbst und in v. Reiche, „Die Maschinenfabrikation", sind verschiedene Constructionen von solchen Kupplungen gezeichnet.

Digitized by Google

Aus der Fig. 3, Bl. LXX erkennt man die Form und Construction einer der am häufigsten (und zwar besonders bei Göpelwerken) angewendeten Kreuzgelenk-Kupplungen. Sie besteht aus drei einzelnen Theilen: 2 gleichen, am Ende in Gabeln übergehenden Kupplungshülsen und 1 Hilfsstücke, gebildet aus zwei einander rechtwinklig kreuzenden, hohlcylindrischen Körpern. Erstere werden auf den betr. Wellenenden befestigt: gegen Drehung mittelst Längskeilen, die vom Ende der Wellen her eingebracht werden und zur Verhütung von Verschiebungen auf den Kupplungsköpfen mittelst Splißkeilen.

Jede Gabel umgreift eine der Röhren des Hilfsstückes und wird vermittelst eines durchgesteckten Schraubenbolzens daran befestigt. Die Höhlungen des Kreuzstückes sind in der Mitte ausgespart, damit man sie nicht auf die ganze Länge auszubohren braucht. Die Axen der beiden Röhren sind um die Bolzenstärke normal von einander versetzt, sodaß die Bolzen bei einander vorbeigehen. Sollen letztere in eine gemeinschaftliche Ebene verlegt werden, so muß der eine den anderen durchdringen, und der durchbohrte Bolzen muß entsprechend (ungefähr im Verhältniß von 5 : 8) stärker gemacht werden. Die Länge der Kreuzhülsen macht man nicht größer, als der Construction entsprechend nothwendig erscheint; dagegen würde man eine constructiv noch bessere Form erhalten, wenn man dieselben vom Kreuzungspunkte aus nach den Enden hin etwa cubisch-parabolisch verjüngte.

Die Kupplungsköpfe haben wir hier deshalb im Durchmesser etwas stärker angenommen als die Wellen, weil letztere in solchen Fällen ohnehin nicht sehr stark sind und weil durch das Keilloch eine Schwächung entsteht. — Die Drehung des Kreuzstückes um die Bolzen ist entsprechend der Abweichung der Axen von der geradlinigen Richtung nur eine sehr geringe, und zwar periodisch hin- und hergehende, die Beanspruchung der Kupplungstheile aber infolge der doppelten und unregelmäßigen Bewegung, namentlich bei kleinem Axenwinkel (α) ziemlich bedeutend.

In größeren Verhältnissen wählt man entsprechend solidere und der Inanspruchnahme und Abnutzung genügende Constructionen. Man macht z. B. das Hilfsstück in Form eines ebenen Kreuzes, mit 4 angedrehten Zapfen, aus Schmiedeisen und lagert diese in den zu getheilten Lagern ausgebildeten und event. mit Metallschalen versehenen Gabelenden, oder man macht die Gabeln ganz eng, setzt die Zapfen an der Außenseite derselben normal zur Wellenrichtung auf und ver-

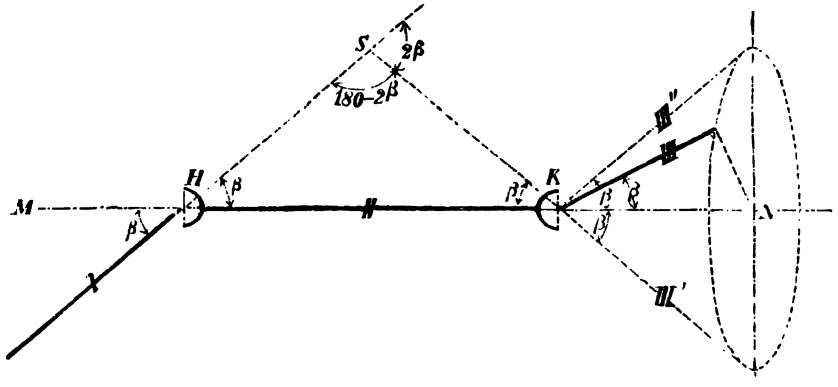


Fig. 133.

Digitized by Google

bindet sie durch einen in der Zapfenebene getheilten und mit 4 Lagern versehenen Ring.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal, wie die gleichförmige Bewegung einer Welle durch eine Universal- oder Kreuzgelenkkupplung auf eine andere übertragen wird, und denken wir uns eine derartige Verbindung von drei Wellen, wie in Fig. 133 skizzirt ist, so leuchtet ein, daß die periodisch während einer Umdrehung sich wiederholenden Nach- und Voreilungen der von I getriebenen Welle II zusammenfallen mit den entsprechenden Vor- und Nacheilungen der Welle III' in Bezug auf II, und daß demnach die Bewegung von III' wieder conform ist der Drehung von I. Man hat also hierin ein Mittel, zwischen zwei unter einem Winkel von $\alpha = (180^0 - 2\beta)$ gelagerten Wellen I und III' eine gleichförmige Bewegungsübertragung herzustellen: Man hat nur nöthig, zwischen die in einer Ebene liegenden, in S sich in der Verlängerung schneidenden Wellen I und III' eine mit zwei gleich- d. h. in einer Ebene gelegenen Hooke'schen Gabeln versehene Zwischenwelle symetrisch dem Schnittpunkte S gegenüber anzuordnen, sodaß durch die Abschnitte HS = KS und II ein gleichschenkliges Dreieck gebildet wird. Sogar für gekreuzte, also in verschiedenen Ebenen liegende Wellen ist dieses Ausgleichungsmittel anwendbar, jedoch mit der Beschränkung, daß die von den Hauptwellen (I und III) einzeln mit der Richtung MN der Zwischenwelle gebildeten Winkel (β) dieselbe Größe haben.

Es ist klar, daß sämmtliche durch Universal- oder Kreuzgelenke verbundenen Wellen einzeln für sich gehörig solid gelagert sein müssen.

3) Ausrück-Kupplungen.

Man versteht darunter solche zweitheilige Mitnehmer- oder Zahn-Kupplungen, deren Theile unter Anwendung besonders hierzu geeigneter Vorrichtungen (Hebel) bequem und rasch in resp. außer Eingriff gebracht werden können und nennt sie deshalb auch wohl lösbare Kupplungen. Fast bei jeder Arbeitsmaschine wird der Antrieb von der Transmission so angelegt, daß nach Erfordern die Maschine rasch und für sich allein aus- oder eingeschaltet, aus- oder eingerückt werden kann, daß man also die betr. Maschine bei fortgesetzter Drehung (oder wohl auch beim Ruhezustande) der Transmissionswelle ungehindert zum Stillstande resp. zum Gange bringen kann. Ebenso ist es bei manchen, namentlich größeren Anlagen wünschenswerth, daß ein ganzer Zweig einer Transmission, also z. B. die sämmtlichen Arbeitsmaschinen eines Fabriksaales, eine ganze Reihe, ein ganzes Sortiment dergl. auf ein Mal in oder außer Thätigkeit gesetzt werden kann. Oder endlich kommt es vor, daß von dem gesammten Mechanismus einer zusammengesetzten Maschine ein gewisser Theil, der vielleicht für sich eine besondere Arbeit verrichtet, durch eine leicht lösbare Vorrichtung mit dem übrigen Getriebe verbunden ist. Der Hauptzweck, eine leicht lösbare Verbindung in der Bewegungsübertragung bei einer Maschine oder Anlage herzustellen, wird in den meisten Fällen durch Anordnung sogen. Ausrückkupplungen erfüllt; außerdem hat man speziell bei Riementrieb noch die Ausrückung mit Fest- und Losscheibe, oder man hilft sich durch Ab- resp. Auflegen des Riemens, und bei Rädertrieb durch Verschiebung des Getriebes, sodaß direct der Eingriff der Räder eingeführt, bezhtl. aufgehoben wird. Rechnet man

Digitized by Google

hierzu noch die vielen Beispiele, in denen unter den verschiedensten Verhältnissen die Maschine selbstthätig, z. B. bei eintretender Störung im Arbeitsprocesse: bei Fadenbruch, bei mangelnder Zuführung von Rohstoff und dergl. ausrücken muß, die aber alle mehr oder weniger Specialitäten angehören, so stellt sich uns ein ziemlich großes Gebiet der Anwendung von lösbaren Kupplungen dar, wodurch zugleich die Wichtigkeit des Gegenstandes hinreichend begründet ist.

Die meisten Ausrückkupplungen sind Zahnkupplungen, wobei also, wie bereits pag. 156 bei Gelegenheit der Sharp'schen Kupplung erklärt wurde, die Bewegung der treibenden Welle durch Zähne, welche in gehörigen Abständen voneinander und ‖ zur Welle gerichtet, an der Stoßfläche der an dem betr. Wellenende festgekeilten Kupplungsscheibe angeordnet sind und welche in die correspondirenden Zahnlücken der auf dem gegenüberliegenden Ende der getriebenen Welle sitzenden, in der Längsrichtung verschiebbaren, an der Drehung aber durch eine (oder besser zwei) Feder gehinderten Kupplungsscheibe eingreifen, auf die andere Welle übertragen wird.

In Fig. 4, Bl. LXX ist die Construction einer solchen Klauen-Ausrückkupplung durchgeführt. Die Zähne oder Klauen sind hier im Allgemeinen von prismatischer Form, mit ganz geringer Verjüngung nach außen — wodurch das Einrücken erleichtert wird — angenommen; die Zahnflanken liegen in Ebenen, welche die Wellenaxe in ganz spitzen (3°) Winkeln schneiden. Die Anzahl der Zähne wählt man bei eigentlichen Wellenkupplungen in der Regel nicht größer als drei oder vier, dagegen kommen in Spinnmaschinen dergleichen Kupplungen vor, wobei die Zahntheilung sehr klein ist und wo man dann die Zähne nicht prismatisch, sondern keilförmig (Fig. 134ᵇ) gestaltet. Bei größerer Klauen- oder Zähnezahl braucht man die Welle mit der festen Kupplung nicht so weit zu drehen, um den Eingriff zu bewerkstelligen, dagegen fallen aber die Zähne dann schwächer aus, und das genaue Anpassen unter Farbe wird entsprechend schwieriger.

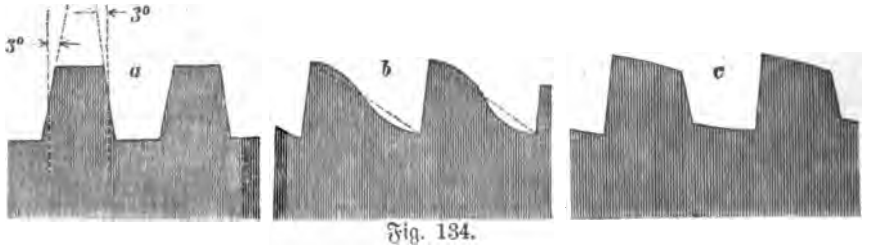


Fig. 134.

Außer der in Fig. 4, Bl. LXX angewendeten Zahnprofilform (Fig. 134ᵃ) gebraucht man, wie gesagt, noch eine andere (b, in nebenstehender Fig. 134). Erstere bietet außerdem den Vortheil, daß sie bei jeder Drehrichtung wirksam ist, während die letztere nur in einem Drehungssinne die Bewegung überträgt, dafür aber bequemer einzurücken ist und bei entgegengesetzter Drehung sich von selbst auslöst. Diese letztgenannte Eigenschaft stellt diese Kupplung im Principe den Schaltwerken gleich und eröffnet ihr dadurch ein besonderes Gebiet der Anwendbarkeit.

Die in Fig. 134ᵇ punktirt eingezeichnete Profilform, welche der eines geradlinig begrenzten Dreiecks entspricht, wählt man in der Regel nur bei sehr klein r Theilung und geringen Kräften, da die scharfen Kanten derselben leicht abspringen. — Die Formen (a) und (b) Fig. 134 combinirt, geben schließlich eine Zahnform,

Digitized by Google

welche sowohl bei Links- als auch bei Rechtsdrehung den Eingriff der Klauen aufrecht erhält, gleichzeitig aber ein bequemes Einrücken gestattet.

Indem wir nun speziell auf die vorliegende, bei Transmissionswellen häufigsten gebrauchte Construction, Fig. 4, Bl. LXX, eingehen, verweisen wir zurück auf pag. 156 und bemerken hier noch, daß die sogen. Feder, welche wohl eine Längsverschiebung, nicht aber eine Drehung der betr. Kupplungshälfte relativ zur Welle gestattet, im Grunde nichts weiter ist als eine prismatische Platte von rechteckigem Querschnitt, welche der Länge nach || zur Welle im Umfange derselben eingelassen und mit versenkten Stiftschrauben fest geschraubt ist. Da man jetzt in den meisten Maschinenwerkstätten Langloch-Bohrmaschinen hat und darauf die Nuten in den Wellen einfraist, so giebt man auch den Federn entsprechend abgerundete Enden. Der über den Umfang der Welle vorstehende Theil der Feder greift in eine an der inneren Umfläche der Kupplungshülse eingearbeitete Nut. Die Größe der Verschiebung muß natürlich etwas größer als die Zahnlänge sein, und dem entsprechend ist auch die Länge der Feder zu bemessen.

Zum Zwecke der Ausrückung, der Parallelverschiebung des losen Kupplungstheiles, hat derselbe eine nach außen verlängerte Nabe und in derselben ist für den Angriff der Ausrückgabel eine ringförmige Nut eingedreht. Damit man aber die lose Kupplung nicht weiter verschieben kann als nöthig ist, bringt man, wenn sonst kein Widerstand da ist, zur Begrenzung des Schubes einen Stellring an.

Als Hilfsmittel zur Bewerkstelligung des Ein- und Ausrückens verwendet man im Allgemeinen eine Gabel, welche in die ringförmige Nut der beweglichen Kupplungsscheibe eingreift und die in dieser Stellung normal zur Welle entweder geradlinig und in Richtung der Welle verschoben wird oder nach Art eines Hebels um einen festen Punkt schwingt. Den Drehpunkt des Hebels ordnet man so an, daß nach Zurücklegung des halben Schubes, also nach der Hälfte einer einfachen Schwingung die Mittellinie des Hebels normal steht auf der Axenrichtung der Welle, und damit der Ausschlagwinkel nicht zu groß ausfällt, macht man den Last-Hebelarm 4 :- 6 mal so groß als den Vorschub der Kupplung. Soll jedoch die Kupplung während des Ganges verschoben werden, so tritt hier oft insofern eine Beschränkung ein, als dann die durch den Druck des zu übertragenden Momentes an den Zahnflanken erzeugte Reibung zu überwinden ist und man dem Hebel eine genügend große Uebersetzung ertheilen muß. Hiernach bestimmt sich zugleich auch die Stärke des Ausrückhebels.

Anstatt daß man die Gabel direct mit etwa oval profilirten Enden in die Nut der Kupplung eingreifen läßt, gestaltet man diese Enden besser als (längliche) Augen und läßt darin cylindrische Zapfen eingreifen, welche ihrerseits mit kleinen viereckigen Prismen, die in die Nut der Kupplungsnabe passen, verbunden sind. Auf diese Weise wird das Abschleifen der Gabel in Folge der Drehung der Nut etwas verringert. Noch wesentlich solider und dauerhafter ist aber die Construction, welche wir in Fig. 5, Bl. LXX dargestellt haben, und wie es auch bei Fig. 4 d. Bl. vorausgesetzt ist.

Hier wird in die ringförmige Nut ein aus zwei Theilen zusammengeschraubter Ring von Schmiedeisen eingelegt. Jede Ringhälfte trägt an der Außenseite einen cylindrisch angedrehten Zapfen, an welchen die in Augenform ausgeführten Gabelenden, welche mit ovalen Löchern versehen sind, angreifen. In

Digitized by Google

kleineren Verhältnissen kann man die Gabel und den Hebel im Ganzen fertigen und beim Montiren die Gabelenden zusammenbiegen; ist jedoch der Hebel stark, so schraubt man das eine Gabelende an den Hebel an.

Damit sich der Ring nicht unnöthig abschleift, ordnet man, wie oben erwähnt, die Ausrückung an der getriebenen Welle an. Die Ausrückhebel sind theils einarmige, theils zweiarmige, wie es eben die Anlage erfordert.

Bringt man an dem verschiebbaren Kupplungstheile eine normale Schraubenfläche an und an geeigneter Stelle eine gegen diese Fläche einlegbare feste Knagge, so kann auf diese Weise die Ausrückung von der Kupplung selbst besorgt werden.*)

Schließlich sei noch bemerkt, daß man die Klauen-Ausrückung nicht nur zwischen zwei Wellen, sondern auch zwischen einer Welle und einem Rade, einer Riemen- oder Seilscheibe, einer Trommel einschalten kann, sodaß dann entweder die Welle oder der auf derselben leer laufende Gegenstand für sich allein bewegt wird und nur im eingerückten Zustande eine Bewegungsübertragung zwischen beiden Theilen stattfindet.

d) Frictions-Kupplungen

sind Wellenkupplungen, deren Theile die Bewegung einander nur durch die zwischen denselben erzeugte Reibung (Friction) mittheilen. Die Anordnung von Frictions-Kupplungen kann durch zwei verschiedene Ursachen bedingt sein: 1) Entweder, es soll in eine (getriebene) Welle nur ein ganz bestimmtes Maß von Arbeit übertragen werden, d. h. wenn der Widerstand in der getriebenen Welle dieses Maß überschreitet und die Arbeit der bewegenden Kraft nimmt dennoch an Kraftantheil zu, so entsteht zwischen den betr. Wellen eine relative Bewegung — die treibende Welle dreht sich schneller als die getriebene, es kann also auch die getriebene schließlich stillstehen — und der Ueberschuß an Arbeit verzehrt sich durch die zwischen den Kupplungstheilen eintretende Reibung, die sich theils in Wärmeentwickelung, theils als Abnutzung äußert. 2) Oder man benutzt die Frictionskupplung als Ausrückkupplung und bezweckt mit der Anwendung speciell der Reibungsübertragung eine allmälige, stoßfreie Einführung der getriebenen Welle und der durch dieselbe betriebenen Maschinen in den Bewegungszustand. Bei der Einrückung mit Fest- und Losscheibe hat man ebenso ein sanftes Anlassen, indem der Riemen nur allmälig ganz auf die Festscheibe übertritt und dabei anfangs stark gleitet.

In dem mehr oder weniger starken Gegeneinanderpressen der Kupplungstheile hat man ein Mittel, die zu übertragende Kraft in diejenigen Grenzen einzuschränken, welche der Inanspruchnahme der bei der Arbeitsübertragung in Mitleidenschaft zu ziehenden Theile entsprechen und somit zu verhindern, daß bei plötzlich und übermäßig gesteigertem Widerstande ein Bruch eintritt. Die Bewegungsübertragung geschieht bei Frictionskupplungen im allgemeinsten Sinne an Kegelflächen. Je nachdem nun der halbe Spitzenwinkel (α) der Kegelfläche ist entweder: a) $\alpha = 0$ oder b) $0 < \alpha < 90^0$ oder c) $\alpha = 90^0$, unterscheidet man Frictionskupplungen, bei denen die Reibung a) an Cylinderflächen; b) an Kegelstächen; c) an ebenen Kreisflächen erzeugt wird.

*) Salzenberg, Vorträge über Maschinenbau, pag. 64.

Digitized by Google

Die Arten unter a) und c) sind selten in dem oben erklärten Sinne zugleich Ausrückkupplungen, d. h. sie werden häufiger so construirt, daß die einander reibenden Theile erst durch Anziehen mehrerer Befestigungsschrauben in gehörige Berührung unter Druck mit einander gebracht werden, was zunächst nur während des Stillstandes geschehen kann und eine namhafte Zeitdauer in Anspruch nimmt. Bei den eigentlichen Kegel-Frictions-Kupplungen hingegen wendet man gewöhnlich dieselbe Ausrückungsart wie bei den Klauen-Ausrückkupplungen, nämlich die Ausrückgabel an, welche mittelst Hebel oder Schraube rasch und auch während des Ganges verschoben werden kann.

Die Cylinderkupplungen*) gleichen mehr einer Band- oder Backenbremse: Es wird z. B. um den einen eine Art Bremsscheibe bildenden Kupplungstheil ein zweitheiliges Brems- oder Schloßband gelegt, mittelst Schrauben angezogen und an der Peripherie mit Knaggen versehen, gegen welche sich der andere in Gestalt eines Mitnehmers gebildete Theil anlegt und, falls das Band gehörig angezogen ist, von diesem mitgenommen wird. Tritt die cylindrische Reibungsfläche als Hohlfläche**) auf, so preßt man in radialer Richtung zwei oder mehrere an dem anderen Theile befestigte und in demselben geführte Backen gegen den Umfang der ersteren an, und dieses kann, wenn es durch Hebel oder Kniehebel erfolgt, auch im Bewegungszustande geschehen.

Die Scheiben-Frictionskupplung***) wird dadurch in Wirksamkeit versetzt, daß man den eine ebene Kreisscheibe bildenden Kupplungstheil zwischen eine eben solche auf der anderen Welle und eine mit dieser durch Schrauben zu verbindende ebene Ringscheibe festklemmt.

Bei diesen genannten Arten von Frictionskupplungen bedient man sich zur Erzeugung eines hohen Reibungscoefficienten gewöhnlich des Holzes, welches dann zwischen die Kupplungstheile eingelegt wird. — Wir erwähnen auch hier wieder, daß, wenn die zu verkuppelnden Wellen nicht auf irgend eine andere Art und Weise in gegenseitig centrischer Lage gehalten werden, man nothwendigerweise jedes Wellenende in der Nähe der Kupplung durch ein Lager unterstützen muß. —

Denkt man sich nun die eine Kupplungsscheibe an der Peripherie in Gestalt eines (abgestutzten) Kegelmantels abgedreht und die andere als eine die erstere passend umschließende Hohlform ausgeführt, so wird, wenn diese beiden Körper durch einen axialen Druck gegeneinander gepreßt werden, eine Reibung zwischen den einander berührenden Kegelflächen entstehen, und wenn das Moment der Reibung demjenigen der zu übertragenden Kraft (des Widerstandes in der getriebenen Welle) gleich ist, so findet eine feste Verbindung zwischen beiden Kupplungstheilen statt; es kann aber dann nicht mehr und nicht weniger Kraft in die getriebene Welle übertragen werden, als wie der Reibung entspricht.

Hat man es nun einerseits durch die Ausübung eines bestimmten Axialdruckes in der Hand, die Größe der zu übertragenden Kraft genau zu reguliren, so wird andererseits die Größe des erforderlichen Axialdruckes abhängig sein von der Größe des Spitzenwinkels der

---

*) Wiebe, die Lehre v. d. einf. Maschthl. Taf. 16, Fig. 5; v. Reiche, d. Masch.-Fabrik. I, Taf. 14.

**) Reuleaux, Constrctr. Fig. 315 u. 316.

***) —— do. Fig. 310.

Digitized by Google

Kegelfläche und dem mittleren Durchmesser (normal zur Wellenaxe) derselben. Zur Erläuterung diene folgende Betrachtung.

Hat man eine Hohl-Kegelfläche A B B' A' mit dem Spitzenwinkel (2α) und eine gleiche, concentrisch zu jener gelegene und mit einem gesammten Axialdrucke D dagegen gepreßte convexe Kegeloberfläche, denkt man sich ferner den Druck D gleichmäßig über die Flächen

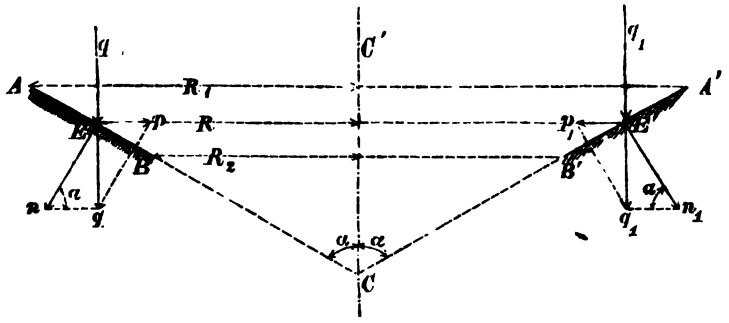


Fig. 135.

vertheilt, sodaß in einem Punkte E (links) ein Paralleldruck q und in einem anderen, jenem symetrisch gegenüber gelegenen, ein gleicher Druck q_1 entsteht, so findet man die hieraus resultirenden, einander gleichen Normaldrücke n und n_1, welche allein für die Reibungsgröße maßgebend sind, durch die in der Figur gezeichnete Zerlegung und mit Hilfe trigonometrischer Rechnung zu:

$$n = \frac{q}{\sin \alpha}.$$

Die Componenten ($p = p_1$), normal zur Kegelaxe, heben sich als gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kräfte gegenseitig auf.

Besteht nun der Gesammtdruck D aus den einzelnen unter einander gleichen Paralleldrücken q, q_1, q_2, q_3 . . ., sodaß also:

$$D = q + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots .$$

so hat man, wenn F die gesammte Reibungsgröße und φ den Reibungscoefficienten bedeutet:

$$F = \frac{\varphi q}{\sin \alpha} + \frac{\varphi q_1}{\sin \alpha} + \frac{\varphi q_2}{\sin \alpha} + \frac{\varphi q_3}{\sin \alpha} + \ldots$$

oder:

$$F = \frac{\varphi}{\sin \alpha}(q + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots) = \frac{\varphi D}{\sin \alpha}.$$

Das Moment der Reibung bestimmt sich nun durch das Product der Reibung F und ihren Hebelarm, d. h. den Abstand ihres Angriffspunktes von der Drehaxe C C'. Dieser Angriffspunkt liegt im Schwerpunkte der Kegelfläche; da diese aber in Wirklichkeit bei den Frictionskupplungen einem niedrigen abgestutzten Kegel angehört und zudem die Winkel α nicht sehr groß vorkommen, so begnügen wir uns der Einfachheit wegen mit einer Annäherung und setzen als Hebelarm der Reibung den mittleren Radius

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Ist nun außerdem das zu übertragende Moment = M, so findet eine Verbindung der Wellen durch die Frictionskupplung statt, wenn:

$$M \leq \frac{\varphi D}{\sin \alpha} \cdot R \ldots . \quad (16).$$

Denkt man sich die Kraft P des Momentes M in einen Punkt verlegt, der von der Drehaxe den gleichen Normalabstand R hat wie die Reibung, so ist $M = PR$ und alsdann wird:

$$\frac{(PR)\sin \alpha}{R \varphi} \leq D \geq \frac{P \sin \alpha}{\varphi} \ldots (17).$$

Digitized by Google

Für den halben Kegelwinkel α beobachtet man gewöhnlich die Grenzen $10^0 < \alpha < 20^0$ macht den mittleren Halbmesser der Frictionsscheiben $R = 4\,b \div 6\,b$ und, da hier die reiben-, den Flächen meistens von Gußeisen sind, so gilt als Reibungscoefficient für den Beginn des Gleitens $\varphi = 0{,}16$, während desselben $\varphi = 0{,}15$. —

Beispiele.

1. Aufgabe. Gesetzt, es sei der Durchmesser einer getriebenen Welle von Schmiedeisen $b = 30^{mm}$ und dieselbe mit der treibenden durch eine Frictions-Kegel-Kupplung von 300^{mm} mittlerem Durchmesser und 25° Spitzenwinkel verbunden. Bis zu welcher Größe darf man den Axialdruck steigern, ohne daß sich die getriebene Welle mehr als um 15 Minuten pro Meter Länge verdreht?

Auflösung. Bei der Ableitung der Formeln pag. 137 machten wir eine der in vorstehender Aufgabe gestellten Bedingung gleichlautende Annahme, und wenn wir daher aus Formel (48a) rückwärts das Moment (PR) für den Wellendurchmesser $b = 30^{mm}$ berechnen, so erhalten wir einen Werth, der für die Berechnung des Axialdruckes D in Formel (17) einzuführen ist. Es ist:

$$b = 4{,}13 \sqrt[4]{PR}; \quad b^4 = \overline{4{,}13^4} \,.\, PR$$

$$PR = \left(\frac{30}{4{,}13}\right)^4 = 2782{,}7^{kmm}.$$

Das giebt, in Formel (17) eingesetzt:

$$D = \frac{2782{,}7}{150\,.\,0{,}15} \,.\, \sin 12^0\,30' = 123{,}7\,.\,\sin 12^0\,30'$$

$$\log D = \log 123{,}7 + \log \sin 12^0\,30'$$

$$= 2{,}0923697$$

$$+ 9{,}3353368 - 10$$

$$1{,}4277065$$

und $$D = 26{,}77^k.$$

Bewirkt man das Andrücken mittelst eines Hebels (Fig. 5, Bl. LXX), dessen Schenkel = 1 : 4 übersetzt sind, so dürfte man also am Kraftende desselben im höchsten Falle mit $6{,}69^k$ drücken, vorausgesetzt, daß die getriebene Welle wirklich ein Moment $PR = 2782{,}7^{kmm}$ oder bei 100 Umdrehungen pr. Min. circa 0,4 Pferdestärken überträgt. —

Bei den Frictions-Kupplungen mit radialem Drucke erfolgt die Berechnung nach der Methode der Backen- resp. Bandbremsen; im letzteren Falle ist jedoch die Bestimmung insofern schwierig, als man die Kraft, mit welcher die Schrauben das Schloßband anziehen, nicht ohne weiteres messen kann. —

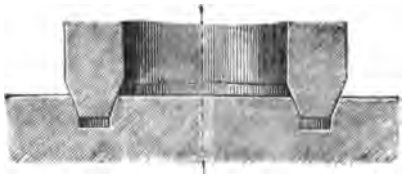


Fig. 136.

Eine sehr wirksame Frictionskupplung erhält man, indem man jeden der beiden Kupplungstheile mit einer Hohl- und einer Vollkegelfläche versieht, Fig. 136, und wenn man schließlich anstatt des einen doppelconisch abgedrehten Ringes deren in jeder Kuppelscheibe mehrere concentrisch zueinander und in einer Ebene gelegene anordnet, so erhält man eine Riffelscheiben-Kupplung, Fig. 137. Die Bestimmung des Axialdruckes erfolgt dann im Allgemeinen nach denselben Grundsätzen wie bei der einfachen Kegel-Frictionskupplung; man hat nur für den Hebelarm der Reibung einen anderen

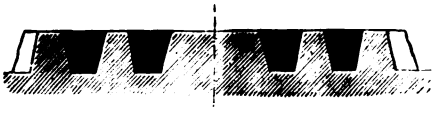


Fig. 137.

Digitized by Google

Werth einzuführen, und zwar hinreichend genau = äußeren Halbmesser der Riffelscheiben, weniger $^1/_3$ der Breite der geriffelten Ringfläche. —

Die Frictionskupplungen überhaupt sind ausgezeichnet durch die Vorzüge, daß man ein allmäliges und sanftes Einrücken damit erzeugt, daß man das Maximum des zu übertragenden Druckes leicht reguliren kann, daß zum Ein- und Ausrücken schon eine geringe Verschiebung des beweglichen Kupplungstheiles genügt und daher bei stehenden Wellen unter Umständen beide Kuppelscheiben auf den betreffenden Wellenenden festgekeilt werden können. Mit Ausnahme dieser letztgedachten Anordnung sind aber derartige Frictionskupplungen mit besonderer Ausrückung von dem Nachtheile begleitet, daß der Axialdruck während der Uebertragung unausgesetzt wirken muß und in Folge dessen ein starker Verschleiß zwischen den während der Uebertragung an einander schleifenden Theilen stattfindet. Eine Construction der Ausrückung, wobei wenigstens die Welle von Axialdruck entlastet wird, giebt Reuleaux in s. Constr. 1869, pag. 273 an.

In Fig. 6, Bl. LXX ist eine Kegel-Frictionskupplung in $^1/_{10}$ der wirklichen Größe dargestellt. Dieselbe verbindet jedoch nicht zwei Wellen miteinander, sondern überträgt im Zustande des Eingerücktseins die Bewegung einer Welle auf ein an derselben Welle lose, d. h. nur drehbar, aufgesteckes Zahnrad, wodurch erst eine andere Transmissionswelle oder die Antriebwelle einer Maschine in Bewegung gesetzt wird. Die Bewegungsübertragung kann auch in umgekehrter Richtung erfolgen.

An zwei parallel zu einander gelegenen, die Welle rechtwinklig kreuzenden Holzbalken ist eine gußeiserne, in der Mitte durchbrochene Traverse angeschraubt, welche nach der Seite der Kupplung hin mit zwei Parallel-Führungen versehen ist. Auf der Welle ist eine gußeiserne Hülse drehbar aufgesteckt, welche an der Oberfläche flaches Gewinde trägt und (links) in zwei Lappen endigt, in denen die Schrauben zur Befestigung des getheilten Ausrückringes eingebracht sind. Diese Lappen werden von den oben erwähnten Führungen umschlossen, und somit ist die Schraubenhülse an Drehung gehindert. Das Muttergewinde für dieselbe befindet sich in der Nabe eines Handrades, welche außerdem mit einer eingedrehten Nut versehen ist, und welche durch eine getheilte, in die Nut eingreifende und an der Traverse durch vier Schrauben befestigte schmiedeiserne Platte nicht an Drehung, wohl aber an Längsverschiebung gehindert ist.

Die Kuppelscheibe mit der Hohlkegelfläche ist mittelst Nut und Feder (verschiebbar aber undrehbar) auf der Welle befestigt. Das Stirnrad steckt lose auf derselben Welle und ist in seiner Lage bezüglich der Längenaxe durch zwei Stellringe fixirt; die Vollkegelscheibe ist seitlich und concentrisch an dasselbe angegossen. Dreht man nun das Handrad nach einer Richtung um, was auch während der Drehung der Welle geschehen kann, so wird die Schraubenhülse und damit die Hohlkegelscheibe in Richtung der Welle verschoben, dem Zahnrade mit Vollkegel also genähert oder von demselben entfernt, event. ein- oder ausgerückt.

e) Motoren-Kupplungen

wendet man da an, wo eine Transmission gleichzeitig oder abwechselnd durch zwei oder mehrere Kraftmaschinen zu betreiben ist. Sehr oft z. B. findet man, daß neben einer Turbine, einem Wasserrade ꝛc. eine Reserve-Dampfmaschine aufgestellt

Digitized by Google

ist, sodaß bei zu großem Wassermangel die Dampfmaschine als Betriebsmaschine eintritt. Außerdem aber kommt es auch vor, daß die Arbeit von zwei und mehr Motoren gleichzeitig und fortwährend von den Arbeitsmaschinen consumirt wird. Nun könnte man zwar die Verbindung der einzelnen Motoren mit der gemeinschaftlichen Transmission einfach durch Riemen- oder Rädertrieb herstellen und in diesen Verbindungen gewöhnliche Klauenkupplungen einschalten oder das Ein- und Ausrücken direct durch Auf- resp. Ablegen des Riemens, bezhtl. durch Verschiebung der Zahnradgetriebe bewirken; das ist jedoch zum Theil umständlich, da zu dem Zwecke meist die andere Betriebsmaschine erst still gestellt werden muß. Es tritt aber bei solchen Anlagen ein noch viel wichtigerer Umstand auf, welchem die sogen. Motorenkupplungen zugleich Rechnung tragen.

Da nämlich einerseits der Widerstand in einer Anlage zufolge Ein- und Auslegens von einzelnen Arbeitsmaschinen variirt, andererseits ein Motor, sofern nicht ein sehr empfindlicher Regulator dabei wirkt, unter dem Einflusse wechselnder Dampfspannungen verschiedene Geschwindigkeiten annehmen kann, so ist unter Umständen der Fall möglich, daß der eine Motor den andern mit fortschleppt. Um dies zu verhindern, sowie überhaupt ein **selbstthätiges Ein- und Austreten** des einen oder andern Motores zu ermöglichen, construirt man diese Motorenkupplungen nach dem Principe der Sperrwerke.

Die beiden bekanntesten Constructionen sind in dieser Beziehung die von Pouyer-Quertier und von Uhlhorn. Die letztere haben wir ihrer Anordnung nach auf Bl. LXX in Fig. 7 mit dargestellt. Sie besteht aus zwei Kuppelscheiben A und B, welche auf den bezüglichen, in einander concentrisch verzapften Wellenenden a und b fest aufgesteckt sind. Die Scheibe A ist mit einem starken, nach der anderen Scheibe vorspringenden Rande versehen, an dessen innenseitigem Umfange, gleichmäßig vertheilt, drei Lücken ausgespart sind und gegen welchen zur Verdeckung des Mechanismus eine Scheibe C vorgeschraubt wird.

In der Scheibe B sind einander gegenüberstehend zwei Sperrklinken c (von Stahl), drehbar um einen kleinen Winkel, gelagert, und zwar ist dabei die Befestigung mittelst Bolzen vermieden, da derselbe sehr stark gemacht werden müßte und dennoch eine bedeutende Abnutzung desselben eintreten würde; ein concentrisch in die Scheibe eingelegter und mit versenkten Schrauben daran befestigter Eisen- oder Stahlring verhindert, daß die Klinken andere als vorgeschriebene Lagen einnehmen können. Gegenüber den Lücken sind im Rande der Scheibe A Stahlfedern d angebracht, welche auf der Peripherie der Scheibe B gleiten und event. die etwas vorstehenden Klinken in die betr. Lücken einführen.

Ist nun die Welle a treibend, oder allgemein, bewegt sich die Scheibe A relativ zu B, so fällt eine der Klinken in die zunächst liegende Lücke ein und nimmt B und b mit. Das geschieht bei der vorliegenden Anordnung (von 2 Klinken und 3 Lücken) schon nach $^1/_6$ Drehung. Dreht sich aber B in Bezug auf A, d. h., läuft b schneller als a, so wird der Zusammenhang gelöst; es kann sich also allgemein nach einer bestimmten Richtung eine Welle ohne die andere drehen.

Auch hier kann die Anordnung auf eine einzige gemeinschaftliche Welle so übertragen werden, daß die Scheibe lose auf derselben drehbar gemacht wird und

Digitized by Google

daß die Einführung der Bewegung durch die dann verzahnt gedachte Scheibe A oder dadurch, daß man auf die Nabe derselben ein Zahnrad, resp. eine Riemenscheibe festkeilt, erfolgt. —

VIII. Räderwerke.

Allgemeines.

1) Erklärung und Eintheilung.

Nehmen wir die vorliegende Ueberschrift in der allgemeinsten Bedeutung des Wortes, so verstehen wir unter Räderwerken alle diejenigen Maschinentheile, welche die drehende Bewegung, die in der Wirklichkeit stets mit einer Kraft gepaart ist, von einem Zapfen, einer Axe oder Welle auf ein anderes dergleichen Organe übertragen, und es sind dann der Form nach jene meistens kreis-scheibenförmige Körper — oder Theile von solchen — welche einzeln um eine, in Bezug auf das Rad als feststehend zu betrachtende, Drehungsaxe (Mittellinie) rotiren oder schwingen.

Wir unterscheiden einfache und zusammengesetzte Räderwerke. Jene bestehen nur aus zwei Rädern, Scheiben oder Rollen (Räderpaar), und diese werden durch Vereinigung von zwei oder mehreren Räderpaaren gebildet.

Damit unsere Leser zuerst einen möglichst umfassenden Ueberblick über die Gesammtheit der Räderwerke bekommen, geben wir unter „Allgemeines" eine Eintheilung des zu behandelnden Stoffes nach den verschiedenen, in praktischer wie in theoretischer Hinsicht in Betracht kommenden Gesichtspunkten, werden uns aber in der weiteren Ausführung dieses Kapitels dann lediglich auf die bei Transmissionen vorkommenden Räderwerke, welche ihrer mannigfachen Construction und vielfachen Verwendung wegen einer wissenschaftlichen Untersuchung besonders werth erachtet werden müssen und deshalb auch als die Repräsentanten der ganzen Gattung angesehen werden können, beschränken.

Die fünf in dieser Richtung als wesentlich zu bezeichnenden Eintheilungsgründe sind:

1) die gegenseitige Lage der Drehaxen,
2) das Mittel der Bewegungsübertragung,
3) die Art der Bewegungsübertragung,
4) der Drehungssinn und
5) die Art der Befestigung.

In geometrischer Beziehung bieten sich uns unter

1) **Die gegenseitige Lage der Drehaxen**

die Bedingungen dar für die Grundformen der Räder, und zwar durch die vierfach verschiedene Lage der zwei zu einem Räderpaare gehörenden Drehaxen, bezüglich deren man unterscheidet:

Digitized by Google

α) Die Axen liegen in einer gemeinschaftlichen Ebene
  a) die Axen fallen in eine gerade Linie,
  b) „ „ sind parallel zu einander,
  c) „ „ schneiden einander.
β) Die Axen liegen in verschiedenen Ebenen und
  d) kreuzen einander. –

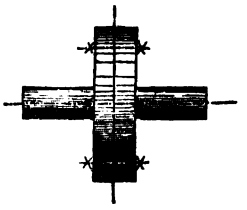


Fig. 138.

Wenn wir von einem „Räderwerke" reden, so denken wir uns darunter immer mindestens zwei Räder, Rollen, Scheiben oder dergleichen, die in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß, wenn man das eine derselben um seine Axe dreht, auch das andere eine entsprechende Drehung erleidet. Die Formen, die äußeren Begrenzungen solcher Räder, in Richtung ihrer Drehaxen angesehen, sind, wenn man alle, auch die zu den sogenannten „reinen Bewegungsmechanismen" gehörenden Beispiele mitrechnet, sehr verschieden: Es giebt Kreise, Ellipsen und Kreissectoren, viereckig-geschweifte und geradlinig-stabförmige Gestalten u. dgl. m. Wir schließen zum Voraus alle diejenigen Formen von der weiteren Betrachtung aus, welche hauptsächlich nur in kinematischer*) Beziehung Interesse bieten und ziehen nur die Kreisformen und die aus diesen abzuleitenden Formen, als Kreissectoren und gerade Linien (Kreisbogen mit unendlich großem Radius) in Betracht, und wollen wir die solcher Art gestalteten Scheiben zunächst ganz allgemein als „Räder" bezeichnen.

In derselben Weise nun, wie wir treibende und getriebene Wellen unterscheiden, gleichwie wir also von zwei durch eine Kupplung oder ein Räderwerk verbundenen Wellen diejenige Welle, welche der Kraftmaschine in Bezug auf die Kraftleitung näher liegt, als die treibende und die andere, welche von der treibenden ihre Bewegung erhält, als die getriebene bezeichnen, so nennen wir bei einem Räderwerke das Rad, welches die Bewegung des mit ihm verbundenen Rades hervorbringt, das „treibende" und letzteres das „getriebene" Rad. Auf die Form und Construction der Räder hat dieser Unterschied im Allgemeinen keinen Einfluß; es werden in sehr vielen Fällen (bei Hebmaschinen) sogar die Rollen vertauscht.

a) Räder, welche nun zwei in einer geraden Linie liegende Axen zum Zwecke der Bewegungs- — oder richtiger — Arbeits-Übertragung verbinden, welche also am einfachsten die Anordnung der Fig. 138 haben, sind „Kupplungen" und können, da wir dieselben zuvor in einem besonderen Kapitel behandelt haben, hier übergangen werden. Hervorzuheben ist jedoch nochmals, daß dieselben bei geradliniger Anordnung der Wellen die Bewegung unverändert einander mittheilen. —

b) Haben die zum Zwecke der Bewegungsübertragung zu verbindenden Axen wiederum dieselbe Richtung, aber einen gewissen Normalabstand (e) von einander, so sind — mögen die Räder „direct", d. h. unter gegenseitiger Berührung der Umfänge auf einander wirken, oder mögen sie einander die Bewegung „indirect", durch ein Zugorgan mittheilen — die Grundformen derselben cylindrische Kreisscheiben, Fig. 139 (oder Theile von solchen).

*) Kinematik, Getriebelehre, bildet gegenwärtig eine besondere Wissenschaft.

Digitized by Google

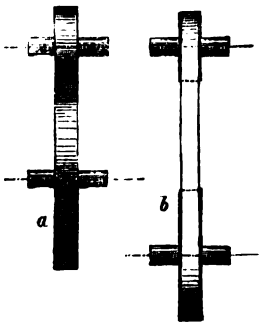


Fig. 139.

c) Denken wir uns ferner, daß die Axen zwar wie sub a) und b) in einer und derselben Ebene liegen, daß dieselben aber einen Winkel (α) mit einander einschließen — sich „schneiden" — so erhält man bei directer Aufeinanderwirkung (Fig. 140ª) als Grundform für die Räder kegelförmige, conische Kreisscheiben und muß bei Anwendung von Zugorganen (Fig. 140ᵇ) den cylindrischen Kreisscheiben noch ebensolche als Hilfsscheiben beifügen.

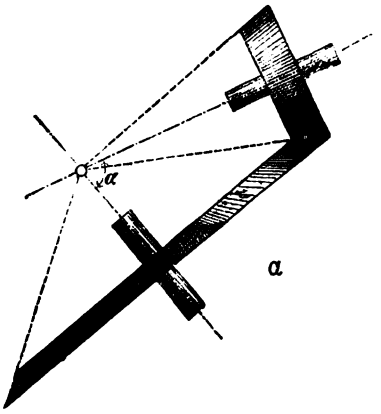


Fig. 140ª.

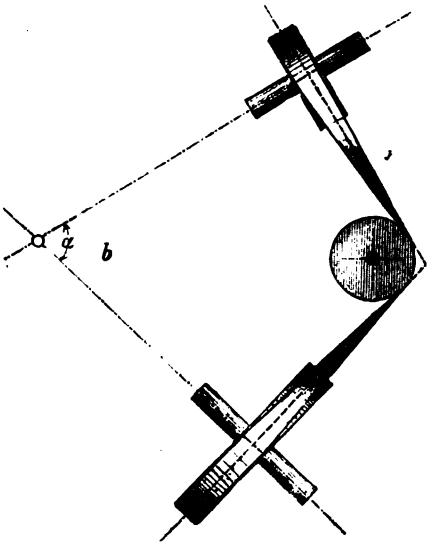


Fig. 140ᵇ.

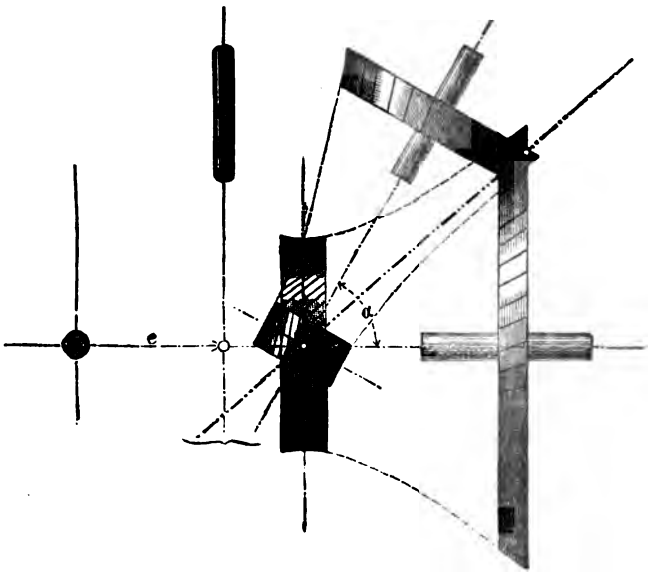


Fig. 141ª.

Digitized by Google

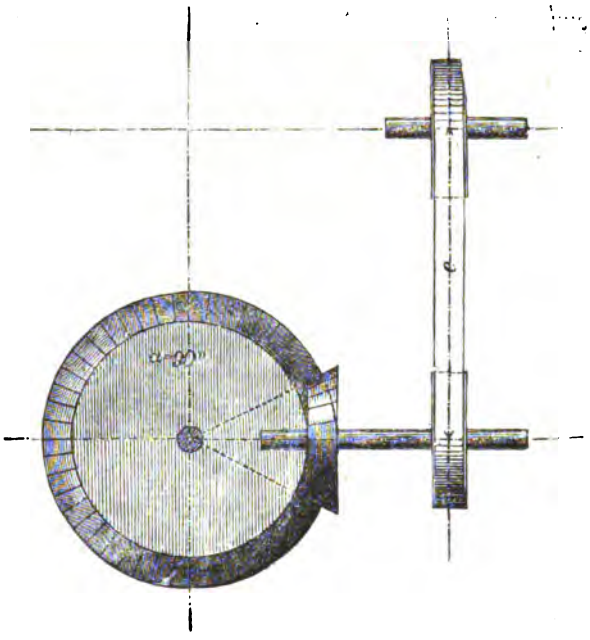


Fig. 141 b.

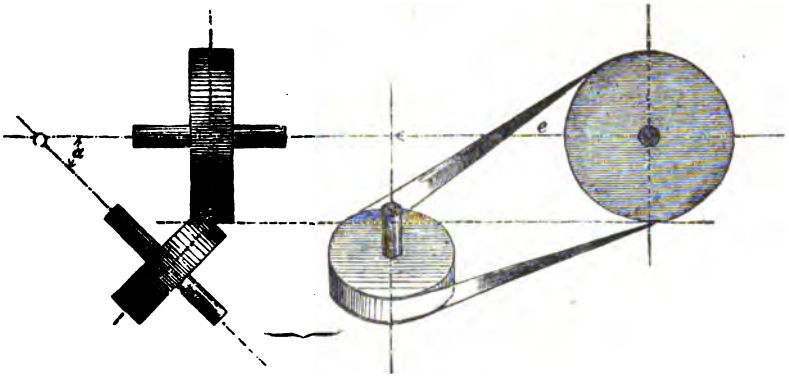


Fig. 141 c.

d) Liegen endlich die zwei durch Räder zu verbindenden Wellen in zwei verschiedenen — einander stets parallelen — Ebenen, welche einen Normal-Abstand e zu einander einnehmen, und bilden die Projectionen der Axen, in Richtung e gesehen, einen Winkel α miteinander, so sagt man: Dieselben sind „gekreuzt". In diesem Falle sind bei directer Berührung (Fig. 141 a) die Grundformen der Räder Scheiben von Rotations-Hyperboloiden. Solche Körper entstehen, wenn eine gerade Linie, die zu einer anderen als Drehaxe sich in „kreuzender" Lage befindet, um letztere gedreht wird; die bei dieser Umdrehung der erzeugenden Linie entstehende Fläche ist die Oberfläche eines Rotations-Hyperboloides

Denkt man sich bei Fig. 141 a (Grundriß) noch eine Zwischenwelle eingeschaltet welche mit der einen Haupt-Axe in derselben Ebene liegt und mit dieser den Winkel α bildet, welche demzufolge mit der anderen Hauptaxe parallel läuft, so

Digitized by Google

läßt sich auch durch Combination von Fig. 139 mit Fig. 140ª eine Bewegungsübertragung zwischen den beiden Hauptwellen herstellen (Fig. 141ᵇ). — Ueberdies erreicht man bei indirecter Bewegungsübertragung die Verbindung auch in der Weise, wie es Fig. 141ᶜ andeutet oder durch Anordnung von 2 Hilfsrollen. —

2) Das Mittel der Bewegungsübertragung.

Schon bei Besprechung der Axenlagen wurden wir auf den Unterschied des directen und indirecten Aufeinanderwirkens der Räder geführt, und wir haben dem nur noch hinzuzufügen, daß die Räderwerke der letzteren Gattung constructiv sich nach der Art des Zugorganes, welches Band, Seil oder Kette sein kann, von einander unterscheiden.

Das Mittel der Bewegungsübertragung ist entweder Reibung oder Zahneingriff. Bringt man nämlich zwei Scheiben (Fig. 139ª) mit ihren Umfängen unter einem solchen Drucke in Berührung, daß, wenn man eine derselben umdreht, auch die andere eine entsprechende Drehung erleidet, so ist eben die durch den Druck zwischen den Scheibenumfängen hervorgerufene Reibung die Ursache der Bewegungsmittheilung. Durch dieselbe wird nämlich verhindert, daß die in Umdrehung versetzte Scheibe an der anderen gleitet; es tritt vielmehr die Erscheinung ein, daß sich die Scheiben mit ihren Umfängen aneinander abrollen, und das kann bei fester Axenlage nicht anders geschehen, als daß die getriebene Scheibe sich ebenfalls um ihre Axe dreht. Je nachdem nun die Räder einander mit ihren Umfängen direct berühren oder ein Zugorgan als Zwischenmittel auftritt, theilen wir die Räderwerke in Bezug auf das Mittel der Bewegungsübertragung weiter ein, bei

α) Uebertragung durch Reibung (Friction):

a) direct wirkende Frictionsräderwerke — Frictionsräder

b) indirekt wirkende Frictionsräderwerke — Riemen- und Seilscheiben.

β Uebertragung durch Zahneingriff:

c) direct eingreifende Räderwerke — Zahnräder

d) indirect eingreifende Räderwerke — Kettenräder.

Bei indirect wirkenden Frictionsrädern ist jede Scheibe für sich mit dem dieselben als endloses Band umschließenden Zugorgane durch Reibung verbunden, und solange der der Größe des Bewegungswiderstandes zukommende Druck zwischen den Berührungsflächen aufrecht erhalten wird, kann das treibende Rad dem getriebenen die Drehung durch Vermittlung des Zugorganes mittheilen.

Das Gleiten von zwei einander berührenden Körpern wird verhindert, d. h. die Reibung wird erzeugt dadurch, daß die Unebenheiten der berührenden Oberflächen in einander greifen. So lange nun diese Unebenheiten sehr gering sind, so daß zur Erzeugung der Reibung ein Gegeneinanderpressen der Körper nöthig ist, reden wir speciell von „Reibung“ oder „Friction“; bei größeren Unebenheiten, wenn also die aufeinander wirkenden Oberflächen namhafte Hervorragungen (Zähne) haben und dieselben, ohne daß man die Scheiben gegeneinander preßt, bei gegenseitigem Ineinandergreifen einander fortschieben, so haben wir die Bewegungsmittheilung durch „Zahneingriff“. Wirken nun direct die Scheibenumfänge solcher Art auf einander, so haben wir das Princip der „Zahnräder“, und bei Vermittlung durch ein Zugorgan, „Kettenräder“.

Digitized by Google

Die direct wirkenden Frictions- und Zahnräder kommen, abgesehen von der Grundform, in zwei verschiedenen Anordnungen vor: theils mit „innerem", theils mit „äußerem" Eingriff; im ersten Falle bildet ein Rad eine Hohlform (Fig. 143ª und 144ª), im zweiten sind die aufeinanderwirkenden Oberflächen der Kreisscheiben beiderseits convex (erhaben) gestaltet (Fig. 143ᵇ u. 144ᵇ).

3) **Die Art der Bewegungsübertragung**

ist verschieden hinsichtlich der Bewegungsform und hinsichtlich der Bewegungsgröße. Wir sagen nämlich: Die Bewegungsform ist in einem Räderwerke übereinstimmend, wenn, eine gleichförmige Drehung des treibenden Rades vorausgesetzt, auch das getriebene sich gleichförmig dreht und wenn, bei ungleichförmiger Drehung des treibenden Rades, auch das getriebene dieselbe Ungleichförmigkeit in der Drehung ergiebt. Der entgegengesetzte Fall — „veränderte Bewegungsform" — kommt nur bei den für die weitere Betrachtung ausgeschlossenen Ellipsen-, Polygonal-, Excenterrädern ꝛc. vor und wird bei Kreisscheiben-Rädern nur durch eigens hierzu geformte Zähne erreicht. — Gleichförmig nennen wir die Drehung eines Rades dann, wenn irgend ein Punkt desselben (außerhalb der geometr. Axe) stets dieselbe Geschwindigkeit hat, also in gleichen Zeitabschnitten gleiche Kreisbögen durchläuft.

Die Bewegungsgröße zweier Räder ist übereinstimmend, wenn beide dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben. Nach der „Mechanik" pag. 22 versteht man unter Winkelgeschwindigkeit die Drehungsgeschwindigkeit (Weg in der Zeiteinheit) eines Punktes, dessen Normal-Entfernung von der Drehaxe gleich der Einheit ist, in welcher der Halbmesser des Rades ausgedrückt wird. Ist nämlich in einem Kreise vom Halbmesser ϱ die Geschwindigkeit (= Weg in der Zeiteinheit) eines Punktes A am Umfange = v und w, diejenige eines Puuktes B, welcher sich in einem Kreise vom Halbmesser = 1 dreht, so hat man nach der „Geometrie" (Lehre vom Kreis):

$$w : v = 1 : \varrho$$

$$w = \frac{v}{\varrho}$$

und $w = v$, wenn $\varrho = 1$. —

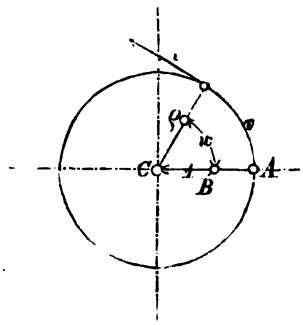


Fig. 142.

Haben wir nun Kreisscheibenräder und stimmen, wie es bei Frictions- und Zahnrädern fast immer vorausgesetzt wird, die Umfangsgeschwindigkeiten der beiden direct oder indirect aufeinander wirkenden Räder überein, so bekommen wir Uebertragung mit derselben Winkelgeschwindigkeit in beiden Rädern nur dann, wenn sie gleiche Halbmesser haben; in allen anderen Fällen, also bei veränderter Winkelgeschwindigkeit, bekommt man eine sogenannte „Uebersetzung" im Räderwerke, d. h. auch: Das getriebene Rad macht in der Zeiteinheit (Minute) mehr, resp. weniger Umgänge als das treibende.

Die unter 3) hier entwickelten Resultate zusammengefaßt, ergiebt für die Art der Bewegungsübertragung die Unterscheidung

α) Hinsichtlich der Bewegungsform:

a) Räderwerke mit übereinstimmender Bewegungsform

b) „ „ veränderter „

Digitized by Google

β) Hinsichtlich der Bewegungsgröße:

c) Räderwerke mit übereinstimmender Winkelgeschwindigkeit

d) „ „ veränderter „

4) Der Drehungssinn,

d. h. die Richtung, nach welcher sich zwei durch ein Räderwerk verbundene Wellen in Bezug auf einander umdrehen, ist entweder derselbe, oder die Drehung erfolgt in entgegengesetztem Sinne. Wir haben also zu unterscheiden:

a) die Räder drehen sich in demselben Sinne

b) „ „ „ „ „ entgegengesetztem Sinne.

Zu den Räderwerken mit gleicher Drehungsrichtung gehören von den einfachen und gebräuchlichen Zahn- und Frictionsräderwerken diejenigen mit innerem Eingriffe für parallele (Fig. 143ª) und für sich schneidende Axen (Fig. 144ª) sowie die Kettenräder, Riemen- und Seilscheiben conform der Anordnung (Fig. 145ª). In anderen Anordnungen, z. B. Zahn- und Frictions-

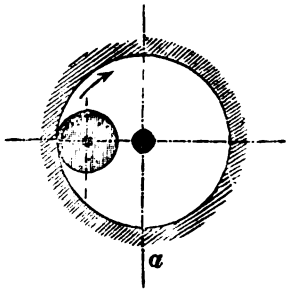


Fig. 143ª.

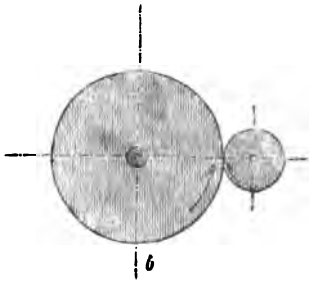


Fig. 143ᵇ.

räder mit äußerem Eingriff für parallele (Fig 143ᵇ) und für sich schneidende Axen (Fig. 144ᵇ), sowie Riemen- und Seilscheiben mit gekreuztem oder geschränktem Zugorgane (Fig. 145ᵇ, ergiebt sich entgegengesetzter Drehungssinn der Axen. Der Riemen- und Seiltrieb, entsprechend Fig. 145ª, ist ein solcher mit offnem Zugorgane. Für alle übrigen Räderwerke findet man hiernach

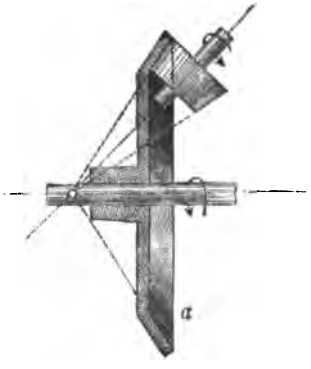


Fig. 144ª.

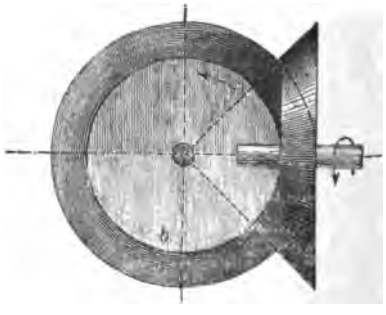


Fig. 144ᵇ.

durch einfache Ueberlegung den Drehungssinn heraus, wenn man nur bedenkt, daß (bei schematischer Darstellung wie Fig. 143 bis 145) die einander direct berührenden Punkte eines Räderwerkes stets dieselbe Bewegungsrichtung haben müssen.

Digitized by Google

5) Die Art der Befestigung.

Endlich ist zu bemerken, daß die Räder mit ihren materiellen Drehaxen nicht nothwendigerweise fest verbunden zu sein brauchen; im Gegentheil, es kommen sehr oft die Fälle vor, daß ein Rad dreh- oder verschiebbar auf der zugehörigen Axe sitzt, und wir können deshalb eine weitere Unterscheidung treffen, welche verschiedene Anordnung und constructive Ausführung der Räder bedingt:

α) Die materielle Axe eines Rades dreht sich mit demselben:

Das Rad ist fest oder verschiebbar auf der Axe.

β) Die materielle Axe eines Rades steht fest:

Das Rad ist drehbar auf der feststehenden Axe.

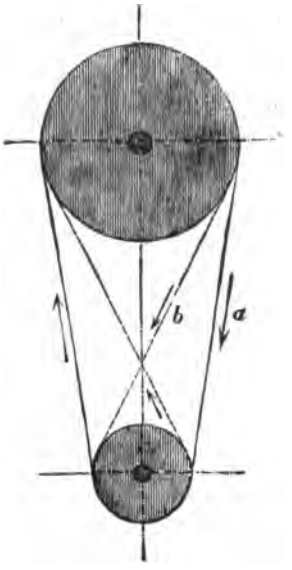


Fig. 145a u. b.

Der Theil der Axe oder Welle, auf welchem sich ein Rad dreht, muß natürlich die Oberfläche eines Rotationskörpers haben und der Drehmittelpunkt des Rades liegt dann in der geometrischen Axe dieser Fläche.

2) Das Uebersetzungsverhältniß

a) eines einfachen Räderwerkes.

Unter 3) — „Die Art der Bewegungsübertragung" — wurde erwähnt, daß bei einem „einfachen Räderwerke" (Räderpaar) die beiden Räder (oder ihre Wellen) nur dann gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben, wenn die Halbmesser derselben einander gleich sind. In allen übrigen Fällen müssen bei verschieden großen Halbmessern auch die Winkelgeschwindigkeiten der mit einander wirkenden Räder verschieden sein, weil wir voraussetzen, daß die einander berührenden Theile — direct die zwei Scheibenumfänge oder indirect jeder Scheibenumfang für sich mit dem Zugorgane — gleiche (Umfangs-) Drehungs-Geschwindigkeit haben, wie es für eine gehörige Bewegungsübertragung durch Räderwerke nothwendig ist.

Allgemein ist dann das Verhältniß (φ) der Winkelgeschwindigkeiten zweier Räder, wenn man die Winkelgeschwindigkeit des treibenden Rades mit w, diejenige des getriebenen mit w_1 bezeichnet:

$$\varphi = \frac{w_1}{w},$$

und dieses Verhältniß nennt man das „Ueber-" oder „Umsetzungsverhältniß" die „Uebersetzungszahl" oder die „Uebersetzung" des Räderwerkes und versteht darunter den Quotient aus der Winkelgeschwindigkeit des getriebenen durch die Winkelgeschwindigkeit des treibenden Rades.*)

*) Wiewohl es ganz gleichgiltig ist, welche der beiden Winkelgeschwindigkeiten den Zähler des Bruches $\varphi = \frac{w_1}{w}$ bildet, so wollen wir doch der bequemeren Ausdrucksweise

Digitized by Google

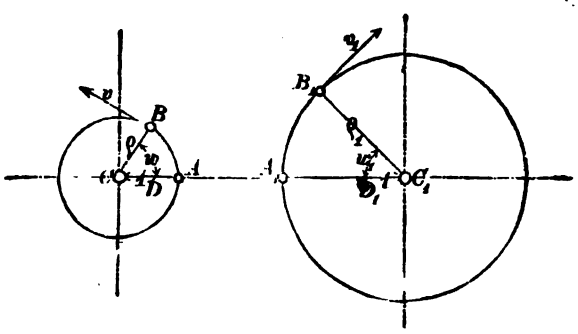


Fig. 146.

In Fig. 146 haben wir zwei Punkte A und A_1, welche normal um die Größen $CA = \varrho$ und $C_1A_1 = \varrho_1$ von ihren bezüglichen Drehaxen C und C_1 abstehen. Bewegt sich nun in einer gewissen Zeit der Punkt A unter Beibehaltung des constanten Normalabstandes $AC = \varrho$ nach B, so beschreibt er einen Kreisbogen AB und durchläuft denselben mit einer gewissen Geschwindigkeit v. In derselben Zeit bewege sich unter übrigens gleichen Umständen der Punkt A_1 nach B_1 mit einer Geschwindigkeit v_1. Sind nun die Radien ϱ und ϱ_1 mit derselben Maßeinheit gemessen und ist diese gleich dem Stück $CD = C_1D_1 = 1$, so stellen die von den Punkten D und D_1 in denselben Zeiten durchlaufenen Bögen die Größe der Winkelgeschwindigkeiten w und w_1 dar, und durch das Verhältnis derselben

$$\varphi = \frac{w_1}{w} \quad \ldots\ldots (1)$$

wird wie oben das Uebersetzungsverhältniß der Kreisdrehungen ausgedrückt.

Nach pag. 175 und „Mechanik" pag. 22 ist aber, wenn man sich unter v und v_1 die Umfangsgeschwindigkeiten zweier Kreisbewegungen denkt:

$$w = \frac{v}{\varrho} \text{ und } w_1 = \frac{v_1}{\varrho_1};$$

demnach erhält man für das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten beider Kreisbewegungen:

$$\varphi = \frac{w_1}{w} = \frac{v_1}{\varrho_1} \cdot \frac{\varrho}{v}$$

oder:

$$\varphi = \frac{v_1 \varrho}{v \varrho_1} \quad \ldots\ldots (2).$$

Bei Zahn- und Kettenrädern, Frictions-, Riemen- und Seilscheiben haben aber die einander berührenden Punkte der Voraussetzung gemäß stets dieselbe Drehungsgeschwindigkeit; folglich ist dann zu setzen:

$$v = v_1$$

und es wird:

$$\varphi = \frac{\varrho}{\varrho_1} \quad \ldots\ldots (3).$$

Zwei Kreise — d. h. hier so viel wie Bahnen von in Drehbewegung begriffenen Punkten — welche dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben, nennen wir nun „Verhältnißkreise". Zwischen den zwei in dem unveränderten Abstande

halber die Unterscheidung „treibendes" und „getriebenes" Rad beibehalten und das Uebersetzungsverhältniß stets in der oben erklärten Weise darstellen.

Digitized by Google

CC_1 gelegenen parallelen Axen C und C_1 sind unendlich viele Verhältnißkreise möglich; sie sind sämmtlich dadurch ausgezeichnet, daß die Umfangsgeschwindigkeiten derselben einander gleich sind und daß sich ihre Halbmesser umgekehrt zu einander verhalten wie die Winkelgeschwindigkeiten. Die Werthe von φ aus den Gleichungen (1) und (3) einander gleichgesetzt, giebt nämlich:

$$\varrho : \varrho_1 = w_1 : w.$$

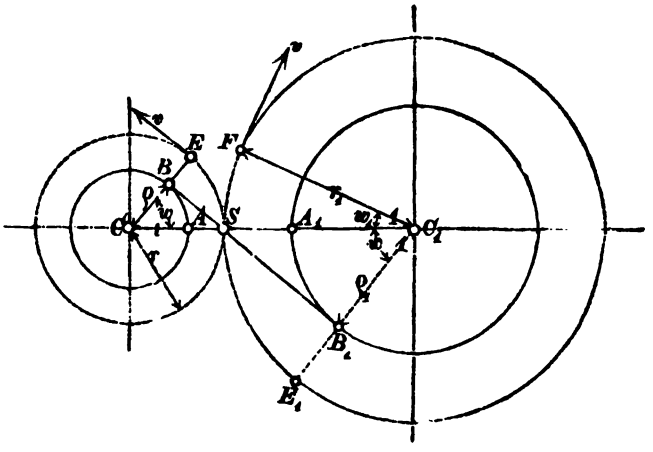


Fig. 147.

Von diesen Verhältnißkreisen hat ein Paar besondere Bedeutung und Wichtigkeit, d. s. diejenigen Kreise, welche einander berühren. Die zwei einander berührenden Verhältnißkreise nennt man „Theilkreise", und der Berührungspunkt derselben ist zugleich ein Punkt der Centrale: hier (Fig. 147) der Punkt S in der Linie CC_1. — Zur Bestimmung der Lage des Berührungspunktes S hat man, da dieser Punkt der gemeinschaftliche Punkt zweier Verhältnißkreise ist, die Bedingung, daß sich die Abschnitte CS und C_1S als Radien zweier Verhältnißkreise zu einander umgekehrt verhalten müssen wie die Winkelgeschwindigkeiten derselben. Bezeichnen wir diese Abschnitte entsprechend mit r und r_1, so ist hiernach:

$$r : r_1 = w_1 : w.$$

Außerdem war aber auch:

$$\varrho : \varrho_1 = w_1 : w,$$

also ist:

$$r : r_1 = \varrho : \varrho_1. —$$

Es kommt nun darauf an, wenn ϱ und ϱ_1 (die Radien zweier Verhältnißkreise) und für das Uebersetzungsverhältniß $\varphi = \frac{w_1}{w}$ gegeben sind, die Centrale CC_1 so zu theilen, daß die Abschnitte CS und C_1S dasselbe Verhältniß zu einander haben wie die Radien ϱ und ϱ_1. Dazu verhilft uns ein Satz aus der Kreislehre. Legen wir nämlich an die Kreise von CA und C_1A_1 (Fig. 147) eine gemeinschaftliche Tangente BB_1, ziehen von den Tangentialpunkten B und B_1 die Radien BC und B_1C_1, so erhalten wir zwei ähnliche Dreiecke:

$$\triangle CBS \sim C_1B_1S.$$

Darin stehen die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten in gleichem Verhältniß. Es ist also wie verlangt:

$$\varrho : \varrho_1 = CS : C_1S = r : r_1.$$

Digitized by Google

Der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangente an die Verhältnißkreise mit der Centrale ist somit der Berührungspunkt für zwei Theilkreise, welche dasselbe Uebersetzungsverhältniß wie die gegebenen Verhältnißkreise haben, und die Abschnitte CS und C_1S der Centrale sind die Halbmesser der Theilkreise.

Wird nun beispielsweise das Rad CS mit seinem Umfange gegen den Umfang des Rades C_1S angedrückt, oder denken wir uns unter den Kreisen durch S die Theilkreise zweier verzahnten Scheiben, so wird, wenn man das Rad CS nach der Richtung des beigesetzten Pfeiles umdreht, das andere Rad C_1S sich in entgegengesetzter Richtung bewegen; da jedoch die Umfänge, resp. die Theilkreise, sich so zu sagen auf einander abrollen, so beschreibt der Punkt E den Bogen SE in derselben Zeit, während welcher der Punkt F den gleichlangen Bogen SF durchläuft, und die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten w und w_1 verhalten sich umgekehrt wie die Radien r_1 und r. — Ist einmal $CS = SC_1$ oder $r = r_1$, so wird auch $w_1 = w$, und das ist der specielle Fall, wo, wie wir oben erwähnten, die Uebertragung mit übereinstimmender Winkelgeschwindigkeit der Räder erfolgt. — Alsdann sind die von der Centrale, den Radien und der Tangente gebildeten Dreiecke nicht nur ähnlich, sondern congruent.

Erklärten wir nun zuerst das Uebersetzungsverhältniß eines einfachen Räderwerkes als Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder, so können wir dasselbe nun auch durch das Verhältniß der Radhalbmesser ausdrücken. Es ist nämlich nach Formel (3) das Umsetzungsverhältniß eines Räderpaares gleich dem Quotient aus dem Halbmesser des treibenden durch denjenigen des getriebenen Rades, oder da

$$\varphi = \frac{w_1}{w} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{r}{r_1} \quad \ldots \quad (4),$$

so ergiebt sich das Gesetz:

> die Winkelgeschwindigkeiten zweier auf einander wirkenden Räder verhalten sich umgekehrt zu einander wie die Radien zweier Verhältniß- resp. Theilkreise derselben. —

Der Umfang eines Verhältniß- oder eines Theilkreises ist für r als Radius:

$$u = \pi r$$

und für r_1 als Radius:

$$u_1 = \pi r_1.$$

Da nun offenbar:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\pi r}{\pi r_1} = \frac{u}{u_1}$$

ist, so ist auch das Uebersetzungsverhältniß eines Räderwerkes gleich dem Quotient aus: Umfang des Verhältniß- oder Theilkreises des treibenden Rades durch Umfang des Verhältniß- resp. Theilkreises des getriebenen Rades, und zwischen diesen Umfängen und den Winkelgeschwindigkeiten findet ebenfalls umgekehrte Proportionalität statt.

Wenn nun bei Zahn-Räderwerken der Eingriff und das gehörige Aufeinanderwirken möglich sein soll, so müssen die Zähne beider Räder erstens unter einander gleiche Abstände haben. Diesen Abstand mißt man auf dem sogenannten Theilkreise und nennt ihn kurz die „Zahntheilung". Außerdem müssen aber auch die Zahntheilungen zweier in einander arbeitenden Räder, ni

Digitized by Google

Bogenmaß gemessen, genau einander gleich sein. Alsdann ist es gerade so, als ob die Theilkreise der Räder sich auf einander abrollen.

Will man also ein Rad mit Verzahnung versehen, so muß die Peripherie des Theilkreises in eine Anzahl ganzer und gleicher Theile (Zahntheilungen) getheilt werden; Bruchtheile einer Zahntheilung dürfen nicht vorkommen.

Denkt man sich nun (Fig. 148) den Umfang eines Rades vom Halbmesser r in z, denjenigen vom Halbmesser r_1 in z_1 gleiche Theile, welche sämmtlich gleich einer Bogenlänge oder Theilung τ sind, getheilt, so werden, da sich diese Umfänge zu einander verhalten wie die Radien, auch die Anzahlen der Theilungen auf den bezüglichen Rädern sich zu einander verhalten wie die Radien der Verhältniß- resp. Theilkreise.

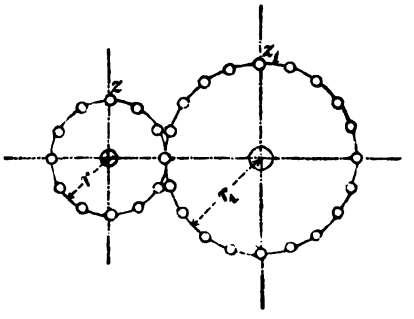


Fig. 148.

Man hat also weiter, da

$$2r\pi = u = z\tau$$

und

$$2r_1\pi = u_1 = z_1\tau:$$

$$\frac{r}{r_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{z}{z_1}$$

und

$$\varphi = \frac{w_1}{w} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{z}{z_1} \quad \ldots \quad (5).$$

Hiernach ist das Umsetzungsverhältnis eines Räderwerkes auch gleich dem Quotient aus der Zähnezahl des treibenden durch die Zähnezahl des getriebenen Rades.

Endlich läßt sich auch das Umsetzungsverhältniß noch ausdrücken durch das Verhältniß der Umdrehungszahlen oder Turen, welche die bezüglichen Räder oder deren Wellen in gewissen Zeitabschnitten z. B. in einer Minute, machen. Dreht sich nämlich das treibende Rad in einer Minute n mal um und das getriebene in derselben Zeit n_1 mal, so legt ein Punkt am Umfange des ersteren einen Weg $= 2r\pi n$ und ein Punkt am Umfange des letzteren $= 2r_1\pi n_1$ in der Minute zurück. Der Weg in einer Secunde ist dann bei beiden Rädern beziehentlich:

$$v = \frac{2r\pi n}{60} \text{ und } v_1 = \frac{2r_1\pi n_1}{60}.$$

Die Umfangsgeschwindigkeit, ausgedrückt durch die Winkelgeschwindigkeit, ist nach Formel (7), pag. 22 der „Mechanik“:

$$v = rw \text{ und } v_1 = r_1 w_1.$$

Aus der Verbindung der genannten vier Gleichungen entsteht dann:

$$rw = \frac{2r\pi n}{60} \text{ und } r_1 w_1 = \frac{2r_1\pi n_1}{60}$$

oder:

$$w = \frac{\pi n}{30} \text{ und } w_1 = \frac{\pi n_1}{30}.$$

Digitized by Google

Das Umsetzungsverhältniß ist aber nach Formel (1):

$$\varphi = \frac{w_1}{w};$$

setzt man nun die Werthe von w und w_1 dahinein, so wird:

$$\varphi = \frac{w_1}{w} = \frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{30}{\pi n}$$

$$\varphi = \frac{n_1}{n}$$

und:

$$\varphi = \frac{w_1}{w} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{n_1}{n} \quad \ldots \ (6),$$

d. h.: Die in derselben Zeit von zwei Rädern eines einfachen Räderwerkes zurückgelegten Umdrehungen verhalten sich umgekehrt zu einander wie die Zähnezahlen (bei Zahnräderwerken), wie die Umfänge und die Halbmesser der Verhältniß oder Theilkreise und stehen im geraden Verhältniß mit den Winkelgeschwindigkeiten. Außerdem verstehen wir unter dem Uebersetzungsverhältnisse eines Räderwerkes auch den Quotient aus der Umdrehungszahl des getriebenen durch diejenige des treibenden Rades. —

Mit Hilfe der in Formel (6) enthaltenen Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten (w), Verhältniß-(ϱ) und Theilkreishalbmessern (r), Umfängen (u), Zähnezahlen (z) uud Umdrehungszahlen (n) und unter Hinzunahme derjenigen Verhältnisse, in welchem die genannten Größen außerdem zu Umfangsgeschwindigkeit (v), Theilung (τ) und Centrale (e) stehen, löst man alle in Bezug auf den geometrisen Zusammenhang der Räderwerke möglichen Aufgaben, sobald die zur Bestimmung nöthigen Bedingungen gegeben sind.

Ist ein Räderwerk bereits vorhanden und soll man nur die Uebersetzung desselben aufsuchen, so findet man dieselbe, wenn es direct wirkende Frictionsräder, Riemen- oder Seilscheiben sind, immer am genauesten, wenn man die Umfänge der Räder oder Scheiben mittelst eines Bandmaßes mißt, beziehentlich die Verhältnißkreisdurchmesser mit Berücksichtigung der Riemen- oder Seilstärke ermittelt. Bei Zahnräderwerk erhält man das Umsetzverhältniß ganz genau, wenn man die Zähnezahlen der Räder auszählt und durch eineinander dividirt. Soll außerdem die Theilung (τ) mit gefunden werden, so hat man noch den Theilkreisdurchmesser eines Rades zu messen oder, falls dieser am Rade nicht besonders angerissen ist, bestimmt man die Größe der Centrale. Kann man hingegen das Räderwerk nur im Gange untersuchen, so beschränkt sich die Ausmittelung der Uebersetzung auf das Auszählen der Umgänge jedes der beiden Räder oder deren Wellen, und muß man dann, um selbst bei veränderlicher Geschwindigkeit die Uebersetzung einigermaßen genau zu bekommen, mindestens die Touren während einer Zeit von zwei oder mehren Minuten zählen und dabei sich einer richtiggehenden Sekundenuhr als Zeitmesser bedienen. — Wie bei allen Aufnahmen in der Technik, so ist auch hier zu empfehlen, daß man immer etwas mehr als die unbedingt nothwendigen Maße und Bedingungen ermittelt, damit man auch die gehörige Controle hat. —

Beispiele.

1. Aufgabe. Gegeben ist der Halbmesser einer Seilrolle $r = 500_{mm}$ und die Seildicke $d = 20^{mm}$. Es soll für eine zur Axe der genannten Rolle parallele

Digitized by Google

Axe eine zweite Seilrolle angeordnet werden, welche in einer Minute $3^1/_2$ Umdrehungen macht, während die gegebene sich in derselben Zeit zweimal umdreht.

Auflösung. Der Halbmesser des Verhältnißkreises von A setzt sich zusammen aus der Länge von Mittelpunkt der Rolle bis auf den Grund des Spurkranzes und der halben Seilbicke; es ist also:

$$\varrho = r = \frac{d}{2} \text{ und } \varrho_1 = r_1 + \frac{d}{2}$$

oder die für das Umsetzungsverhältniß maßgebenden Durchmesser der Rollen sind:

$$\Delta = 2r + d \text{ und } \Delta_1 = 2r_1 + d.$$

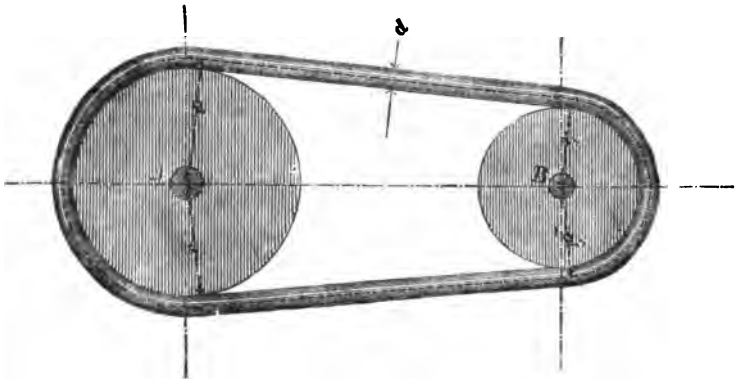


Fig. 149.

Das Umsetzungsverhältniß ist nach der Aufgabe:

$$\varphi = \frac{n_1}{n} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75.$$

Nach Formel (6) verhalten sich aber die Umdrehungszahlen zweier Räder eines einfachen Räderwerkes zu einander umgekehrt wie die Radien oder auch wie die Durchmesser der Räder:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1}.$$

Vorliegend ist $\Delta = 2r + d = 2 \cdot 500 + 20 = 1020$. Die verlangte Seilrolle würde danach, von Mitte zu Mitte Seil gemessen, einen Durchmesser

$$\Delta_1 = \Delta \frac{n}{n_1} = \frac{1020 \cdot 2}{3{,}5} = 583^{mm}$$

bekommen, und der wirkliche Halbmesser derselben wäre:

$$r = \left(\frac{583 - 20}{2}\right) = 281{,}5^{mm}.$$

Die Verhältnißkreisradien der Rollen sind:

$$\varrho = r + \frac{d}{2} = 500 + \frac{20}{2} = 510$$

$$\varrho_1 = r_1 + \frac{d}{2} = 281{,}5 + \frac{20}{2} = 291{,}5.$$

Probe: $$\frac{n_1}{n} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{510}{291{,}5} = 1{,}75 = \varphi.$$

Digitized by Google

2. Aufgabe. Gegeben ist die normale Entfernung, $AB = e = 1{,}2^m$, zweier parallelen Axen. Dieselben sollen durch ein paar directwirkende Frictionsräder verbunden werden, die ein Uebersetzungsverhältniß $\varphi = 3$ haben. Wie groß sind die Halbmesser der verlangten Räder?

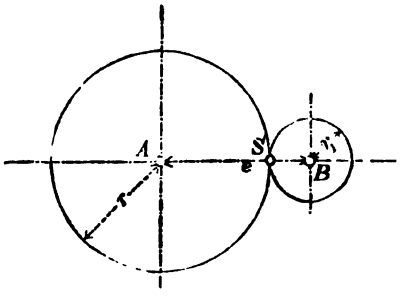


Fig. 150.

Auflösung. Bei directwirkenden Räderwerken besteht die Centrale $AB = e$ aus der Summe der beiden Scheibenhalbmesser. Diese müssen aber durcheinander dividirt gleich der Uebersetzungszahl φ sein. Man hat demnach die zwei Bedingungsgleichungen:

$$e = r + r_1$$

und

$$\varphi = \frac{r}{r_1}.$$

Daraus ist:

$$r = e - r_1$$

und

$$r = \varphi r_1.$$

Demnach:

$$e - r_1 = \varphi r_1$$

$$e = r_1 (\varphi + 1)$$

und

$$r_1 = \frac{e}{\varphi + 1}.$$

Hieraus erhält man dann:

$$r = e - r_1.$$

Setzen wir nun die numerischen Werthe ein, so entsteht:

$$r_1 = \frac{1200}{3+1} = \frac{1200}{4} = 300^{mm}.$$

$$r = 1200 - 300 = 900^{mm}.$$

Probe: $\varphi = \frac{r}{r_1} = \frac{900}{300} = 3.$

3. Aufgabe. Von einem vorhandenen Rade kennt man die Theilung $\tau = 30^{mm}$ und die Anzahl der Zähne $z = 60$. Parallel der Axe dieses Rades und in einer Entfernung davon $e = 1{,}8^m$ liegt eine zweite Axe; man soll für diese letztere ein Zahnrad bestimmen, welches mit dem vorhandenen zusammenarbeitet.

Auflösung. Da die Theilung eine in Bogenmaß zu messende, für beide Räder constante Größe τ ist und dieselbe im Umfange des Theilkreises so viel mal ohne Rest enthalten sein muß, als das Rad Zähne hat, so ist offenbar:

$$z\tau = u = 2r\pi$$

und daraus:

$$r = \frac{z\tau}{2\pi}.$$

Das gegebene Rad hat demnach einen Theilkreishalbmesser:

$$r = \frac{60 \cdot 30}{2 \cdot 3{,}1416} = \frac{900}{3{,}1416} = 286{,}48^{mm}.$$

Die Centrale ist:

$$e = r + r_1,$$

folglich:

$$r_1 = e - r = 1800 - 286{,}48 = 1513{,}52^{mm}.$$

Digitized by Google

Das zweite Rad erhielte dann eine Zähnezahl von:

$$z_1 = \frac{2\pi \cdot r_1}{\tau} = \frac{2 \cdot 3{,}1416 \cdot 1513{,}52}{30} = 317$$

und die Uebersetzung des Räderwerkes wäre:

$$\varphi = \frac{z}{z_1} = \frac{60}{317} = \frac{1}{5{,}2866}$$

oder Probe:

$$\varphi = \frac{r}{r_1} = \frac{286{,}48}{1513{,}52} = \frac{1}{5{,}2866}.$$

4. Aufgabe. Gesetzt nun, die in der vorstehenden Rechnung erhaltene Uebersetzuug sei zu groß ausgefallen, und es sollen die nun unveränderlich gleich $e = 1{,}8^m$ von einander abstehenden parallelen Wellen, da Kettenräder beispielsweise nicht anzubringen sind, durch Räder, welche eine Uebersetzung von höchstens 2 : 5 haben, verbunden werden, so ordnet man, vorausgesetzt, daß der Drehungssinn beliebig sein darf, ein Zwischenrad, ein sogenanntes „Transporteurrad" an, welches mit jedem der beiden Haupträder in Eingriff steht. Dieses Hilfsrad liegt mit den beiden übrigen Rädern in einer

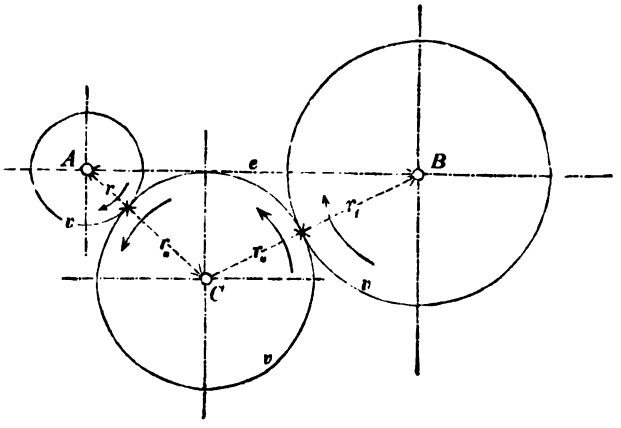


Fig. 151.

gemeinschaftlichen Ebene, hat keinen Einfluß auf die Uebersetzung der Haupträder, weil alle drei dieselbe Umfangsgeschwindigkeit v haben, bewirkt aber, daß sich dieselben nicht, wie bei directem Eingriff, in entgegengesetztem Sinne, sondern in demselben Sinne drehen. Ebenso ist es gleichgiltig, ob der Mittelpunkt C des Transporteurs in die Centrale AB fällt oder ob die Mittelpunkte der sämmtlichen drei Räder in den Ecken eines Dreiecks liegen. Im ersten Falle ist natürlich, wenn r_0 der Halbmesser des Transporteurs ist:

$$e = r + 2r_0 + r_1.$$

Wir nehmen an, es sei ein als Transporteurrad zu verwendendes 120-zähniges Rad mit 30mm Theilung (und passender Zahnform) vorhanden; es fragt sich:

a) Wie groß ist der Theilkreishalbmesser und die Zähnezahl des Rades B?
b) Welche Lage nehmen die ‖ Axen der drei Räder zu einander ein?
c) Welchen Halbmesser bekäme ein Transporteurrad, dessen Drehaxe mit den beiden übrigen in gerader Linie liegt?

Digitized by Google

Auflösung a). Der Halbmesser des Rades A war nach der vorhergehenden Rechnung $r = 286{,}48^{mm}$. Die Uebersetzung zwischen dem Rade A und dem Rade B soll nach den Bestimmungen der vorliegenden Aufgabe sein:

$$\varphi = \frac{2}{5},$$

folglich ist:

$$r_1 = \frac{r}{\varphi} = \frac{286{,}48 \cdot 5}{2} = 716{,}2^{mm}$$

der Radius des Rades B. – Die Zähnezahl desselben ist:

$$z_1 = \frac{2\pi r_1}{\tau} = \frac{2 \cdot 3{,}1416 \cdot 716{,}2}{30} = 150.$$

Probe:

$$\varphi = \frac{z}{z_1} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}.$$

Auflösung b). Wenn das zu verwendende Transporteurrad $z_0 = 120$ Zähne hat, so ist der Halbmesser desselben:

$$r_0 = \frac{z_0 \tau}{2\pi} = \frac{120 \cdot 30}{2 \cdot 3{,}1416} = 572{,}96^{mm}.$$

Will man die Lage der Axe C in Bezug auf A und B bestimmen, so hat man einerseits die Centrale:

$$AC = r + r_0 = 286{,}48 + 572{,}96 = 859{,}44$$

und andererseits die Centrale:

$$BC = r_0 + r_1 = 572{,}96 + 716{,}20 = 1289{,}16.$$

Man nimmt nun erst AC in den Zirkel und schlägt von A aus einen Kreisbogen, nimmt dann BC in den Zirkel und schlägt von B aus einen Bogen; da, wo sich beide Kreisbögen schneiden, ist der Mittelpunkt des Transporteurrades. Die eben erklärte Construction ist die Lösung der Aufgabe: Aus drei gegebenen Seiten ein Dreieck zu construiren („Geometrie", Congruenz der Dreiecke).

Trigonometrisch berechnet man die zwei an der Centrale AB anliegenden Winkel, hat dabei aber zu berücksichtigen, daß hier der Winkel $ACB < 90^0$ wird.

Auflösung c). Will man noch wissen, wie groß das Transporteurrad werden müßte, wenn seine Axe mit den beiden übrigen in derselben Geraden liegen soll, so ist zuerst die Summe der Radien der beiden Haupträder zu bilden, von der Centrale AB abzuziehen, und der halbe Rest giebt dann den Halbmesser des verlangten Transporteurrades, den wir mit r'_0 bezeichnen wollen:

$$r'_0 = \frac{a - (r + r_1)}{2} = \frac{1800 - 1002{,}68}{2} = 398{,}66^{mm}.$$

Dieses Rad erhielte dann:

$$z'_0 = \frac{2\pi r'_0}{\tau} = \frac{797{,}32 \cdot 3{,}1416}{30} = 83{,}5 \text{ Zähne}.$$

Da nun ein Bruchtheilzahn nicht vorkommen darf, so nehmen wir

$$z'_0 = 84$$

und rechnen den der Zähnezahl 84 zukommenden Theilkreishalbmesser nochmals aus. Das giebt:

$$r'_0 = \frac{84 \cdot 30}{2 \cdot 3{,}1416} = 401{,}07^{mm}.$$

Digitized by Google

Da wir nun zwischen den Rädern nur 398,66^{mm} Platz haben, so müssen wir die Wellen von A und B um

$$401{,}07 - 398{,}66 = 2{,}4^{mm}$$

auseinander rücken. In den meisten Fällen der Praxis ist dies noch möglich; sollte es nicht der Fall sein, so muß man das Mittel C entsprechend etwas außer der Centrale AB verlegen. —

b) Das Uebersetzungsverhältniß zusammengesetzter Räderwerke.

Von den verschiedenen Ausdrücken, in welchen das Umsetzungsverhältniß eines einfachen Räderwerkes dargestellt werden kann, sind immer am bequemsten das Verhältniß der Verhältniß- oder Theilkreisradien und bei Zahnräderwerken besonders das Verhältniß der Zähnezahlen.

In sehr vielen Maschinen und Anlagen ist aber nicht nur ein Räderpaar vorhanden, sondern es kommen deren mehrere vor, und zwar haben dann die zwischen der ersten treibenden und der letzten getriebenen Welle gelegenen einfachen Räderwerke entweder nur den Zweck, zwischen den genannten Wellen ein größeres Umsetzungsverhältniß herzustellen, als durch ein einziges Räderpaar möglich ist, oder anderen Falles sind die zwischenliegenden Wellen selbst Arbeitswellen, d. h. sie haben einen besonderen Arbeitszweck zu erfüllen und geben nur einen Theil ihrer Arbeit an andere Wellen ab. Im ersteren Falle nennt man die eingeschalteten Räderwerke Vorgelege. Es muß nämlich bemerkt werden, daß sowohl bei Frictionsrädern, als auch bei Zahnrädern zwischen nur zwei Rädern das Umsetzungsverhältniß durch Umstände des praktischen Betriebes beschränkt ist und im Allgemeinen nicht höher als etwa $\varphi = \frac{1}{6} \div \frac{1}{8}$ angenommen werden darf. Hat man nun höhere Uebersetzungen auszuführen, so kann dies nur durch Combination von zwei oder mehreren einfachen Räderwerken erreicht werden. Dabei ist es ganz gleichgiltig und den Umständen anzupassen, welche Art von Räderwerken man verwendet: man vereinigt je nach Erfordern in einer Anlage Zahn- und Frictionsräderwerke, sowohl mit directer als auch mit indirecter Uebertragung, Stirnräderpaare und Kegelräderpaare, je nach Lage der Wellen.

Räder in der Anordnung der Fig. 151, pag. 185 geben nicht ein zusammengesetztes Räderwerk, sondern nur ein einfaches mit Transporteur, und der charakteristische Unterschied beruht darin, daß bei einem zusammengesetzten Räderwerke die Kraft und Bewegung beim Uebergange von einem einfachen Räderwerke zum andern stets durch ein Stück Torsionswelle geleitet wird, während bei Transporteurrädern nur die Räder allein die Uebertragung vermitteln und die Axen der Transporteure nur Druck wie die Stützaxen von Hebeln erleiden. Ist die Anordnung nun z. B. wie in Fig. 152, sodaß nämlich die Riemenscheibe B mit dem Kegelrade C fest verbunden ist, sodaß also unter Umständen die Welle b als feststehend angenommen werden kann, so hat man dennoch ein zusammengesetztes Räderwerk, und die Verbindung zwischen B und C überträgt die Torsion, während es die Welle b thun müßte, wenn C und B einzeln für sich auf b aufgekeilt wären.

Fig. 153 enthält die schematische Darstellung eines zusammengesetzten Räderwerkes mit directer Uebertragung. Wir bezeichnen die Halbmesser der treibenden Räder mit $R_1\ R_2\ R_3\ \ldots\ R_m$, die der getriebenen mit $r_1\ r_2\ r_3\ \ldots\ r_m$, die

Digitized by Google

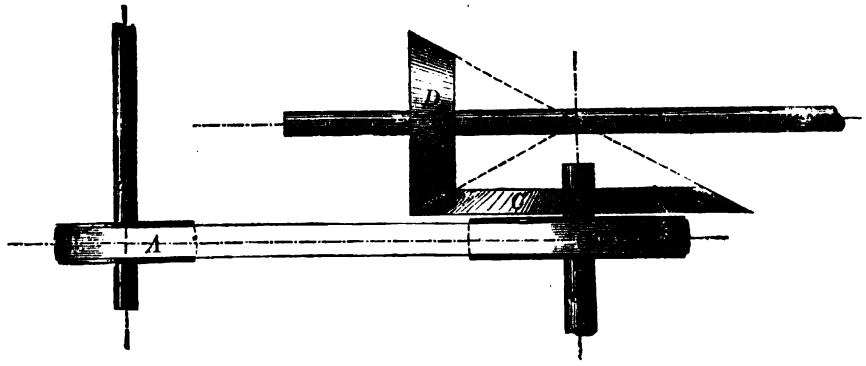


Fig. 152.

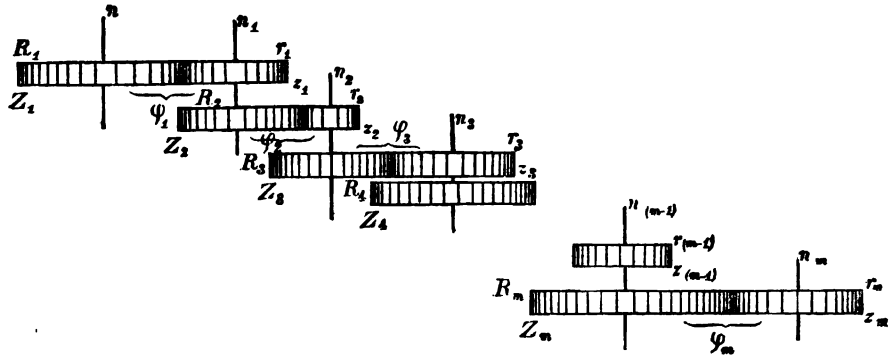


Fig 153.

Zähnezahlen, falls es Zahnräder sind, entsprechend mit $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots Z_m$ und $z_1 z_2 z_3 \ldots z_m$, die Umdrehungszahl der ersten treibenden Welle mit n, die der zweiten, dritten ... Welle mit $n_1 n_2 n_3 \ldots n_m$ und das Umsetzungsverhältniß des ersten Paares mit φ_1, das des zweiten, dritten ... Paares mit $\varphi_2 \cdot \varphi_3 \ldots \varphi_m$ und bekommen nach Formel (6) pag. 182 für die Umsetzungsverhältnisse der einzelnen Räderpaare:

$$\varphi_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{R_1}{r_1} = \frac{Z_1}{z_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{Z_2}{z_2}$$

$$\varphi_3 = \frac{n_3}{n_2} = \frac{R_3}{r_3} = \frac{Z_3}{z_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_m = \frac{n_m}{n_{(m-1)}} = \frac{R_m}{r_m} = \frac{Z_m}{z_m}.$$

Das totale Umsetzungsverhältniß des zusammengesetzten Räderwerkes oder die Gesammtübersetzung zwischen dem ersten und letzten Paare ergiebt sich conform dem Gesetze über das Umsetzungsverhältniß zusammengesetzter Hebel durch das Produkt der Umsetzungen aus allen einzelnen Räderpaaren. Denn, haben wir eine

Digitized by Google

Welle a, welche in der Minute n Umdrehungen macht, auf derselben ein Rad A mit x Zähnen, welches in ein anderes B mit 2x Zähnen auf der Welle b eingreift, so macht die Welle b in derselben Zeit $\frac{n}{2}$ Turen; befindet sich auf der Welle b ein zweites Rad C, welches also ebenfalls $\frac{n}{2}$ Umdrehungen macht, mit y Zähnen und greift dieses in ein Rad D mit 2y Zähnen, so macht Welle d in der angenommenen Zeit $\frac{n}{4}$ Umdrehungen.

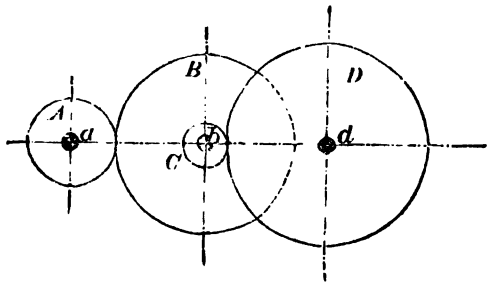


Fig. 154.

Die Ueberſetzung zwiſchen A und B war hinſichtlich der Zähnezahlen:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}$$

zwiſchen C und D: $\varphi_2 = \frac{1}{2}$.

Die totale Ueberſetzung iſt nun:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

während die Umdrehungszahlen der erſten und letzten Welle ſich umgekehrt verhalten wie die Zähnezahlen, nämlich wie:

$$n : \frac{n}{4} = 1 : \frac{1}{4} = 4 : 1.$$

Allgemein iſt demnach das totale Umſetzungsverhältniß:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \ldots \varphi_m = \varphi \quad \ldots (7)$$

$$\varphi = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} \cdot \ldots \frac{n_m}{n_{(m-1)}}$$

$$\varphi = \frac{n_m}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

$$\varphi = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} \ldots \frac{R_m}{r_m} \quad \ldots (9)$$

$$\varphi = \frac{Z_1}{z_1} \cdot \frac{Z_2}{z_2} \cdot \frac{Z_3}{z_3} \ldots \frac{Z_m}{z_m} \quad \ldots (10).$$

Danach iſt alſo:

das totale Umſetzungsverhältniß eines aus m Räderpaaren zuſammengeſetzten Räderwerkes

1) gleich dem Produkte aus den Umſetzungsverhältniſſen der einzelnen Räderpaare,

2) gleich der Umdrehungszahl des letzten getriebenen Rades, dividirt durch die Umdrehungszahl des erſten treibenden Rades,

3) gleich dem Produkte der Verhältniß- oder Theilkreisradien aller treibenden Räder, dividirt durch das Produkt der Radien aller getriebenen Räder, und bei Zahnrädern ſpeziell

4) gleich dem Produkte der Zähnezahlen aller treibenden Räder, dividirt durch das Produkt der Zähnezahlen aller getriebenen Räder.

Digitized by Google

Da man nun zufolge der „Arithmetik" in einem Produkte die Factoren beliebig in ihrer Reihenfolge versetzen kann, ohne daß sich die Größe des Productes dadurch ändert, so leuchtet ein, daß man

5) in einem zusammengesetzten Räderwerke die treibenden Räder unter einander und die getriebenen unter sich beliebig vertauschen kann, ohne daß sich dadurch die Gesammtübersetzung ändert.

Sind endlich in speziellen Fällen die einzelnen Umsetzungsverhältnisse eines zusammengesetzten Räderwerkes einander gleich, also:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_m$$

oder: $$R_1 = R_2 = R_3 = \ldots = R_m$$

und: $$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_m \text{ u. s. w.,}$$

so gehen die Formeln (7), (9) und (10) über in:

$$\varphi = \varphi_1^m \ldots \quad (7^a)$$

$$\varphi = \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^m \ldots \quad (9^a)$$

$$\varphi = \left(\frac{Z_1}{z_1}\right)^m \ldots \quad (10^a).$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Zwischen zwei Wellen ist ein Umsetzungsverhältniß $\varphi = 24$ herzustellen, jedoch so, daß die Umsetzungen der einzelnen Räderpaare das Verhältniß 4 : 1 nicht überschreiten.

Auflösung. Die Lösung dieser Aufgabe läuft auf eine Zerlegung der Zahl 24 hinaus, jedoch mit der Beschränkung, daß keine Factoren vorkommen sollen, die größer als 4 sind. Dies kann nun auf unendlich verschiedene Weise geschehen, und es giebt also unendlich viele verschiedene Anordnungen, durch welche man die verlangte Uebersetzung erhalten kann, z. B.

$$\varphi = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\varphi = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 24$$

$$\varphi = \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{1} = 24.$$

Wenn es sich darum handelt, das Räderwerk möglichst einfach zu gestalten, so wird man natürlich die Zerlegung so wählen, daß man einmal möglichst wenig, also hier z. B. 3, Vorgelege bekommt, und dann sucht man wenn möglich auch gleiche Verhältnisse, wie oben in der zweiten Reihe, zu verwenden. Wir ordnen also hier entweder drei Räderpaare mit den Uebersetzungen $\varphi_1 = \frac{2}{1}, \varphi_2 = \frac{3}{1}$ und $\varphi_3 = \frac{4}{1}$ an oder zwei gleiche mit $\varphi_1 = \frac{4}{1}$ und ein drittes mit $\varphi_2 = \frac{3}{2}$.

2. Aufgabe. Dieselbe totale Umsetzung von $\varphi = 24$ soll durch drei Räderwerke mit untereinander gleichen Uebersetzungszahlen ausgeführt werden.

Auflösung. Nach Formel (7ª) ist für diesen Fall:

$$\varphi = \varphi_1^m$$

demnach: $$\varphi_1 = \sqrt[m]{\varphi}.$$

Vorliegend ist $\varphi = 24$ und $m = 3$, folglich das Uebersetzungsverhältniß jedes der drei anzuordnenden Räderwerke:

Digitized by Google

$$\varphi_1 = \sqrt[3]{24} = 2{,}8845$$

oder:

$$\varphi_1 = \frac{2{,}8845}{1}. \quad -$$

3) Die Grundformen der Räderwerke.

Die Grundform eines Frictions- oder Zahnrades, einer Riemen- oder Seilscheibe, einer Kettenrolle oder dergl. ist ein rein geometrisches Raumgebilde, nach Größe und Verhältnissen dem geometrischen Zusammenhange des betreffenden Räderwerkes entsprechend, jedoch ohne Rücksicht auf die materielle Ausführung und ohne Rücksicht auf die Forderungen der praktischen Wirkungsweise gestaltet; es ist also der rein theoretische Grundkörper für das materielle Rad.

In Bezug auf die Durchmesser von Scheiben und Rollen, auf Theilkreisdurchmesser von Zahn- und Kettenrädern, sowie rücksichtlich der Radbreite besteht zwischen der geometrischen Grundform und dem materiellen Rade vollständige Uebereinstimmung, und die auf das Uebersetzungsverhältniß, die Theilung, Zahn- und Scheibenbreite bezüglichen Rechnungen, sowie die in Bezug auf diese Größen zu machenden constructiven Vorarbeiten gelten ebensowohl für die Grundform als für das fertige Rad.

Sämmtliche in der „allgemeinen Abhandlung" dieses Kapitels vorgeführten Skizzen (Fig. 138 – 145) stellen zunächst die Räderwerke in ihren Grundformen dar, und der Zweck des vorliegenden Abschnittes ist, die Beziehungen des geometrischen Zusammenhanges der einfachen Räderwerke mit besonderer Berücksichtigung der Grundformen in allgemeinen Formeln darzustellen und die Construction der Grundformen für allgemeine und besondere Fälle zu lehren.

Auch hier beschränken wir die Betrachtung auf Kreisscheiben, d. h. wir setzen voraus, daß die Grundkörper Rotationsformen sind, also normal zur Drehaxe kreisförmigen Querschnitt haben.

Laut pag. 171 erhält man bei parallelen Axen cylindrische Scheiben (Fig. 139, pag. 172) als Grundform für die Räder eines Räderwerkes, Kegelscheiben dann, wenn sich die Drehaxen (in ihren Verlängerungen) schneiden und Scheiben von Rotationshyperboloiden, wenn die Axen der Räder einander kreuzen.

Das sind die Grundformen für Räderwerke mit directer Berührung (Frictions- und Zahneingriff). Für Räderwerke mit indirecter Berührung, d. h. für Riemen-, Seil- und Kettentrieb, sind die Grundformen fast ausschließlich und bei allen drei Axenlagen cylindrisch gestaltet. Eine Ausnahme bildet der bei den Differenzial-Flyern (Vorspinnmaschine) vorkommende Mechanismus,*) welcher zur Erzeugung eines stetig geänderten Uebersetzungsverhältnisses zwischen zwei Wellen bestimmt ist. Da aber auch dieses Beispiel als ein rein kinematisches hier ausgeschlossen ist und die indirectwirkenden Frictions- und Zahnräderwerke rücksichtlich ihrer Grundformen besonders Bemerkenswerthes nicht darbieten, so haben wir es schließlich nur mit den Grundformen für directwirkende Frictions- und Zahnräderwerke zu thun.

*) Redtenbacher, Maschinenbau 1862; Taf. XX, Fig. 12 und 13.

Digitized by Google

A. Stirnräder.

Die erste Bedingung für die einer gehörigen Wirkungsweise entsprechende Gestaltung der Grundform, speziell der Berührungsflächen, ist die, daß die Umfangsgeschwindigkeiten der einander berührenden Punkte übereinstimmen (s. pag. 178), daß also die Oberflächen der Grundkörper sich gehörig auf einander abrollen.

Sind die Axen des Räderwerkes einander parallel, so wird dieser Bedingung dadurch genügt, daß man den betreffenden Rädern cylindrische Scheiben (Fig. 139, pag. 172) als Grundform giebt, und man nennt speziell bei Zahneingriff derartige Räder „Stirnäder".

Sämmtliche Punkte am Umfange eines Rades haben denselben Abstand von der Drehaxe, also dieselbe Winkel- und Umfangsgeschwindigkeit.

Haben wir also die parallelen Axen a und b, Fig. 155, durch ein directwirkendes Räderwerk zu verbinden, so construiren wir zunächst über den Axen zwei mit diesen concentrisch gelegene, mit den Cylinderoberflächen einander berührende Scheiben von den Halbmessern r und r_1, die sich umgekehrt zu einander verhalten wie die Umdrehungszahlen der verlangten Räder A und B. Die Breite b der Räder ist von der Größe der zu übertragenden Kraft abhängig, kann also auch hier zunächst außer Betracht gelassen werden.

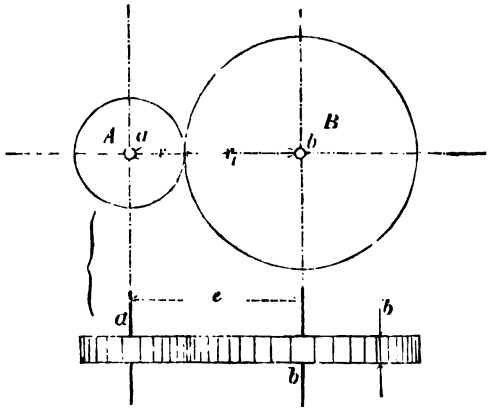


Fig. 155.

Bei der Bestimmung der Grundform für Stirnräder kommen folgende vier Größen in Frage:

r = Halbmesser des treibenden Rades,
r_1 = „ „ getriebenen Rades,
φ = Umsetzungsverhältniß des Räderwerkes,
e = Normal-Entfernnng der Drehaxen.

Sind nun zwei von diesen Größen gegeben, so kann man die zwei übrigen durch Rechnung bestimmen.

1) Gegeben: φ und r_1 (oder r).
Gesucht: r (oder r_1) und e.

Nach Formel (6) pag. 182 ist:

$$\varphi = \frac{r}{r_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{n_1}{n},$$

demnach sind die Halbmesser der Grundscheiben:

$$r = \varphi r_1 \quad \ldots \ldots \quad (11^a)$$

und

$$r_1 = \frac{r}{\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (11^b).$$

Digitized by Google

Ferner ist, wenn die Räder direct (ohne Zugorgan) auf einander wirken:

$$\text{I. } e = \overline{AB} = r + r_1.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit II. $\varphi = \frac{r}{r_1}$ liefert zwei Ausdrücke für die Normalentfernung e der Axen.

$$e = r_1 (\varphi + 1) \ldots (12^a)$$

und

$$e = r \left(\frac{1}{\varphi} + 1\right) \ldots (12^b).$$

2) Gegeben: φ und e.
Gesucht: r und r_1.

Wir gehen wiederum aus von den beiden Grundformeln:

$$\text{I. } e = r + r_1 \text{ und II. } \varphi = \frac{r}{r_1}.$$

Aus I. ist: $r_1 = e - r$

und aus II.: $r_1 = \frac{r}{\varphi}$,

demnach:

$$e - r = \frac{r}{\varphi} \text{ und } e = \frac{r}{\varphi} + r = r\left(\frac{1}{\varphi} + 1\right)$$

$$r = \frac{e}{\frac{1}{\varphi} + 1} \cdot \frac{\varphi}{\varphi} = \frac{e\varphi}{\left(\frac{1}{\varphi} + 1\right)\varphi},$$

also der Halbmesser des treibenden Rades, ausgedrückt durch das Umsetzungsverhältniß und die Axenentfernung:

$$r = \frac{e\varphi}{1 + \varphi} \ldots (13)$$

Der Halbmesser des getriebenen Rades wird auf gleiche Weise gefunden zu:

$$r = e - r_1 = \varphi r_1$$
$$e = \varphi r_1 + r_1 = r_1 (1 + \varphi)$$
$$r_1 = \frac{e}{1 + \varphi} \ldots (14).$$

Hierauf bezügliche Beispiele s. pag. 184.

B. Kegelräder.

Wenn die Axen zweier, durch direct wirkende Räder zu verbindende Wellen einander schneiden, so sind die Grundkörper der Räder nach Fig. 140[a] pag. 172 conische oder kegelförmige Scheiben, und man nennt die Räder danach „Kegelräder". Denkt man sich die Kegelscheiben zu vollständigen (im Sinne der analytischen Geometrie zu halben) Kegeln ergänzt, so bekommt man zwei mit ihren Spitzen zusammenfallende, in einer geraden Linie der Oberflächen einander berührende Kegel, deren geometrische Axen einen Winkel α gleich dem Axenwinkel der Wellen einschließen und deren kreisförmige Grundflächen — normal zur geometr. Axe — die Halbmesser r und r_1 haben.

In umstehender Fig. 156 haben wir die Grundformen DEE'D' und DFF'D' zweier Kegelräder in ihrer relativen Lage skizzirt und die bezgl. Ergänzungskegel D'E'C und D'F'C punktirt dargestellt. Schon die bloße

Digitized by Google

Anschauung überzeugt uns, daß, wenn die Kreise DAE und DBF aufeinander rollen, auch alle übrigen Punkte der Kegelflächen eine entsprechende rollende Bewegung zueinander machen.

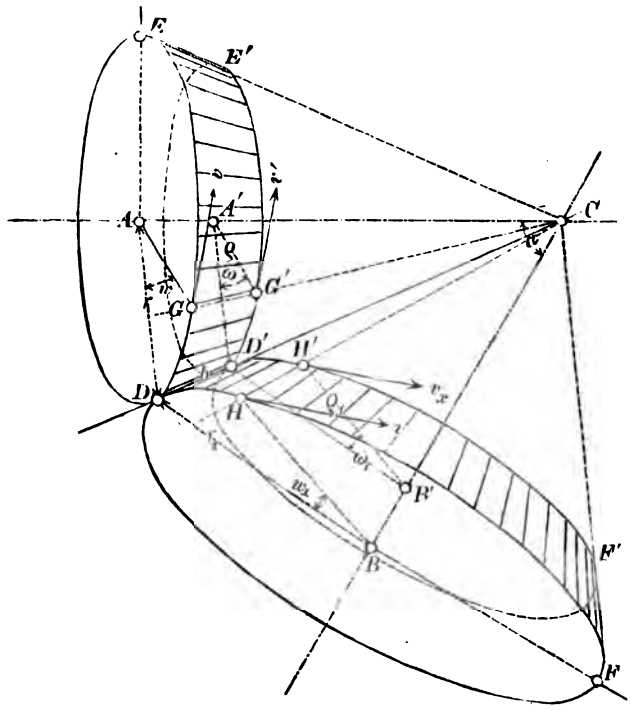


Fig. 156.

Da jedoch der Schein oft trügt, so wollen wir nachsehen, ob unsere durch Anschauung gewonnene Ueberzeugung auch durch einen mathematischen Beweis bestätigt werden kann.

Wenn bei feststehenden Drehaxen CA und CB die Kreise DAE und DBF sich so um ihre bezgl. Axen CA und CB drehen, daß sich ihre Umfänge gehörig an einander abrollen, so muß ein Punkt G des Kreises um A dieselbe Umfangsgeschwindigkeit v haben wie ein beliebiger Punkt H des Kreises um B.

Während nun der Punkt G im Abstande $AG = r$ von der Axe eine Geschwindigkeit v hat, hat ein Punkt G' desselben Kegels im Abstande $A'G' = \varrho$ eine andere Geschwindigkeit v', und es muß — sollen die Kegeloberflächen wirklich aufeinander rollen, soll also, wenn die Spitzen ihre Lage in C unverändert beibehalten und die Kreise um A und B gehörig auf einander rollen, ein Gleiten in anderen Punkten der Oberflächen nicht stattfinden — ein Punkt H' des mit E'A'D' zusammenarbeitenden Kreises F'B'D' dieselbe Geschwindigkeit $v_x = v'$ haben.

Der Punkt G legt während einer gewissen Zeit t (= 1) einen Weg $v = rw$ zurück, der Punkt H in derselben Zeit einen gleichen $v = r_1 w_1$, wenn wir mit w und w_1 die Winkelgeschwindigkeiten der Kreise DAE und DBF bezeichnen. Der Punkt G' des Kegels CDE, den wir in der geraden Linie GC des Kegelmantels

Digitized by Google

annehmen und den wir uns mit G fest verbunden denken, legt während der Zeit t (= 1) den Weg v' zurück und der Punkt H' in der Erzeugenden HC den Weg v_x. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten der Kreise D'A'E' und D'B'F' entsprechend mit ω und ω_1 und die Halbmesser der betr. Kreise mit ϱ und ϱ_1, so ist nun weiter:

$$v' = \varrho\omega \text{ und } v_x = \varrho_1\omega_1.$$

Oben war: $$rw = r_1 w_1$$

und: $$\frac{r}{r_1} = \frac{w_1}{w}.$$

Da nun sämmtliche Punkte eines festen (materiellen) Systems, welche gleichweit von der Drehaxe abstehen, auch gleiche Geschwindigkeiten, also dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben, so ist

$$\omega = w \text{ und } \omega_1 = w_1,$$

demnach: $$\frac{r}{r_1} = \frac{w_1}{w} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken CA'D' und CAD bekommen wir, wenn wir CD = a und CD' = a_1 setzen, die Proportion:

$$a_1 : a = \varrho : r$$

und aus $\triangle C'B'D' \sim CBD$:

$$a_1 : a = \varrho_1 : r_1.$$

Diese beiden Proportionen liefern die weitere:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{r}{r_1},$$

und wir haben nun:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{w_1}{w} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\varrho}{\varrho_1}.$$

Die Gleichheit der letzten zwei Verhältnisse liefert aber die gleichen Producte:

$$\varrho\omega = \varrho_1\omega_1$$

und das ist: $$v' = v_x,$$

was zu beweisen war.

Liegen also die Spitzen zweier sich mit ihren Oberflächen berührenden Kegel in einem und demselben Punkte, und dreht man letztere in der Weise um ihre Axen, daß zwei einander berührende Punkte der Oberflächen dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben, so ist dasselbe bei allen anderen einander berührenden Punkten der Fall, und die Kegel zeigen an keinem Theile der Oberflächen eine gleitende Bewegung. —

Indem wir nun weiter dazu übergehen, die Beziehungen zwischen Radhalbmesser, Uebersetzungszahl und Axenentfernung festzustellen, bemerken wir sogleich, daß hier die letztere durch zwei neue Größen auszudrücken ist. Haben wir nämlich die zwei Grundkegel CDE und CDF (Fig. 157) für zwei Kegelräder mit den Halbmessern AD = r und BD = r_1, so bestimmt sich die absolute Größe der Halbmesser aus dem Axenwinkel α und der bei beiden Kegeln gleichen Mantellänge CE = CF = CD = a.

Der geometrische Zusammenhang von zwei Kegelrädern wird also dargestellt bnrch algebraische Verbindungen der Größen r, r_1, φ, α und a.

Digitized by Google

1) Gegeben: φ, α und a
Gesucht: r und r_1.

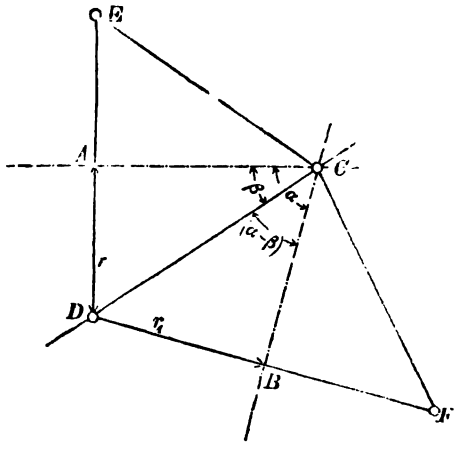


Fig. 157.

Trigonometrisch*) ist im Dreieck ACD:

$$r = a \cdot \sin\beta$$

und in $\triangle$ BCD:

$$r_1 = a \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

Da nun auch bei Kegelrädern:

$$\frac{r}{r_1} = \varphi,$$

so ist:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{a \cdot \sin\beta}{a \cdot \sin(\alpha-\beta)} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Der Winkel β ist uns nicht gegeben, und wir müssen deshalb zuerst suchen, denselben durch bekannte Größen auszudrücken.

Es ist zunächst aus der vorstehenden Gleichung:

$$\sin\beta = \varphi \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

Der Sinus der Differenz zweier Winkel**) ist:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Wir erhalten demnach:

$$\sin\beta = \varphi \sin\alpha \cdot \cos\beta - \varphi \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

oder: $$\sin\beta + \varphi\cos\alpha \cdot \sin\beta = \varphi \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta.$$

Da ferner nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1^{***}),$$

so ist daraus: $$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}.$$

Diesen Werth in die obige Gleichung eingesetzt und dieselbe quadrirt, giebt

$$\sin^2\beta + 2\varphi\cos\alpha \cdot \sin^2\beta + \varphi^2\cos^2\alpha\sin^2\beta = \varphi^2 \cdot \sin^2\alpha\,(1 - \sin^2\beta)$$

$$= \varphi^2 \cdot \sin^2\alpha - \varphi^2\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta$$

$$\sin^2\beta + 2\varphi\cos\alpha \cdot \sin^2\beta + \varphi^2\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \varphi^2\sin^2\alpha.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist wiederum $= 1$.

Ziehen wir nun $\sin^2\beta$ als Factor aus, so ist:

$$\sin^2\beta\,(1 + 2\varphi\cos\alpha + \varphi^2) = \varphi^2\sin^2\alpha.$$

Hieraus die Wurzel gezogen und auf $\sin\beta$ reducirt:

---

*) Wenn die Drehaxen zweier Kegelräder einen Winkel $\alpha = 90^0$ bilden, so lassen sich die Größen r nnd r_1 auch algebraisch ohne „Trigonometrie", d. h. ohne die Einführung von Winkelfunctionen darstellen; in allen anderen Fällen, und besonders in der Ableitung der betr. Ausdrücke, muß man jedoch die Lehren der Trigonometrie oder Dreiecksmessung zu Hilfe nehmen, und wir empfehlen daher denjenigen unserer Leser, welche diesen Theil der mathematischen Wissenschaften nicht kennen, denselben vorher und am geeignetsten nach: Lübsen, „Ausführliches Lehrbuch der eb. u. sphär. Trigonometrie" (Leipzig, Friedr. Brandstetter) selbst zu studieren.

**) Lübsen, Trigonometrie 1868, pag. 50, Formel (15).

***) do. do. pag. 44, „ (1).

Digitized by Google

$$\sin\beta = \frac{\varphi \sin\alpha}{\sqrt{1 + 2\varphi\cos\alpha + \varphi^2}}.$$

Speziell für $\alpha = 90^0$ ist, da $\sin 90^0 = 1$ und $\cos 90 = 0$:

$$\sin\beta = \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}.$$

Den Werth von $\sin\beta$ in die Gleichung $r = a \sin\beta$ eingesetzt, und mit Hilfe der Gleichung $\varphi = \frac{r}{r_1}$ erhalten wir die Radien der Endflächen der Grundkegel:

$$r = \frac{a \cdot \varphi \sin\alpha}{\sqrt{1 + 2\varphi\cos\alpha + \varphi^2}} \quad \ldots (15)$$

und:

$$r_1 = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sqrt{1 + 2\varphi\cos\alpha + \varphi^2}} \quad \ldots (16).$$

Schneiden sich nun, wie es in der Praxis häufiger der Fall ist, die Axen unter einem rechten Winkel ($\alpha = 90^0$), so gehen die Gleichungen (15 und 16) für diesen besonderen Fall über in:

$$r = \frac{a \cdot \varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \quad \ldots (15^a)$$

und:

$$r_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \quad \ldots (16^a).$$

2) Gegeben: r, α und φ
Gesucht: r_1 und a.

Für den Halbmesser des getriebenen Rades gilt wieder wie bei den Stirnrädern:

$$r_1 = \frac{r}{\varphi}$$

und a, die Mantel-Länge der Grundkegel, erhalten wir aus Formel (15) allgemein:

$$a = \frac{r \cdot \sqrt{1 + 2\varphi\cos\alpha + \varphi^2}}{\varphi \cdot \sin\alpha} \quad \ldots (17)$$

und aus (15^a) für $\alpha = 90^0$:

$$a = \frac{r\sqrt{1 + \varphi^2}}{\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17^b),$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Zwei in einer Ebene liegenden Wellen schließen mit einander den Winkel $\alpha = 60^0$ ein; dieselben sind durch ein Zahnräderpaar so zu verbinden, daß die getriebene Welle ebenso viel Umdrehungen in der Zeiteinheit zurücklegt wie die treibende.

Nimmt man ferner die Mantellänge a der Grundkegel zu $0{,}9^m$ an, so ist zu bestimmen:

a) die Halbmesser der Räder;

b) die Winkel β und $(\alpha - \beta)$, welche die Berührungslinie CD, Fig. 157 mit den Axenrichtungen einschließt oder, was dasselbe ist, die halben Spitzenwinkel der Grundkegel.

Auflösung a). Der Halbmesser des treibenden Rades ist nach Formel (15)

Digitized by Google

$$r = \frac{a \cdot \varphi \sin \alpha}{\sqrt{1 + 2\varphi \cos \alpha + \varphi^2}}.$$

$$a = 900^{mm};\ \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866;\ \cos 60^0 = \frac{1}{2};\ \varphi = 1.$$

$$r = \frac{900 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{900}{2}$$

$$r = r_1 = 450^{mm}.$$

Auflösung b). Im vorliegenden Falle sind, weil $\varphi = 1$, die Halbmesser der Räder einander gleich, und zwar als die $\frac{\alpha}{2} = 30^0$ gegenüberliegenden Lothe gleich der Hälfte der Hypotenuse a.

Für $\sin \beta$ hatten wir allgemein:

$$\sin \beta = \frac{\varphi \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 + 2\varphi \cos \alpha + \varphi^2}}.$$

$$\sin \beta = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{1 + 2 \cdot 0{,}5 + 1}} = \frac{1}{2},$$

und dem $\sin \beta = \frac{1}{2}$ entspricht der Winkel $\beta = 30^0$. Der andere Winkel ist $= (\alpha - \beta)$, also $= 60^0 - 30^0 = 30^0$.

2. Aufgabe. Welche Winkel β und $(\alpha - \beta)$ schließen die Axen zweier Räder mit der Berührungslinie der Kegelflächen (Erzeugenden der Grundkegel) ein, wenn die Axen selbst sich unter einem Winkel $\alpha = 21^0\,40'$ schneiden und die Räder ein Uebersetzungsverhältnis $\varphi = 0{,}7$ haben.

Auflösung. Allgemein ist der halbe Spitzenwinkel des treibenden Rades:

$$\sin \beta = \frac{\varphi \sin \alpha}{\sqrt{1 + 2\varphi \cos \alpha + \varphi^2}}.$$

Die vorstehenden Werthe eingesetzt, giebt:

$$\sin \beta = \frac{0{,}7 \cdot \sin 21^0\,40'}{\sqrt{1 + 2 \cdot 0{,}7 \cdot \cos 21^0\,40' + 0{,}49}}$$

$$\log \sin \beta = \log (0{,}7 \cdot \sin 21^0\,40') - \tfrac{1}{2} \log (1 + 2 \cdot 0{,}7 \cdot \cos 21^0\,40' + 0{,}49)$$

$$\log \sin \beta = (\log 0{,}7 + \log \sin 21^0\,40') - \tfrac{1}{2} \log (1 + 2 \cdot 0{,}7 \cos 21^0\,40' + 0{,}49)$$

$$\log 0{,}7 = 0{,}8450980 - 1$$

$$\log \sin 21^0\,40' = 9{,}5672689 - 10$$

$$+\ 0{,}4123669 - 1$$

$$\log \cos 21^0\,40' = 9{,}9681781 - 10$$

$$\cos 21^0\,40' = 0{,}92934$$

$$(1 + 2 \cdot 0{,}7 \cdot \cos 21^0\,40' + 0{,}49) = 2{,}79107$$

$$\tfrac{1}{2} \log 2{,}79107 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}4451479 = 0{,}2225739$$

$$\log \sin \beta = 0{,}4123669 - 1$$

$$-\ 0{,}2225739$$

$$= 9{,}1897930 - 10$$

$$\measuredangle \beta = 8^0\,54'\,20''.$$

Dann ist $\measuredangle (\alpha - \beta) = 21^0\,40' - 8^0\,54'\,20'' = 12^0\,45'\,40''$.

Digitized by Google

Probe: Wenn die Rechnung richtig ist, so muß

$$\varphi = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} = 0{,}7 \text{ sein.}$$

$$\log \varphi = \log \sin 8^0\,54'\,20'' - \log 12^0\,45'\,40''$$
$$= + 9{,}1897883$$
$$- 9{,}3441693$$
$$\overline{0{,}8456190 - 1}$$
$$\varphi = 0{,}70084 \sim = 0{,}7.$$

Die kleine Differenz von 0,00084 rührt daher, daß wir den Winkel β mit ganzen Sekunden abgerundet nahmen, also die Bruchtheile der Sekunden vernachlässigten.

3. Aufgabe. Gegeben ist der Halbmesser eines Kegelrades $r = 400^{mm}$, der Axenwinkel $\alpha = 90^0$ und die Uebersetzung $\varphi = \frac{z}{z_1} = \frac{60}{36}$.

Wie groß ist der Halbmesser r_1 des anderen Rades, und wie groß sind die halben Spitzenwinkel der Grundkegel?

Auflösung a). Da nach Formel (6) pag. 182

$$\varphi = \frac{r}{r_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3},$$

so ist:

$$r_1 = \frac{3}{5} . 400 = 240^{mm}.$$

Auflösung b). Allgemein ist für $\alpha = 90^0$:

$$\sin \beta = \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$$

und für $\varphi = \frac{5}{3}$:

$$\sin \beta = \frac{5}{3\sqrt{1 + \frac{25}{9}}} = \frac{5}{3\sqrt{\frac{9 + 25}{9}}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\log \sin \beta = \log 5 - \tfrac{1}{2} \log 34$$
$$0{,}6989700$$
$$- 0{,}7657394$$
$$\overline{9{,}9332306 - 10}$$

$$\beta = 59^0\,2'\,10{,}5''; \quad (\alpha - \beta) = 30^0\,57'\,49{,}5''.$$

Probe:

$$\frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} = \varphi$$

$$\log \varphi = \log \sin \beta - \log \sin (\alpha - \beta)$$
$$9{,}9332306 - 10$$
$$- 9{,}7113817 - 10$$
$$\overline{0{,}2218489}$$
$$\varphi = 1{,}66666 \ldots$$

φ war gegeben $= \frac{5}{3}$ 1,666 . . . .; demnach ist die Rechnung richtig. —

Digitized by Google

Anmerkung 1): Kommt in der Praxis die Construction von Kegelrädern vor, und hat man dazu vorher die Grundformen derselben zu entwickeln, so schlägt man gewöhnlich ein graphisches Verfahren ein.

Gegeben seien wieder der Axenwinkel α, das Umsetzungsverhältniß φ und der Abstand des äußersten Berührungspunktes der Grundkegel vom Durchschnittspunkte der Drehaxen $= a$. Die Grundkegel sind zu construiren.

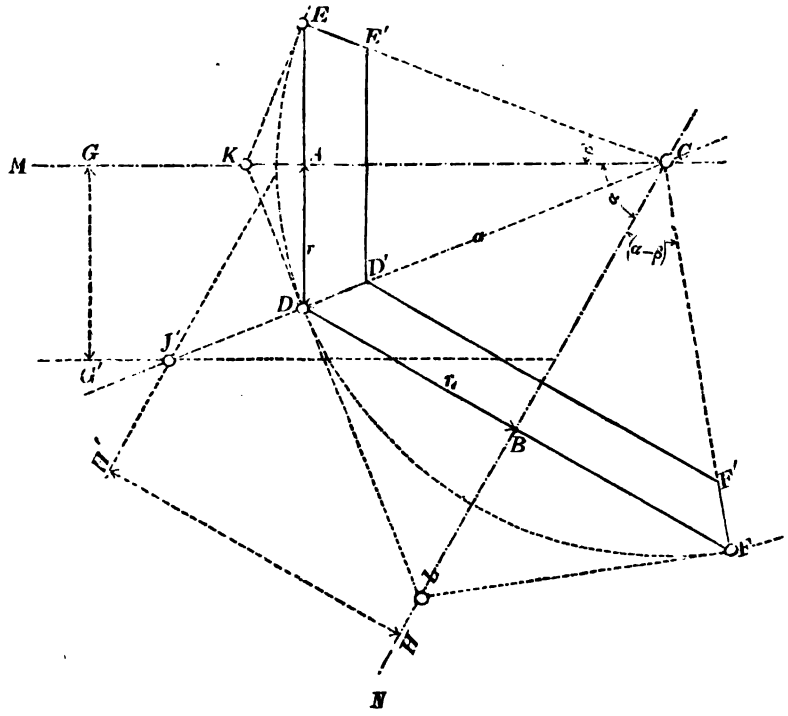


Fig. 158.

In Fig. 158 seien CM und CN die Richtungen der Drehaxen, mit dem bekannten Richtungsunterschiede $MCN = \alpha$. Wir bestimmen zuerst die Richtung der Berührungslinie CJ, indem wir in einem Normalabstande GG' eine Parallele zu CM und im Normalabstande HH' eine Parallele zu CN ziehen. Die Abstände GG' und HH' können ihrer absoluten Größe nach beliebig gewählt werden, es muß jedoch

$$GG' : HH' = r : r_1 = \varphi$$

sein.

Diese Parallelen schneiden sich in einem Punkte J; verbinden wir denselben mit C durch eine gerade Linie, so ist CJ die Richtung der Berührungslinie, Winkel $JCM = \beta$ und $JCN = (\alpha - \beta)$.

Nehmen wir nun $CD = a$ in den Zirkel, schlagen von C aus den Kreisbogen EDF, fällen von D aus die Lothe $DA = AE$ und $DB = BF$, verbinden E mit C und F mit C, so sind DEC und DFC die Grundkegel und $DA = r$ und $DB = r_1$ die Halbmesser der Räder. Kennt man außerdem noch die Breite b der Räder, so trägt man dieselbe auf DC von D aus, auf EC von E aus und auf FC von F aus auf, verbindet D' mit E' und F', so sind

Digitized by Google

DEE'D' und DFF'D' die verlangten Grundformen — conische Kreisscheiben — der Räder. — Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ist sofort aus der Construction ersichtlich.

Denkt man sich schließlich im äußersten Berührungspunkte D der Grundkegel eine Normale zur Berührungslinie errichtet und nach beiden Seiten hin bis an die rückwärts verlängerten Axen verlängert, die erhaltenen Punkte K und L bezhtl. mit E und F verbunden, so bekommt man zwei neue Kegel DAEK und DBFL, welche unter sich und mit den Grundkegeln eigenthümliche Beziehungen aufweisen. Man benennt sie mit dem bezeichnenden Namen: Gegenkegel, und wir werden bei der Verzahnung der Kegelräder wiederum auf dieselben zurückkommen. —

Anmerkung 2). Sind, wie es gewöhnlich der Fall ist, außer dem Axenwinkel die Radien der Räder bekannt, so vereinfacht sich die Construction insofern, als man dann sofort für die Normalabstände GG' und HH' der Parallelen die Radien r und r_1 benutzen kann und dann Punkt J mit D zusammenfällt. —

Anmerkung 3). Da außerdem meistens der Axenwinkel α ein rechter ist — andere Winkel kommen bei Transmissionswellen in der Regel nur da vor, wo der Gebäude-Grundriß spitze und stumpfe Winkel enthält — und die Radhalbmesser z. B. aus dem bekannten Umsetzungsverhältnisse, sowie aus der Theilung und Zähnezahl abgeleitet sind, so reducirt sich das Verfahren zur Construction der Grundformen für Kegelräder dann auf Folgendes:

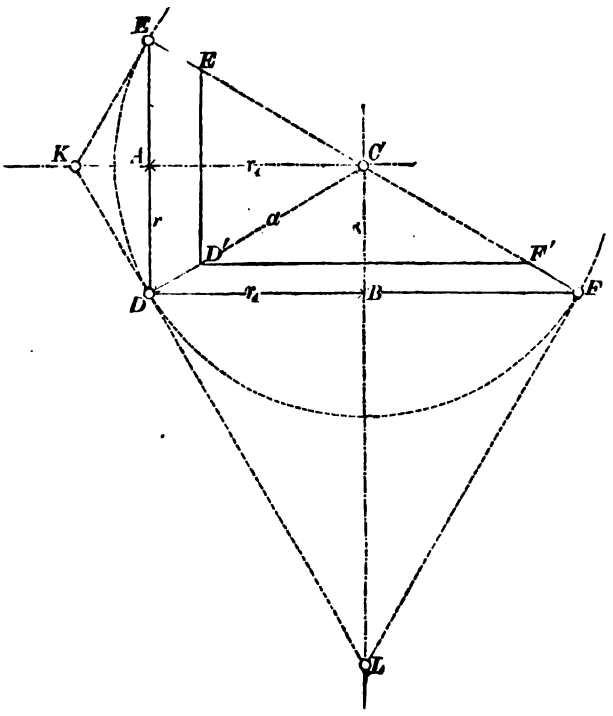


Fig. 159.

Man trägt den Halbmesser r des treibenden Rades auf der Axe des getriebenen auf und umgekehrt, den Halbmesser des getriebenen Rades auf der Axe des trei-

Digitized by Google

benden, zieht die Parallelen DF und DE, macht BF = BD und AE = AD, dann verbindet man geradlinig einzeln die Punkte F, E und D mit C, trägt die Breite FF' = DD' = EE' = b ab und zieht E'D' und D'F', so ist die Construction fertig. —

C. Hyperbelräder.

Wenn zwei Axen sich kreuzen, wenn sie also in zwei zu einander parallelen Ebenen liegen und, normal zu den Ebenen projicirt, sich schneiden, so nehmen sie die allgemeinste Lage ein, welche überhaupt zwei Linien zu einander haben können. Die Fälle, daß zwei Axen in einer gemeinschaftlichen Ebene liegen und A) parallel zu einander sind oder B) einander schneiden, sind Spezialitäten jenes allgemeinen Falles.

Dem entsprechend stellen auch die Grundformen für die, zwei einander kreuzende Wellen verbindenden, direct wirkenden Frictions- oder Zahnräder die allgemeine Form für direct wirkende Räderwerke überhaupt dar. Diese Grundformen sind normale Scheiben von sogenannten Rotationshyperboloiden. —

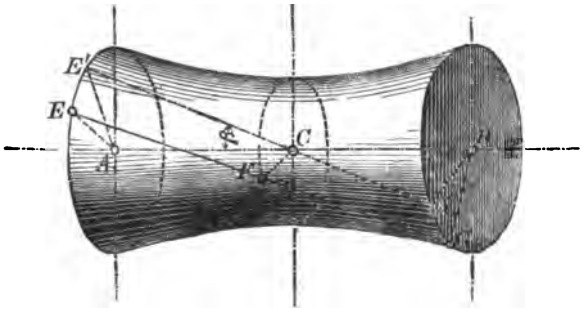


Fig. 160.

Ein Rotationshyperboloid entsteht, wenn eine gerade Linie EFG = E'CG' (Fig. 160) — welche mit einer anderen, als Drehaxe gedachten geraden Linie ACB constant einen Winkel β einschließt und den unveränderlichen Normalabstand CF von dieser einhält — sich um die als feststehend gedachte Axe AB dreht.

Aus der Natur dieser Entstehung erklärt sich auch die Eigenschaft der Rotationshyperboloide, daß eine gerade Linie so auf die Oberfläche desselben gelegt werden kann, daß alle Punkte der geraden Linie in die Rotationsfläche fallen. — Denkt man sich nun einmal den Winkel β in Fig. 160 gleich Null, so wird EFG = E'CG' parallel ACB, und es entsteht durch Umdrehung der Linie EG um AB alsdann ein Cylinder vom Halbmesser CF; und dieser liefert die Grundform für Stirnräder.

Oder nimmt man an, daß in Fig. 160 der Normalabstand CF einmal gleich Null werde, daß also die beiden bewußten Linien (die Erzeugende und die Drehaxe) sich schneiden, so entsteht ein (Doppel-) Kegel als Rotationskörper, und dieser liefert die Grundform für Kegelräder. —

In Fig. 161 seien für die Axen CM und CN zwei auf einander arbeitende Hyperbelräder in ihren Grundformen dargestellt, und es handelt sich nun darum, die Bedingungen für die Construction derselben algebraisch festzustellen.

Digitized by Google

1) Bestimmung der Winkel β_1 und β_2, welche die (gemeinschaftliche) Berührungslinie CO mit den ihrer Lage (α) und ihrer Normalentfernung ($e = r_1 + r_2$) nach gegebenen Axen CM und CN einschließt.

Die Hyperboloide sind hier in der Weise dargestellt, daß sich der kürzeste oder normale Abstand e der Axen als ein Punkt C projicirt; sie sind also in einer den Ebenen der drei Linien CM, CO und CN parallelen Ebene gezeichnet, und diese drei Linien sind daher in ihren wirklichen Längen dargestellt.

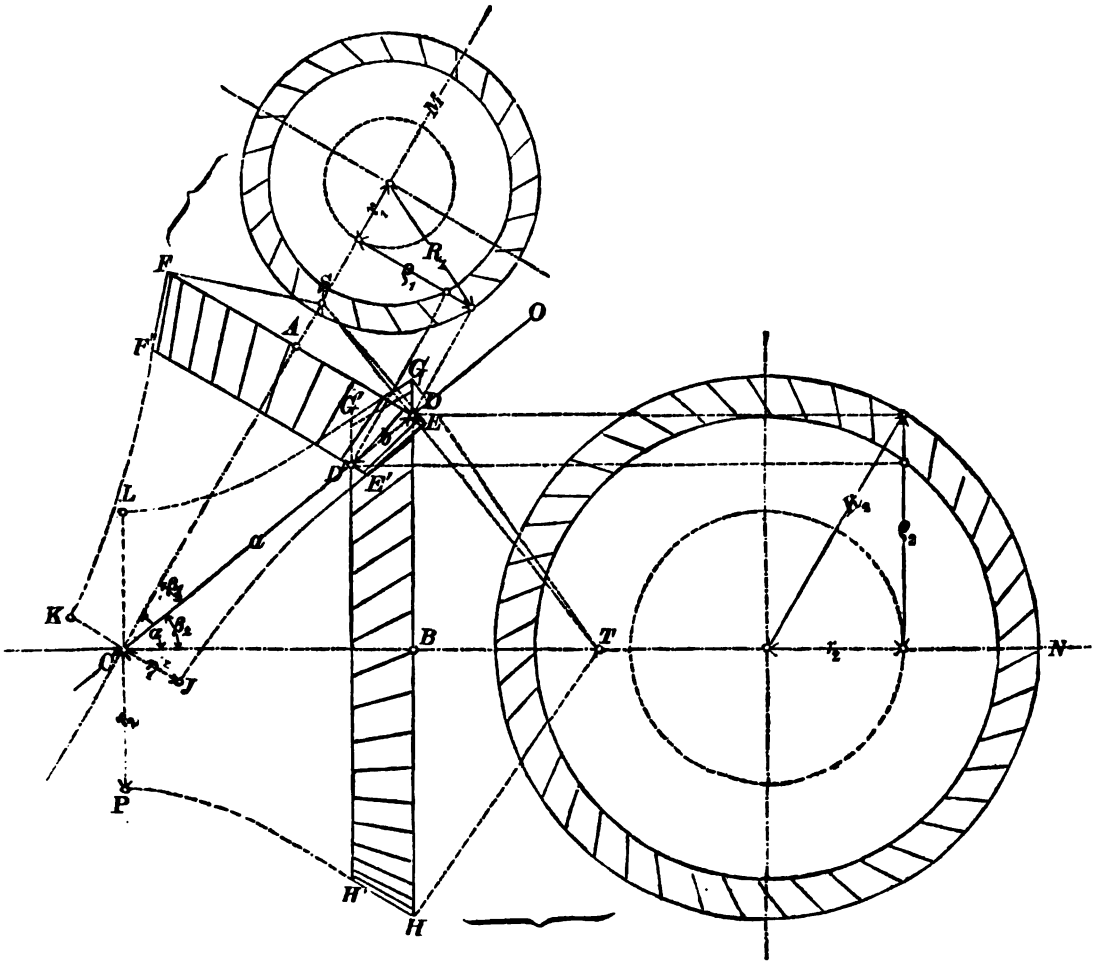


Fig. 161.

Da nun EF senkrecht auf CM ist und GH ⊥ CN, so hat man zuerst, wenn CD = a angenommen wird:

$$AD = \varrho_1 = a \cdot \sin\beta_1$$
$$\text{und} \quad BD = \varrho_2 = a \cdot \sin\beta_2 \quad \text{*)}$$

ϱ_1 und ϱ_2 sind als Axen-Lothe, welche den Winkeln der Berührungslinie mit den Axen gegenüberliegen, wie bei den Kegelrädern die Radien zweier Verhältnißkreise. Es ist also:

*) Lübsen, Trigonometrie 1868, pag. 23; 2.

Digitized by Google

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \varphi \quad \ldots \quad (18).$$

Da nun ferner

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha,$$

so erhält man:

$$\sin\beta_1 = \varphi \,.\, \sin\beta_2 = \varphi \,.\, \sin(\alpha - \beta_1)$$

und unter Anwendung des trigonometrischen Satzes von der Differenz zweier Winkel (pag. 196):

$$\sin\beta_1 = \varphi \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta_1 - \varphi \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\beta_1.$$

Die ganze Gleichung durch $\cos\beta_1$ dividirt, giebt:*)

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \varphi \,.\, \sin\alpha - \varphi \,.\, \cos\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta_1$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 (1 + \varphi \,.\, \cos\alpha) = \varphi \,.\, \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\varphi \,.\, \sin\alpha}{1 + \varphi \,.\, \cos\alpha} \quad \ldots \quad (19^a).$$

Auf dieselbe Weise entwickelt man:

$$\sin\beta_2 = \frac{\sin\beta_1}{\varphi} = \frac{\sin(\alpha - \beta_2)}{\varphi}$$

$$\varphi \,.\, \sin\beta_2 \,. = \sin\alpha \,.\, \cos\beta_2 - \cos\alpha \,.\, \sin\beta_2$$

$$\varphi \,.\, \operatorname{tg}\beta_2 = \sin\alpha - \cos\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta_2$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 (\varphi + \cos\alpha) = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\sin\alpha}{\varphi + \cos\alpha} \quad \ldots \quad (19^b).$$

Die Sinus der Winkel β_1 und β_2 oder, was dasselbe ist, die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 erhalten wir nun nach der Figur:

$$\varrho_1 = a \,.\, \sin\beta_1 \quad \ldots \quad (20^a)$$

$$\varrho_2 = a \,.\, \sin\beta_2 \quad \ldots \quad (20^b);$$

wir können also, wenn der Abstand $CD = a$ angenommen ist und ohne, daß wir uns eines Transporteurs bedienen, auf dieselbe Weise wie bei Kegelrädern (pag. 200) die Lage der Berührungslinie CO construiren. —

2) Bestimmung der Kehlkreis-Halbmesser $CJ = CK = r_1$ und $CL = CP = r_2$.

Diese Halbmesser — oder überhaupt die Halbmesser zweier anderen Normalschnitte der Hyperboloide — brauchen wir, um die Lage der Berührungslinie in den übrigen, während des Abrollens der Räder vorkommenden Stellungen und um schließlich die wirklichen Halbmesser R_1 und R_2 zu bestimmen. Wir nehmen aber deshalb gerade die Kehlkreishalbmesser, weil hier eine Normale zur Berührungslinie auch gleichzeitig auf den Axen senkrecht steht und wir also wissen, daß:

$$r_1 + r_2 = e,$$

gleich dem normalen Abstande der Axen ist.

Fig. 162 stellt die Radaxen MM' und NN', sowie die Berührungslinie OO', mit Bezug auf ihre gegenseitige Lage, in isometrischer Projection dar, und C_1CC_2 ist die wirkliche Länge des kürzesten Axenabstandes e. Diese Linie steht gleichzeitig auf den Linien MM', NN' und OO' senkrecht. In einem beliebigen, z. B. um die Größe a von C abstehenden Punkte D der Berührungslinie zeichnen wir nun ebenfalls normal zu dieser eine gerade Linie, welche die beiden Axen in den Punkten

*) Lübsen, Trigonometrie, pag. 44; 3.

Digitized by Google

S und T (Fig. 162) schneidet. Dasselbe Verhältniß aber, welches die Linien $DS = x_1$ und $DT = x_2$ zu einander haben, müssen auch r_1 und r_2 bekommen.

Die Projectionen der Linie $DS = x_1$ in zwei zu einander normalen Ebenen durch MM' resp. OO' seien r_1 und bezhtl. y_1; die Projectionen der Linie $DT = x_2$ in zwei zu einander normalen Ebenen durch NN' resp. OO' entsprechend r_2 und y_2.

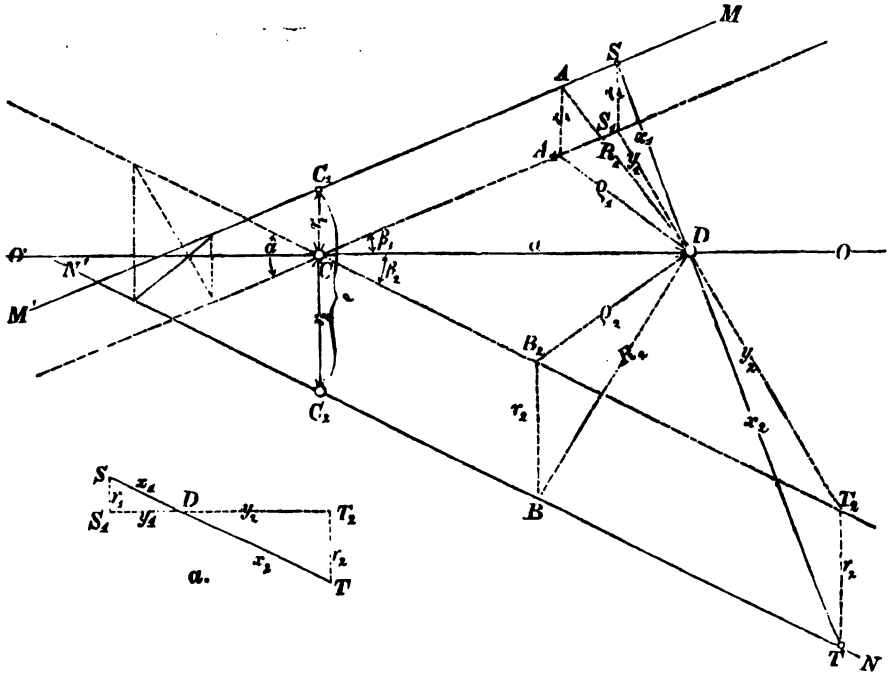


Fig. 162ª. Fig. 162.

Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze hat man nun:

$$x_1^2 = r_1^2 + y_1^2$$
und: $$x_2^2 = r_2^2 + y_2^2.$$

Ferner ist: $y_1 = a \cdot \operatorname{tg}\beta_1$ *)
und: $y_2 = a \cdot \operatorname{tg}\beta_2.$

Eingesetzt, giebt: $x_1^2 - r_1^2 = a^2 \cdot \operatorname{tg}^2\beta_1$
und: $x_2^2 - r_2^2 = a^2 \cdot \operatorname{tg}^2\beta_2.$

Die Parallel-Projection (normal zu CD) der ebenen Figur $SS_1 DT_2 T$ sei durch Fig. 162ª dargestellt, und daraus erkennt man, daß:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

oder: $$x_1 = x_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \text{ und } x_2 = x_1 \frac{r_2}{r_1}.$$

Der Werth von x_1 quadrirt und oben in die erste Gleichung eingesetzt:

*) Lübsen, pag. 23; 8).

Digitized by Google

$$x_2^2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} - r_1^2 = a^2 \cdot tg^2\beta_1 = x_2^2 \frac{r_1^2}{r_2^2} - r_1^2 \frac{r_2^2}{r_2^2}$$

$$\frac{x_2^2 \cdot r_1^2 - r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2} = a^2 \cdot tg^2\beta_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2}(x_2^2 - r_2^2).$$

Die Gleichung für β_2 heißt entsprechend:

$$1 \cdot (x_2^2 - r_2^2) = a^2 \cdot tg^2\beta_2.$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} : 1 = tg^2\beta_1 : tg^2\beta_2$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{tg\beta_1}{tg\beta_2} \quad \ldots \quad (21).$$

D. h.: Die Halbmesser der Kehlkreise*) zweier Hyperbelräder verhalten sich zu einander wie die trigonometrischen Tangenten der Axenwinkel.

Setzt man in Formel (21) die Werthe aus Formel (19ª und 19ᵇ) ein, so erhält man das Verhältniß der Kehlkreisradien, ausgedrückt durch den Cosinus des Winkels α:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi \cdot \sin\alpha}{\frac{1 + \varphi \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}} \times \frac{\frac{\varphi + \cos\alpha}{\sin\alpha}}{\varphi + \cos\alpha}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi^2 + \varphi\cos\alpha}{1 + \varphi\cos\alpha}$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi + \cos\alpha}{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha} \quad \ldots \quad (22).$$

Mit Zuhilfenahme der Bedingung

$$e = r_1 + r_2$$

bestimmt man nun aus Formel (22) die Kehlkreishalbmesser einzeln folgendermaßen:

$$r_2 = r_1 \frac{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}{\varphi + \cos\alpha}$$

$$e = r_1 \left(1 + \frac{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}{\varphi + \cos\alpha}\right) = r_1 \left(\frac{\varphi + 2 \cdot \cos\alpha + \frac{1}{\varphi}}{\varphi + \cos\alpha}\right)$$

$$r_1 = e \cdot \frac{\varphi + \cos\alpha}{\varphi + 2\cos\alpha + \frac{1}{\varphi}} \cdot \frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{1}{\varphi}} = e \cdot \frac{1 + \frac{1}{\varphi}\cos\alpha}{1 + 2 \cdot \frac{1}{\varphi}\cos\alpha + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2}$$

$$r_1 = e \frac{1 + \frac{1}{\varphi}\cos\alpha}{1 + \frac{2}{\varphi} \cdot \cos\alpha + \frac{1}{\varphi^2}} \quad \ldots \ldots \quad (23ª).$$

*) Redtenbacher giebt in seinen „Resultaten" dasselbe Verhältniß wie für Stirnräder an. Das ist jedoch nicht ganz genau, da die Zähne, welche man sich auf den Kehlkreisen als die Verjüngung der Hyperbelradzähne denkt, auch schief, d. h. in Richtung der Berührungslinie stehen müssen; diese Schräge ist aber für beide Räder verschieden, und deshalb bekommen dieselben verschiedene Normaltheilung.

Digitized by Google

Ferner: $r_1 = r_2 \cdot \dfrac{\varphi + \cos\alpha}{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}$

$$c = r_2\left(1 + \frac{\varphi + \cos\alpha}{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}\right) = r_2\left(\frac{\frac{1}{\varphi} + 2\cdot\cos\alpha + \varphi}{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}\right)$$

$$r_2 = e\,\frac{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}{\frac{1}{\varphi} + 2\cos\alpha + \varphi} \cdot \frac{\varphi}{\varphi} = e \cdot \frac{1 + \varphi\cdot\cos\alpha}{1 + 2\varphi\cdot\cos\alpha + \varphi^2}$$

$$r_2 = e \cdot \frac{1 + \varphi\cdot\cos\alpha}{1 + 2\varphi\cdot\cos\alpha + \varphi^2} \quad \ldots\ldots\ (23^b).$$

3) Bestimmung der Theilkreis-Halbmesser für zwei zusammenarbeitende Hyperbelräder, deren äußerer Berührungspunkt um die Größe a vom Kreuzungspunkte der Axen entfernt ist.

Auf der Berührungslinie CO, Fig. 161 und 162, kann nun der Berührungspunkt D der äußeren Theilkreise der Hyperbelräder beliebig angenommen werden. Die Entfernung desselben richtet sich im Allgemeinen nach der verlangten Größe der Räder. Wir setzen allgemein $CD = a$.

Wenn wir nun im Punkte D, Fig. 162, auf die Drehaxe MM' das Loth $DA = R_1$ fällen und von demselben Punkte D auf die Richtung NN' das Loth $DB = R_2$, so stellen R_1 und R_2 die Theilkreishalbmesser der Räder dar. Die Projectionen dieser Radien sind uns bekannt. Es ist nämlich in der Ebene MCM' die Projection von AD die Parallele zu C_1C, also: $AA_1 = r_1$ und in der Normalebene zu jener durch OO' die Linie $DA_1 = \varrho_1$. Entsprechend sind die Projectionen von DB, die Linien $BB_2 = r_2$ und $DB_2 = \varrho_2$.

Man hat also:

$$R_1 = \sqrt{r_1^2 + \varrho_1^2} \quad \ldots\ (24^a)$$

$$R_2 = \sqrt{r_2^2 + \varrho_2^2} \quad \ldots\ (24^b);$$

oder, da $\varrho_1 = a \cdot \sin\beta_1$ und $\varrho_2 = a \cdot \sin\beta_2$:

$$R_1 = \sqrt{r_1^2 + a^2 \cdot \sin^2\beta_1} \quad \ldots\ (25^a)$$

und:

$$R_2 = \sqrt{r_2^2 + a^2 \cdot \sin^2\beta_2} \quad \ldots\ (25^b).$$

Die Verzeichnung der Zahnrichtungen auf den erhaltenen Grundkörpern EE'F'F und GG'H'H, deren Breite $DD' = b$ in Richtung der Berührungslinien zu messen ist, ist nun reine Projections-Arbeit. Man zeichnet zu dem Zwecke die Theilkreise EF und GH, sowie die Kehlkreise JK und LP im Grundriß, theilt dieselben entsprechend den Zähnezahlen von der Grundriß-Projection des Punktes D aus nach entgegengesetzten Richtungen ein und zieht von den Theilpunkten Tangenten an die Kehlkreise, so erhält man die Zahnrichtungen im Grundriß, von wo aus sie dann in den bezügl. Aufriß übertragen werden.

Anmerkung. Hierbei erkennt man, daß die Theilungen in Richtung der Theilkreise — also in Ebenen, normal zu den Axen gemessen — bei den beiden Rädern nicht übereinstimmen, wohl aber, normal zur Zahnrichtung gemessen. Es hat dies eben seinen Grund in der Schiefstellung der Zähne. —

Digitized by Google

Verbindet man S (Fig. 161) mit E und F und den Punkt T mit G und H, so erhält man, weil $ST \perp CD$, die sogen. Gegenkegel, in denen die Zahnprofile liegen. —

Bei Kegelrädern, wo $e = r_1 + r_2 =$ Null ist, laufen die Zahnrichtungen nach dem Schnittpunkte der Axen zu, und da hier die Richtung eines Zahnes stets mit der Richtung der Drehaxe in einer und derselben Ebene liegt, so sind auch die Theilungen beider zu einem Räderpaare gehörenden Räder übereinstimmend. —

Für den besonderen Fall, daß $\alpha = 90^0$ ist, die Drehaxen der Hyperbelräder also einen rechten Winkel bilden, erhält man folgende Spezialformeln.

Der Axenwinkel $\alpha = 90^0$ ist zu zerlegen in die Winkel β_1 und β_2, deren Tangenten sind:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \varphi \quad \ldots\ldots \quad (26^a)$$

und

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (26^b).$$

Das Verhältniß der Kehlkreishalbmesser ist dann:

$$\frac{r_1}{r_2} = \varphi^2 \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

und die Größen derselben:

$$r_1 = \frac{e\varphi^2}{1+\varphi^2} \quad \ldots \quad (28^a)$$

und

$$r_2 = \frac{e}{1+\varphi^2} \quad \ldots \quad (28^b).$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Zwei Wellen kreuzen einander unter einem Winkel $\alpha = 60^0$ und haben im Kreuzungspunkte einen (kürzesten) Normalabstand von $e = 80^{mm}$. Die Wellen sind durch ein Räderpaar so zu verbinden, daß sich die Umdrehungen zu einander verhalten: $\frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{24}{42}$, und der Berührungspunkt der äußeren Theilkreise soll um $a = 150^{mm}$ vom Kreuzungspunkte entfernt sein.

Auflösung. Wir berechnen zuerst mittelst Formel (19) die Winkel β_1 und β_2, in welche der Winkel α durch die Berührungslinie der hyperboloidischen Grundkörper zerlegt wird.

Es ist:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\varphi \cdot \sin\alpha}{1+\varphi \cdot \cos\alpha}.$$

$$\varphi = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} = 0{,}571428; \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Ferner ist:

$$\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025 \text{ und } \cos 60^0 = 0{,}5.^*) \text{ Demnach:}$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\frac{4}{7}\,0{,}866025}{1+\frac{4}{7}\,.\,0{,}5} = \frac{0{,}494871}{1{,}285714}$$

$$\log \operatorname{tg}\beta_1 = \log 0{,}494871 - \log 1{,}285714$$

$$= 9{,}5853477 - 10.$$

$$\beta_1 = 21^0\,3'\,6{,}2''.$$

*) Lübsen 1868, p. 103.

Digitized by Google

Nach Formel (19ᵇ) ist:

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\sin\alpha}{\varphi + \cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{0{,}866025}{\frac{4}{7} + 0{,}5} = \frac{0{,}866025}{1{,}071428}$$

$$\log \operatorname{tg}\beta_2 = \log 0{,}866025 - \log 1{,}071428$$

$$= 9{,}9075674 - 10$$

$$\beta_2 = 38^0 56' 53{,}8''.$$

Die Summe von β_1 und β_2 muß nun wieder den Winkel α geben:

$$21^0\ 3'\ 6{,}2''$$
$$38^0\ 56'\ 53{,}8''$$
$$\alpha = 60^0.$$

Um die Richtung der Berührungslinie ohne Transporteur zu bestimmen, berechnen wir die den Winkeln β_1 und β_2 gegenüberliegenden Axen-Lothe ϱ_1 und ϱ_2 für den Abstand $a = 150^{mm}$ und verfahren dann wie bei Kegelrädern.

Es ist nach Formel (20ᵃ):

$$\varrho_1 = a \,.\, \sin\beta_1$$

$$\log \varrho_1 = \log a + \log \sin \beta_1 = 1{,}7314404$$

und: $$\varrho_1 = 53{,}88^{mm}.$$

Ferner: $$\varrho_2 = a \,.\, \sin\beta_2$$

$$\log \varrho_2 = \log a + \log \sin \beta_2 = 1{,}9744785$$

$$\varrho_2 = 94{,}29^{mm}.$$

Die Halbmesser der Kehlräder erhalten wir aus den Formeln (23). Es ist:

$$r_1 = e \,.\, \frac{1 + \frac{1}{\varphi} \,.\, \cos\alpha}{1 + \frac{2}{\varphi} \,.\, \cos\alpha + \frac{1}{\varphi^2}}$$

$$r_1 = 80 \,.\, \frac{1 + 1{,}75 \,.\, 05}{1 + 3{,}5 \,.\, 0{,}5 + 3{,}0625} = 80 \,.\, \frac{1{,}875}{5{,}8125}$$

$$r_1 = 25{,}8^{mm}.$$

Ebenso ist:

$$r_2 = e \,.\, \frac{1 + \varphi \,.\, \cos\alpha}{1 + 2\varphi \,.\, \cos\alpha + \varphi^2}$$

$$r_2 = 80 \,.\, \frac{1 + 0{,}571428 \,.\, 0{,}5}{1 + 2 \,.\, 0{,}571428 \,.\, 0{,}5 + 0{,}32653} = 80 \,.\, \frac{1{,}285714}{1{,}897958}$$

$$r_2 = 54{,}2^{mm}.$$

Die Richtigkeit dieser Rechnung wird bestätigt, wenn

$$r_1 + r_2 = e = 80$$
$$25{,}8 + 54{,}2 = 80$$

und wenn die Bedingung Formel (22) erfüllt wird:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi + \cos\alpha}{\frac{1}{\varphi} + \cos\alpha}$$

$$\frac{25{,}8}{54{,}2} = 0{,}476 = \frac{0{,}571428 + 0{,}5}{1{,}75 + 0{,}5}.$$

Digitized by Google

Die wirklichen Halbmesser der äußeren Theilkreise der Hyperbelräder sind nun die Hypothenusen zu den bezüglichen Kehlkreishalbmessern r_1 resp. r_2 und den Axenlothen ϱ_1 resp. ϱ_2. Wir erhalten demnach aus Formel (24ª):

$$R_1 = \sqrt{r_1^2 + \varrho_1^2} = \sqrt{665{,}64 + 2903{,}05}$$
$$R_1 = 59{,}738^{mm}$$

und aus Formel (24ᵇ):

$$R_2 = \sqrt{{}_2^2 + \varrho_2^2} = \sqrt{2937{,}64 + 8890{,}6}$$
$$R = 108{,}762^{mm}.$$

2. Aufgabe. Für ein zu construirendes Hyperbelräderpaar hat man folgende Bedingungen:

$$\alpha = 90^0;\ e = 200^{mm};\ \varphi = 1;\ a = 500^{mm}.$$

Auflösung. Wegen $\varphi = 1$ wird auch $\frac{1}{\varphi} = 1$ und $n_2 = n_1$, sowie $r_1 = r_2$ und $R_1 = R_2$.

Es ist nämlich $\sin 90^0 = 1$ und $\cos 90^0 = 0$; die Frml. (19) gehen also über in Frml. (26), und es ist:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \varphi = 1;\ \beta_1 = 45^0$$
$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{\varphi} = 1;\ \beta_2 = 45^0.$$

Die Axenlothe ϱ_1 und ϱ_2 werden für denselben Winkel $\beta_1 = \beta_2 = 45^0$ ebenfalls einander gleich, nämlich:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = a \,.\, \sin 45^0 = 500 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{500}{\sqrt{2}} = 353{,}6^{mm}.$$

Nach Formel (27) wird:

$$\frac{r_1}{r_2} = \varphi^2 = 1;$$

also ist, da $r_1 + r_2 = e = 200^{mm}$:

$$r_1 = r_2 = 100^{mm}.$$

Dasselbe nach Formel (28):

$$r_1 = \frac{e\varphi^2}{1+\varphi^2} = 200 \,.\, \frac{1}{2} = 100$$
$$r_2 = \frac{e}{1+\varphi^2} = 200 \,.\, \frac{1}{2} = 100.$$

Schließlich sind die wirklichen äußeren Halbmesser der hyperboloidischen Zonen:

$$R_1 = R_2 = \sqrt{r_1^2 + \varrho_1^2} = \sqrt{10000 + 125133} = \sqrt{135133}$$
$$R_1 = R_2 = 367{,}6^{mm}. —$$

Anmerkung. Hat man zwei in einer Ebene gelegene und unter $\alpha < 90^0$ sich schneidende Wellen NN' und CM (Fig. 163), so construirt man, wenn irgend möglich, die Kegelräder für den spitzen Winkel α, weil dann der Winkel der Radebenen ein stumpfer wird und die Zähne nicht so spitz ausfallen, als wenn man die Räder für den Nebenwinkel $(180 - \alpha)$ construirt. Diese beiden Räderpaare unterscheiden sich, vorausgesetzt, daß sie dieselbe Ueber-

Digitized by Google

setzung haben, dann in ihrer Wirkungsweise nur durch die verschiedene Drehrichtung, welche das treibende Rad dem getriebenen ertheilt. Ist dieselbe in einem Falle besonders vorgeschrieben, so ist damit auch bestimmt, für welchen der beiden Winkel α und $(180 - \alpha)$ die Räder zu construiren sind.

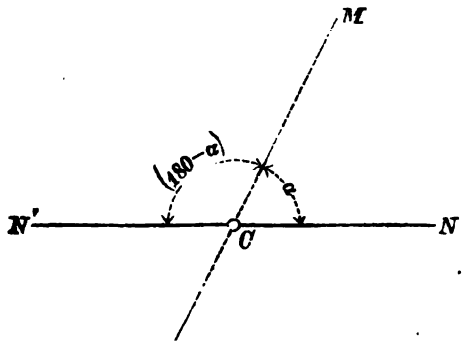


Fig. 163.

Ist nun, wie es wohl am häufigsten der Fall, der Winkel $\alpha = 90^0$, so bleibt es sich ganz gleich, auf welche Seite der Axe CM man das Räderpaar verlegt, da es auf der linken wie auf der rechten paßt.

Dieselben Bemerkungen gelten auch für zwei Hyperbelräder. Sind hierbei die Wellen MM' und NN' auf beiden Seiten durchgehend, so können die zwei verschiedenen Räderpaare für die Winkel $\alpha < 90^0$ und $(180 - \alpha) > 90^0$ je zwei verschiedene, ein Räderpaar für $\alpha = 90^0$ aber vier verschiedene Lagen einnehmen. —

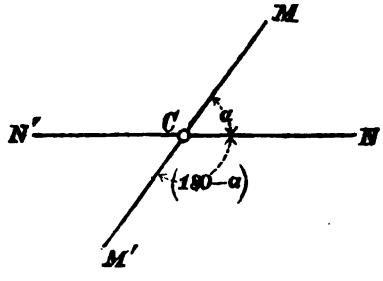


Fig. 164.

Wir untersuchen nun die Räderwerke weiter eingehend in Bezug auf ihre Form, das Material und die Herstellung derselben und ermitteln die Bedingungen für das Gleichgewicht der bei der Uebertragung von mechan. Arbeiten auftretenden und auf die Räderwerke einwirkenden Kräfte und leiten daraus mit Rücksicht auf die Forderungen der praktischen Ausführung und des Betriebes die Constructionsverhältnisse ab. Dabei erörtern wir die Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Arten von Räderwerken und erfahren zugleich, unter welchen besonderen Verhältnissen, in welchen Fällen die eine oder andere Art Räderwerke mit Vortheil anzuwenden ist und führen schließlich einige Beispiele in der Rechnung und graphischen Darstellung durch.

Von den genannten Eintheilungen der Räderwerke legen wir hierbei die unter Nr. 2) — „Das Mittel der Bewegungsübertragung" — zu Grunde, da hiernach der Stoff des vorliegenden Abschnittes im Wesentlichen geschieden und am besten geordnet wird. Demnach haben wir uns zunächst zu beschäftigen mit:

A. Direct-wirkende Frictions-Räderwerke.

— Frictionsräder —

Das sind Räderwerke, deren Scheiben einander an den Umfängen (oder wechselseitig mit Umfang und Endfläche) unter Druck berühren und bei der Drehung eine durch die treibende Welle eingeführte Kraft auf die getriebene Welle übertragen.

Digitized by Google

Die Grundformen der Frictionsräder sind, je nach der Axenlage, theils cylindrische Scheiben, theils Kegelstumpfe und die Berührungsflächen derselben entweder cylindrisch, conisch oder eben (plan) gestaltet, wie es durch beistehende Skizzen verdeutlicht wird.

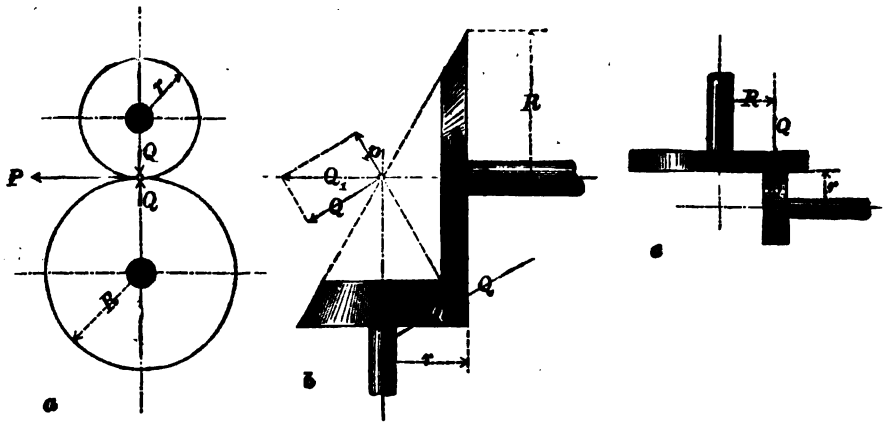


Fig. 165.

Eine der beiden Frictionsscheiben ist fast immer von Gußeisen und an der Lauffläche gehörig abgedreht und geglättet. Die andere (meist die kleinere) wird nicht selten aus Leder- oder Papierscheiben oder aus Holz gefertigt, da, wie wir bei der Berechnung sehen wir, es darauf ankommt, bei gleichem Normaldrucke eine möglichst große Reibung zwischen den Berührungsflächen zu erzeugen.

In Verfolg eben dieser Absicht hat man in neuerer Zeit, entsprechend dem Principe der Frictionskupplungen (s. d.), die Berührungsflächen der Frictionsräder mit concentrischen, keilförmigen Spuren versehen, so daß (Fig. 137, pag. 167) abwechselnd die im Querschnitt keilförmigen Erhöhungen und Vertiefungen ineinander greifen.

Wir unterscheiden dem entsprechend weiter: Frictionsräder mit **glatten** Berührungsflächen oder **glatte Frictionsräder** und solche mit **keilspurigen** Berührungsflächen oder **Keilräder**.

I. Glatte Frictionsräder.

1) Theorie der glatten Frictionsräder.

Wollen wir nun einmal ermitteln, welche Kraft P oder welches Moment M (= PR) mittelst eines Frictionsräderwerkes übertragen werden kann, so haben wir entsprechend den Regeln über die gleitende Reibung („Mechanik", pag. 126) zunächst die Größe des Druckes Q (Fig. 166) zu bestimmen, mit welchem die eine Scheibe gegen die andere angedrückt werden muß. Theoretisch berühren sich die Frictionsscheiben bei allen drei Anordnungen (Fig. 165) nur in einer Linie. Dieselbe liegt in der gemeinschaftlichen Ebene der Drehaxen, und der (Normal-) Druck Q wird stets rechtwinklig zu dieser Berührungslinie verstanden. Bei cylindrischen Scheiben (Fig. 166) ist derselbe als radial gerichtet und wird durch Normaldruck auf die Axen der Räder hervorgebracht.

Digitized by Google

Die gleitende Reibung — d. i. der Widerstand, der sich der gleitenden Bewegung eines Körpers auf oder an einem anderen entgegengesetzt — ist aber nach der Mechanik proportional dem Normaldrucke, nämlich gleich dem Producte aus Normaldruck und Reibungscoefficient. Ist nun zwischen zwei Frictionsscheiben der Reibungswiderstand = F und der Reibungscoefficient = f, so ist:

$$F = f \cdot Q,$$

und nun kann man offenbar eine am Umfange der Scheiben angreifende (oder durch Reduction in denselben verlegte) Kraft P übertragen, welche

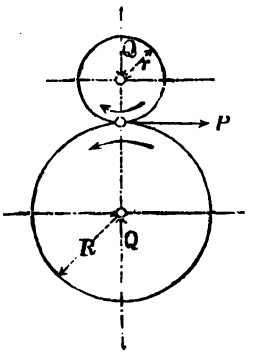


Fig. 166.

$$P \leqq F$$

ist. Es ist also allgemein:

$$P = f \cdot Q$$

und daraus der Normaldruck, mit welchem zwei Frictionsscheiben gegeneinander gepreßt werden müssen, wenn durch dieselben ein Moment M (= PR) oder eine Umfangskraft P übertragen werden soll:

$$Q = \frac{P}{f} \quad \ldots \ldots (29).$$

Der Reibungscoefficient f ist hierbei nach Morin zu nehmen im Mittel:

bei Gußeisen auf Gußeisen: $f = 0{,}15$
„ „ „ Eichenholz: $f = 0{,}49$
„ „ „ Leder: $f = 0{,}28$.

Der Gegendruck für das Gegeneinanderpressen der Scheiben setzt sich in den meisten Fällen in den Wellenlagern der Scheiben ab und verursacht demnach bei der Drehung eine Zapfenreibung, die mit der Stärke der Zapfen zunimmt und welche als schädlicher Widerstand $5 \div 10\,\%$ der Nutzleistung absorbirt; man wird daher gut thun, den Normal-Druck in jedem Falle reichlich zu bemessen. Da aber eben dieser Druck die schädlichen Widerstände vermehrt, so muß man andererseits vermeiden, denselben unnöthig groß zu machen, und es ist sehr zu empfehlen, in den einzelnen Fällen Druckregulirungen in Form von Stellschrauben anzubringen, sodaß man den verlangten Normaldruck jederzeit genau entsprechend der zu übertragenden Kraft reguliren kann.

Beispiele.

1. Aufgabe. Man hat zwei, parallel in einer Ebene gelegene, Wellen a und b und auf denselben je ein cylindrisches Frictionsrad A, resp. B. Das Rad A hat einen Halbmesser $r = 72^{mm}$ und ist aus Lederscheiben gebildet; die Welle desselben enthält 3 HP und macht $n = 300$ Umdrehungen in der Minute. Das Rad B ist von Gußeisen und hat $R = 180^{mm}$ Halbmesser.

Wie groß ist der Normaldruck Q, mit welchem die Scheibenumfänge gegeneinander gedrückt werden müssen, wenn die obengenannte Arbeit von A nach B ohne Gleiten übertragen werden soll?

Digitized by Google

Auflösung. Wir ermitteln zuerst unter Anwendung der Formel (III) pag. 135 die Kraft P am Umfange der Scheibe A:

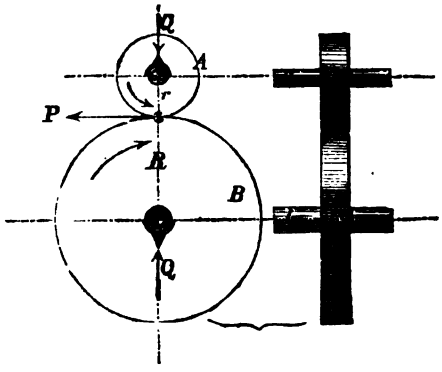


Fig. 167.

$$M = Pr = 716200 \frac{N}{n}$$

$$P = 716200 \cdot \frac{3}{300 \cdot 72} = 99{,}47 \sim = 100^{k}.$$

Der Coefficient für gleitende Reibung zwischen Gußeisen und Leder ist:

$$f = 0{,}28$$

und demnach der erforderliche Normaldruck:

$$Q = \frac{P}{f} = \frac{100}{0{,}28} = 357^{k}.$$

Wenn man also die beiden Frictionsscheiben A und B mit einem Drucke $Q = 357^{k}$ gegen einander preßt, so entsteht am Umfange eine Reibung F, welche daselbst eine Tangentialkraft $P = 100^{k}$ im Gleichgewicht hält. Wenn aber die Scheiben sich drehen, so entsteht in den Wellenlagern eine Zapfenreibung, welche dem Zapfendrucke — hier also Q — und dem Halbmesser der Zapfen direct proportional ist.

Nach der „Mechanik", pag. 128, ist nämlich unter Einführung unserer vorstehenden Bezeichnung, und wenn wir den Coefficienten für Zapfenreibung mit f und den Zapfendurchmesser mit b bezeichnen (da außerdem $P_2 - P_1 = P$ und $P_2 + P_1 = Q$):

$$f = \frac{P}{Q} \cdot \frac{2r}{b}.$$

Dem Momente $\frac{N}{n} = \frac{3}{300} = 0{,}01$

entspricht nach Formel (48b) pag. 137 für schmiedeiserne Zapfen in Bronze:

$$b = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 120 \sqrt[4]{0{,}01}$$

$$b = 120 \cdot 0{,}316 = 37{,}92 \sim = 40^{mm}.$$

Die Umdrehungszahl n_1 der Welle b ist, da

$$\frac{r}{R} = \frac{72}{180} = \frac{n_1}{n} = \frac{1}{2{,}5}:$$

$$n_1 = \frac{1}{2{,}5} \cdot n = \frac{300}{2{,}5} = 120.$$

Digitized by Google

Demnach ist der Durchmesser (d_1) der Welle b:

$$d_1 = 120 \sqrt[4]{\frac{3}{120}} = 120 \,.\, 0{,}397 = 47{,}64$$

$$d_1 = 50^{mm}.$$

Die Kraft p_1, welche am Umfange von A der Zapfenreibung der Welle a das Gleichgewicht hält, ist nun, wenn wir den Coefficient derselben bei ununterbrochener Schmierung $f = 0{,}06$ setzen:

$$p_1 = f \,.\, Q \,.\, \frac{d}{2 \,.\, r} = \frac{0{,}06 \,.\, 357 \,.\, 40}{2 \,.\, 72}$$

$$p_1 = 5{,}95^k \sim = 6^k.$$

Der Antheil p_2 der Welle b:

$$p_2 = f \,.\, Q \,\frac{d_1}{2 \,.\, R} = \frac{0{,}06 \,.\, 357 \,.\, 50}{2 \,.\, 180}$$

$$p_2 = 2{,}975^k \sim = 3^k.$$

Es ist also außer dem nutzbaren Drucke $P = 100^k$ am Umfange der Räder noch der Druck:

$$p_1 + p_2 = 6 + 3 = 9^k$$

oder:

$$109 : 9 = 100 : x$$

$$x = \frac{900}{109} = 8{,}26\,\%$$

des Gesammtdruckes zu überwinden, und es wird in Folge dessen der Normaldruck in Wirklichkeit auch größer ausfallen als $Q = 357^k$, nämlich eine Wenigkeit mehr als:

$$Q = \frac{P}{f} = \frac{109}{0{,}28} = 390^k.$$

Man kann also unter diesen Verhältnissen 10 % des theoretischen Normaldruckes aus Rücksicht für die Zapfenreibung auf denselben schlagen.

2) Construction und Ausführung der glatten Frictionsräder.

Fig. 1, Bl. LXXI zeigt im Querschnitt ein paar glatte Frictionsräder von Eisen für zwei einander unter einem rechten Winkel schneidende Wellen α und β. Die theoretische Grundform dieser Frictionsräder wird erhalten, indem man conform pag. 201 aus den Halbmessern $af = fb$ und $bg = gd$ ein rechtwinkliges Parallelogramm cfbg construirt und die durch die Diagonale bc gebildeten Theile zu gleichschenkligen Dreiecken acb und cbd ergänzt.

Das Verhältniß der Dreiecksbasen ab und bd ist durch das Uebersetzungsverhältniß der Räder, also durch das Verhältniß der Umdrehungszahlen bedingt. Macht also die Welle α in der Minute n und β in der Minute n_1 Umdrehungen, so ist:

$$\frac{ab}{bd} = \frac{fb}{bg} = \varphi = \frac{n_1}{n}.$$

Die numerischen Größen von ab und bd hängen ab von den Verhältnissen der Maschine oder Anlage, für welche das Frictions-Räderwerk angeordnet werden soll, also von der Stärke der Wellen und im Grunde von der Größe der zu übertragenden Kraft.

Die Länge der Kegelflächen oder die Länge $aa' = bb' = dd'$ der Linie, in welcher sich die Frictionsräder berühren, ist ebenfalls den übrigen Verhältnissen entsprechend zu wählen.

Digitized by Google

Die Trapeze abb'a' und dbb'd' sind nun die Projectionen der abgestutzten Kegel, welche bei der Bewegungsübertragung auf einander rollen, und man hat nur noch nöthig, diese Kegelflächen in einem steifen Materiale darzustellen und so vorzurichten, daß dieselben auf den zugehörigen Wellen concentrisch befestigt werden können.

Das größere (treibende) Rad gestaltet man als Scheibe, deren innerer Theil zwischen a' und b' eben (plan) gemacht und, da derselbe nicht abgedreht zu werden braucht, gegen das innere Ende a'b' der Kegelfläche etwas abgesetzt wird. Hieran schließt sich im Mittelpunkte die Nabe, mittelst welcher das Rad auf der Welle aufgesteckt und fest gemacht wird. Dieselbe ist wie bei den Scheibenkupplungen äußerlich als ein schwach verjüngter Conus gestaltet und enthält die Bohrung entsprechend der Wellenstärke, sowie die Keilnut zum Einbringen des Befestigungs- (Längs-) Keiles (pag. 150).

Die Wandstärke der Nabe ist:

$$w = 10 + 0{,}33\,b$$

und die Länge derselben:

$$L = 20 + 1{,}13\,b.$$

Da die Welle α in Richtung ihrer Axe nach c hin einen beträchtlichen Druck ausüben muß, damit in der Berührungslinie bb' ein der zu übertragenden Kraft entsprechender Normaldruck zur Erzeugung der nöthigen Reibung entstehe, so ist es geboten, die Welle α am Ende etwas abzusetzen. Es entsteht dann am Ende des Axenkopfes ein Ansatz, gegen welchen sich die Nabe des Frictionsrades A anlegt und dieses somit an Verschiebung gehindert wird. An der Peripherie der großen Scheibe haben wir an der Rückseite eine wulstartige Verstärkung angebracht, damit dieselbe nicht so leicht ausspringen kann. Damit nun auch das ganze Rad dem auszuübenden Drucke entsprechend genügend stabil werde, sind auf der Rückseite, zwischen Scheibe und Nabe, noch einige — 4 ÷ 6 — Verstärkungsrippen angeordnet worden. Dieselben bedingen aber einen nicht unbedeutenden Betriebswiderstand insofern, als sie, wie Ventilatorflügel wirkend, die in ihrem Bereich befindliche Luft in Bewegung setzen müssen. Man wird deshalb bei großen Rädern und bedeutenden Geschwindigkeiten diese Rippen ganz weglassen, und dafür die Scheiben stark genug machen oder jene wenigstens ganz niedrig halten.

Das Getriebe B ist, den vorliegenden Verhältnissen entsprechend, als massiv-conischer Körper construirt worden und enthält auf der unteren Seite einen Nabenansatz, in welchem sich für gehörige Feststellung auf der Welle eine Stellschraube befindet. —

Für die Bearbeitung ist hier von besonderer Wichtigkeit, daß die Berührungsflächen ganz genau den Grundformen entsprechend abgedreht werden, damit sich die Kegelflächen innerhalb ihrer ganzen Länge bb' berühren. Uebrigens sind nur noch die Peripherie der größeren Scheibe und die Endflächen der Naben etwas abzudrehen und die Naben auszubohren; alle anderen Theile bleiben roh und werden angestrichen. —

Damit man eine solide und möglichst unveränderliche Aufstellung erhalte, ist es nothwendig, daß die Wellen in unmittelbarer Nähe der Räder gelagert werden, und die Lager selbst müssen wegen der meist sehr bedeutenden Geschwindigkeiten der Wellen möglich lang gemacht und mit gutem Lagerfutter versehen werden. —

Digitized by Google

Fig. 2, Bl. LXXI zeigt einen Frictions-Rädertrieb, welcher einige sehr wesentliche Betriebs-Vortheile darbietet und welcher sich namentlich für Centrifugal-Trockenmaschinen*) eignet.

Die Betriebsscheiben A und B sind zwei congruente ebene (Plan-) Scheiben und drehen sich mit den in ihnen befestigten Wellen α und β in entgegengesetzten Richtungen, aber mit genau gleichen Geschwindigkeiten. Sie übertragen die Bewegung auf eine dritte Welle γ, welche mit α und β in derselben Ebene liegt, die Axen von jenen aber unter Winkeln von 90^0 schneidet.

Auf dieser Welle γ befindet sich ein cylindrisches Getriebe C, welches, aus Lederscheiben gebildet, auf der Welle γ verschiebbar aufgesteckt ist.

Diese Construction steht nun allerdings in Widerspruch mit dem, was wir in der Einleitung über die Grundformen der Räderwerke sagten. Danach müssen nämlich eigentlich die Berührungsflächen zweier Räder, welche zu sich schneidenden Axen gehören, Kegelflächen sein, wenn je zwei sich berührende Punkte der Scheiben dieselbe Geschwindigkeit haben, die Räder also nur auf einander rollen sollen.

Im vorliegenden Falle wird also theilweise ein Gleiten stattfinden und deshalb etwas mehr Bewegungsarbeit consumirt werden. Die Punkte am Umfange der cylindrischen Oberfläche von C haben nämlich sämmtlich dieselbe Geschwindigkeit, während Punkte der Scheiben A und B an der Planfläche, je nach der größeren oder geringeren Entfernung derselben vom Drehmittelpunkte, größere oder geringere Geschwindigkeit haben. Nehmen wir an, die Punkte, welche um ab von a abstehen, haben dieselbe Umfangsgeschwindigkeit wie die Oberfläche von C, so werden die Kreise mit den Halbmessern ab und bd auf einander rollen; aber auch diese nur allein. Der Kreis von bd liegt, wenn man nach b' und b'' hin eine gleichmäßige Abnutzung von C voraussetzt, ungefähr in der halben Höhe von C, und als Uebersetzungsverhältniß zwischen α oder β und γ hat man das Verhältniß von $ab : bd = \varphi$. Nun ist aber C auf γ in der Längsrichtung der Welle verschiebbar — es ist nur mittelst einer prismatischen Feder an Drehung auf der Welle gehindert —: man wird also das Umsetzungsverhältniß in gewissen, durch die Größe der Scheibenhalbmesser von A und B bedingten Grenzen veränderlich erhalten. Wenn man C etwas höher hinaufschiebt, wird ab kleiner, also φ kleiner; wenn $ab = bd$, ist $\varphi = 1$, und schiebt man es noch höher hinauf, so wird $\varphi < 1$. —

Umgekehrt vergrößert sich die Geschwindigkeit von C in Bezug auf A und B immer mehr, je weiter man C nach der Peripherie der größeren Scheiben hin bewegt.

Es bietet also die vorliegende Anordnung die vorzügliche Eigenthümlichkeit, daß man, eine constante Drehungsgeschwindigkeit der Antriebscheiben vorausgesetzt, die Hauptwelle C allmählig in Gang setzen und ihr in gewissen Grenzen eine beliebige Geschwindigkeit ertheilen kann.

Die Bewegung und Feststellung des Getriebes C erfolgt durch eine Art Ausrückgabel, welche in die am unteren Ende von C befindliche Nut eingreift.

Eine weitere vortheilhafte Eigenthümlichkeit dieses Frictions-Rädertriebes besteht in der Anordnung von zwei einander entgegengesetzt stehenden und drehenden Antriebscheiben. Auf diese Weise erzeugt man den zur Arbeitsübertragung durch

*) „Großenhainer Webstuhlfabrik", vorm. A. Zschille in Großenhain.

Digitized by Google

die Frictionsräder nöthigen Druck von zwei entgegengesetzten Seiten her und hebt somit, wenn diese beiden Drücke einander gleich sind, den Druck auf die Welle γ, welcher jederzeit nachtheilige Reibung und Abnutzung im Lager verursacht, auf. Damit aber auch die Wellen α und β möglichst wenig Bewegungswiderstand ergeben und in jedem Falle die Scheiben A und B gehörig an das Getriebe C andrücken, ordnet man am Ende derselben stählerne, oder an den Spitzen verstählte, Druckschrauben an, wie es Fig. 2, Bl. LXXI an der rechten Seite im Aufriß zeigt.

Jede der Wellen α und β muß für sich allein durch Riemen- oder Rädertrieb seine Bewegung erhalten, und zwar muß, wie schon erwähnt wurde, die Drehungsgeschwindigkeit derselben genau identisch und die Drehungsrichtung entgegengesetzt sein. —

Was nun die Construction und Ausführung des vorliegenden Beispieles anlangt, so ist noch hervorzuheben, daß die Scheiben A und B an der Vorderseite, an der Berührungsfläche, genau eben abzudrehen sind, und daß man auch hier gut thut, die Naben gegen niedrige Wellenansätze anzulegen. — Die Traversen e, in welchen die Druckschrauben mit den Gegenmuttern zu befestigen sind, hat man sich an dem Gestell der Maschine, resp. an den Lagern der Wellen α und β zu denken.

Die Frictionsscheibe C besteht aus einer Schicht auf einander gelegter und verleimter Lederscheiben, welche durch drei Schrauben und zwei eiserne Endplatten zu einem festen, cylindrisch abgedrehten Körper vereinigt sind.

Da die Scheibe C immer ein Bestreben nach unten zu gehen äußern wird, so dürfte es sich empfehlen, in den Ausrückhebel zwei Stahlröllchen, mit im Hebel befestigten Drehzapfen, anzuordnen, welche dann von der oberen ebenen Ringfläche der Nut f in Drehung versetzt werden, so aber weniger Widerstand und Verschleiß verursachen, als wenn man, wie bei den Kupplungsausrückungen, direct die Gabel oder einen getheilten Ring (Fig. 5, Bl. LXX) in die Nut eingreifen läßt. —

II. Keilräder.

Wenn man die an zwei Wellenenden befestigten Planscheiben mit ihren Planflächen gegeneinander drückt, so entsteht eine Reibung, welche die genannten Scheiben zu einer Frictions-Kupplung (pag 164) und zur Uebertragung von Arbeiten fähig macht. Dasselbe geschieht, wenn man anstatt der Planscheiben eine Voll- und eine Hohlkegelfläche anwendet, und es ist im letzteren Falle der Druck, mit welchem die Scheiben gegeneinander zu pressen sind, unter denselben Umständen wesentlich geringer als bei den Planscheiben, welche dieselbe Kraft übertragen.

Dasselbe Verhältniß findet statt zwischen zwei glatten Frictions-Stirnrädern und zwei für dieselben Umstände construirten sogen. Keilrädern. Profilirt man nämlich den Kranz des einen Rades A, Fig. 168, in Form eines Vollkeiles, denjenigen des eingreifenden Rades entsprechend als Hohlkeil, so kann schon bei einem verhältnißmäßig geringen Radialdrucke Q_1 eine Kraft zwischen den parallelen Wellen der Räder übertragen werden.

Digitized by Google

Berühren sich die Frictionsräder wie bei Fig. 167 in einer einzigen geraden, parallel zu den Wellen gelegenen Linie, so ist unter einem Radialdrucke — also hier

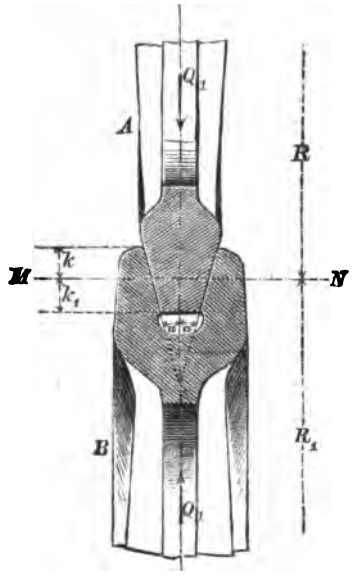


Fig. 168.

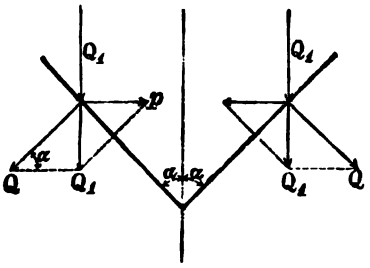


Fig. 169.

unter einem normal gegen die Berührungsflächen gerichteten Drucke — Q und bei einem Reibungscoefficient f die Umfangskraft, welche übertragen wird, nach Formel (29):

$$P = f \cdot Q \text{ und } Q = \frac{P}{f}.$$

Bezeichnen wir nun bei Keilrädern (Fig. 169) den Radialdruck mit Q_1 und den Keilwinkel mit 2α, so findet man durch Zerlegung wie bei Fig. 135, pag. 166:

$$Q_1 = Q \cdot \sin \alpha$$

und:

$$Q = Q_1 \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Setzt man diesen Werth von Q in die obige allgemeine Gleichung ein, so ergiebt sich der Radialdruck für Keilräder zu:

$$Q_1 = \frac{P}{f} \sin \alpha \quad \ldots \quad (30).$$

Unter übrigens gleichen Umständen ist hiernach Q_1 proportional dem Winkel α; also, je kleiner α, desto kleiner Q_1.

Der Winkel α wird hier gewöhnlich zwischen 14^0 und 18^0 genommen, und wollen wir nun wissen, um wieviel sich bei diesen Grenzwerthen von α der Druck Q_1 bei Keilrädern gegenüber dem Drucke Q bei glatten Frictionsrädern vermindert, so bilden wir das Verhältniß der Reibungsgrößen R_1 und R in beiden Fällen:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{Qf}{\frac{Qf}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1}$$

$$R_1 = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Für $\alpha = 14^0$ ist $\sin \alpha = 0{,}2419$ und $R_1 = 4{,}13\,R$,
für $\alpha = 18^0$ ist $\sin \alpha = 0{,}3090$ und $R_1 = 3{,}24\,R$.

Die Reibung wird auf diese Weise also um das 3- bis 4fache vermehrt, und es ist zur Uebertragung einer und derselben Umfangskraft P bei Keilrädern

Digitized by Google

nur $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ von dem Axialdrucke nöthig, welchen man bei glatten Frictionsrädern haben muß.

Es bedingt dieser Umstand, daß man die schädliche Reibung in den Wellenlagern beträchtlich vermindert, und daß man andererseits durch Keilräder größere Kräfte übertragen kann als durch glatte Frictionsräder.

Ein Theil dieses Vortheiles geht aber wiederum verloren, da die Keilräder nur in dem Mittelschnitte MN, Fig. 168, wirklich aufeinander rollen, alle übrigen Theile aber von k und k_1 eine gleitende Reibung erzeugen. Dieser Nachtheil nimmt in demselben Verhältnisse zu wie der Vortheil der verminderten Zapfenreibung; deshalb darf man mit dem Winkel α nicht unter eine gewisse Grenze herabgehen.

Der genannte Uebelstand läßt sich aber dadurch auch wieder vermindern, daß man die Keilhöhen k und k_1 möglichst klein wählt, und um gleichwohl durch Verkleinerung von k und k_1 nicht einen unverhältnißmäßig großen Flächendruck herbeizuführen, ordnet man mehrere Keilspuren nebeneinander auf dem Kranze an, wie es Fig. 170 veranschaulicht.

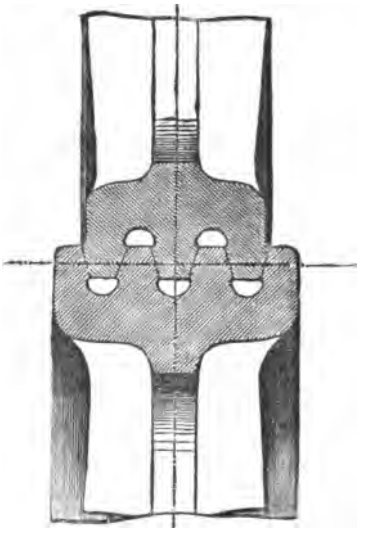


Fig. 170.

Auch für einander schneidende Wellen, also als **Kegelräder**, hat man die Keilräder angewendet. —

Die Ausführung der Keilräder geschieht ebenso wie die der Riemenscheiben, und zwar macht man am einfachsten den Kranz im Gusse voll und dreht die Keilspuren erst nachträglich ein. — Ueber das Armsystem siehe B) die Riemen- und Seilscheiben. —

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die Eigenthümlichkeiten der Frictionsräderwerke in ihrer Wirkungsweise, so finden wir, daß sich dieselben im Allgemeinen durch einen ruhigen, sanften Gang gegenüber den Zahnrädern auszeichnen. Sie sind aber in besonderen Fällen auch deshalb fast unersetzlich, weil sie wie Frictionskupplungen bei plötzlich wachsendem Widerstande auf einander gleiten können und somit etwaigen Bruch verhindern.

Sanften, stoßfreien Gang und die ebengenannte Eigenschaft bieten zwar auch die indirect wirkenden Frictionsräderwerke, Riemen- und Seilscheiben; allein diese verlangen immer eine größere, oft nicht gebotene Axenentfernung und sind auch in der Geschwindigkeit insofern beschränkt, als bei zu großer Drehungsgeschwindigkeit die Adhäsion der Riemen am Scheibenumfange in Folge der in den Riemen eintretenden Centrifugalkraft verringert wird, und die Riemen dann, um dies zu vermeiden, stärker angespannt werden müssen, was wiederum hohen Axendruck erzeugt.

Die Frictionsräder, und namentlich die glatten, gebraucht man für die größten Geschwindigkeiten und meist bei Uebersetzungen in die schnellere Bewegung ($\varphi > 1$), während die Keilräder auch für geringere Geschwindigkeiten und größere Kräfte, und namentlich auch bei Uebersetzungen in's Langsame ($\varphi < 1$) Anwendung finden.

Digitized by Google

Zur Erzeugung der nöthigen Reibung an den Radumfängen ist aber bei allen, besonders bei den glatten Frictionsrädern, ein bedeutender Radialdruck nothwendig, welcher seinen Nachtheil als Zapfenreibung mitbringt. In dem Beispiele Fig. 2, Bl. LXXI wurde aber gezeigt, wie derselbe wiederum auf ein Minimum reducirt werden kann, und gleichzeitig erfuhren wir dort, wie man auch ein allmähliges Anlassen und bequeme Regulirung des Druckes bewirken kann.

Die ausgebreitetste Anwendung finden die Frictionsräder bei den Eisenbahnen, wo durch die vom Gewichte der Maschine resp. der einzelnen Wagen zwischen den Rädern und Eisenschienen erzeugte Reibung die Bewegung eines Zuges auf horizontaler und auf bis 1 : 30 ansteigender Bahn möglich wird.

Bei noch größeren Steigungen hat man versucht, Keilräder anzuwenden, ist aber auf den Nachtheil zu großer Abnutzung gestoßen und hat davon Abstand genommen.

Außerdem verwendet man die glatten Frictionsräder mit Vortheil bei Centrifugalmaschinen, Regulatorbetrieb ꝛc. und die Keilräder besonders bei Aufzügen. —

B. Indirekt-wirkende Friktions-Räderwerke.

— Riemen- und Seilscheiben —

Aus der vorgängigen Betrachtung erhellt, daß die indirect wirkenden Frictions-Räderwerke ganz auf gleiche Weise functioniren wie die direct wirkenden; der wesentliche Unterschied zwischen beiden Arten besteht einzig darin, daß bei dem Riemen- und Seiltrieb die Entfernung der Wellen größer ist als die Summe der Radien, und daß man deshalb zur Verbindung ein Zwischenmittel — Zugorgan — anwenden muß, welches als ein endloses biegsames Band oder Seil die Rollen theilweis umschlingt und die Kraft und Bewegung von dem treibenden Rade auf das getriebene überträgt. Bei den indirect wirkenden eingreifenden Räderwerken, den sogen. Kettenrädern, hat man auch ein Zugorgan nöthig; es unterscheiden sich aber beide Betriebsweisen dadurch, daß bei den Riemen- und Seiltrieben die Kraft in Folge der Reibung vom Rade in das Zugorgan und umgekehrt, übergeführt wird, während bei den Kettenrädern die Zähne derselben in die Glieder des Zugorganes eingreifen.

Man ersieht hieraus, daß auch die Riemen- und Seilscheiben nur dann eine Kraft übertragen können, wenn der zur Erzeugung der Reibung nöthige Druck vorhanden ist. Die Reibung findet aber hier zwischen jedem einzelnen Rade und dem Zugorgane statt, und es muß deshalb der Riemen oder das Seil *angespannt* werden; das geschieht, indem man auf die Räder, resp. deren Axen, entgegengesetzte, die Räder von einander zu entfernen strebende, Drücke ausübt. Es ist also auch hiermit der Nachtheil verknüpft, daß, je größere Kräfte man zu übertragen wünscht, desto bedeutendere Zapfenreibung auftritt. In einzelnen Fällen wird die Anspannung des Zugorganes auch wohl durch besondere Spannrollen bewirkt.

Die *Grundform* der Räder für Riemen- und Seiltrieb ist einzig und allein die cylindrische Scheibe; conische und hyperboloidische Formen, in dem Sinne wie bei direct wirkenden Rädern, kommen hier nicht vor. Man nennt deshalb auch bei

Digitized by Google

Riemen- und Seiltrieb die Räder speciell Scheiben oder Rollen. Das specielle Profil des Radkranzes richtet sich aber nach der Art des Zugorganes.

Die Zugorgane für Rädertrieb sind entweder band- oder seilförmig. Bandförmig sind die Leder- und Gummiriemen, Hanfgurten und flachen Drahtseile, seilförmig hingegen die runden Drahtseile, Hanfseile, Schnüren, auch giebt es runde Gummi- und Lederriemen. Dem entsprechend ist die Spur der Räder entweder flach (wenig convex gewölbt) oder rinnenartig.

Die Axen der durch Riemen- und Seiltrieb zu verbindenden Wellen können alle auch bei direct wirkenden Räderwerken möglichen Lagen einnehmen, können also parallel, sich schneidend oder gekreuzt sein. Am häufigsten ist jedoch hier die parallele Axenlage, da die übrigen oft zu so beträchtlichen Complicationen der Anlage führen, daß man dann lieber Zahnräder verwendet; denn nur der bei weitem geringere Theil der Beispiele ist dann selbstleitend, ohne besondere Leitrollen, ausführbar.

Der Drehungssinn der Rollen oder Scheiben eines einfachen Riementriebes ist bei parallelen Axen entweder derselbe oder entgegengesetzt, je nachdem man den Riemen offen (Fig. 145ª, pag. 177) oder gekreuzt, geschränkt (Fig. 145ᵇ) auflegt. Bei sich schneidenden und gekreuzten Axen hängt es von der Anordnung ab, und bei Seilen und Schnüren ist entgegengesetzte Drehrichtung nur in kleinen Verhältnissen möglich.

In mehreren Punkten wesentlich von einander verschieden sind nun der Riemen- und der (Hanf- und) Drahtseiltrieb. Da übrigens diese beiden Arten bei Transmissionen allein am häufigsten vorkommen, und eine Betrachtung dieser auch das Wesentlichste aller anderen indirecten Frictionstriebe einschließt, so wollen wir uns hier ausschließlich damit beschäftigen. Die folgende Betrachtung trennen wir danach in: a) Riementrieb und b) Draht-Seiltrieb.

a) Riementrieb.

Der Riementrieb ist das billigste und für die meisten Fälle geeignetste Transmissionsmittel. Derselbe findet deshalb auch gegenüber den Frictions-, Zahn- und Ketten-Räderwerken, selbst den Seiltransmissionen gegenüber, die ausgedehnteste Anwendung. Es giebt complette, und zum Theil sehr umfangreiche, Transmissionsanlagen, welche nur aus Wellen, Lagern, Riemenscheiben und Riemen bestehen. Fast sämmtliche Arbeitsmaschinen in mechanischen Werkstätten, Spinnereien, Webereien, Porzellan- und Steinzeugfabriken, Ziegeleien, Brennereien und Brauereien, chemischen Fabriken ꝛc., sehr viele dergleichen in Mahl- und Schneidemühlen, Aufbereitungsanstalten, werden von der Transmission aus theils direct, theils indirect (durch Vorgelege) mittelst Riemen betrieben.

In der Anordnung bieten die vorkommenden Riementriebe keine große Mannigfaltigkeit: es sind meistens offene Riemen (Fig. 171), mit parallel gelegenen Axen und cylindrischen, am Umfange schwach convex gewölbten Scheiben, von denen je zwei, zu einem Paare oder einem einfachen Riementriebe gehörige, in einer und derselben Ebene liegen. Seltener sind die geschränkten Riemen, Fig. 173, und noch seltener die theilweis geschränkten, Fig. 172, für einander kreuzende Axen,

Digitized by Google

wovon die offenen und ganz geschränkten Riementriebe gewissermaßen Specialitäten sind.*)

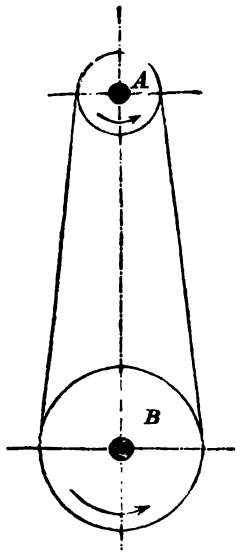


Fig. 171.

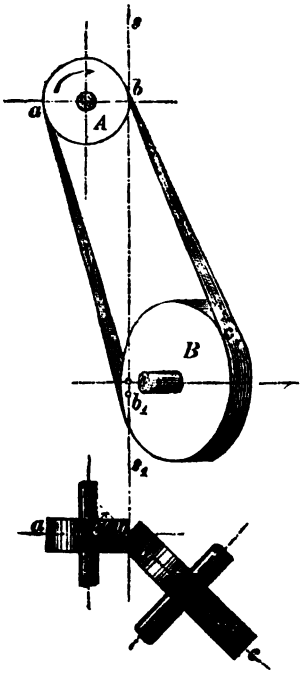


Fig. 172.

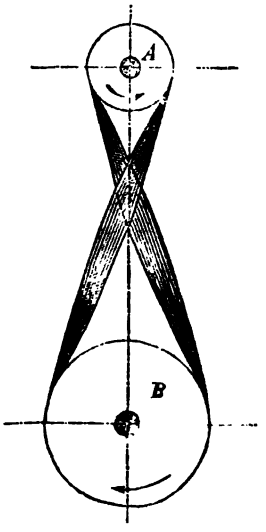


Fig. 173.

Der Riementrieb eignet sich im Allgemeinen am besten für parallele, um ein hinreichendes Maß von einander abstehende Wellen, zwischen welchen bei genügend großer Drehungs-Geschwindigkeit nicht allzu große Kräfte zu übertragen sind, und bietet für gewöhnlich nicht wesentlich beträchtlichere Bewegungswiderstände dar als ein Zahnrädertrieb. Dagegen zeichnet sich der Riementrieb aus: durch ruhigen, geräuschlosen, nicht vibrirenden Gang — indem etwa vorkommende Stöße durch die Riemen nicht fortgepflanzt werden —, durch Nachgiebigkeit bei plötzlicher Widerstandsvermehrung, bequemes An- und Abstellen und Wohlfeilheit in der Herstellung der einzelnen Theile sowie der Montage.

Die Regel für die richtige Anordnung eines functionsfähigen Riementriebes verlangt, daß zwei in einer Riemenleitung auf einander folgende Riemenscheiben so angeordnet werden, daß der auf eine Scheibe auflaufende Riementheil sich mit seiner Mittellinie in der Mittelebene der betr. Scheibe bewege.

Deswegen ist es nothwendig, daß bei parallelen Wellen die Axen derselben wirklich genau parallel liegen und erhalten werden, daß die Scheiben in eine Mittelebene zu liegen kommen; und es geht daraus hervor, daß für gekreuzte Wellen nur dann ein selbstleitender Riementrieb (Fig. 172) möglich ist, wenn die Durchschnittslinie oder Spur ss_1 der Mittelebenen ab und $b_1 c$ die Mittelschnitte der beiden Riemenscheiben an den Seiten berührt, wo der Riemen abläuft.

*) Ueber Leitrollentriebe s. Reuleaux, „Die Construction der Maschinentheile" 1862, pag. 549 und „Constructeur" 1869, pag. 349.

Digitized by Google

Geringe, durch die Unvollkommenheit der materiellen Ausführung bedingte Ungenauigkeiten werden dadurch wirkungslos gemacht, daß man die Scheibenumfänge nicht genau cylindrisch, sondern etwas erhaben, kugelig gewölbt, formt.

Hieraus ergiebt sich ferner, daß, während es für den offenen und ganz geschränkten Riemen gleichgiltig ist, nach welcher Richtung die treibende Scheibe umgedreht wird, man bei dem theilweis geschränkten Riemen, Fig. 172, nur nach der durch die beigesetzten Pfeile angedeuteten Richtung drehen kann. Soll demnach z. B. die Scheibe A von rechts nach links (entgegengesetzt der Bewegung eines Uhrzeigers) drehen, so müssen die Scheiben (im Grundriß) auf der anderen Seite des Kreuzungspunktes der Wellen in die verlangte Lage gebracht werden. —

Die Berechnung des Riementriebes umfaßt die Lösung von mechanischen, die Riemenspannung und die danach zu ermittelnden Riemen- und Scheiben-Dimensionen betreffenden Aufgaben, und man kann die diesbezügliche, nun folgende wissenschaftliche Abhandlung über den vorliegenden Gegenstand kurz als

I. die Theorie des Riementriebes

bezeichnen, während wir dann in einem sich anschließenden praktischen Theile die Construction und Ausführung besprechen werden.

1) Die Riemenspannung.

In dem einfachen Riementriebe (Fig. 174) seien A eine Riemenscheibe von dem Halbmesser R, auf der treibenden Welle C, B eine in der Ebene von A

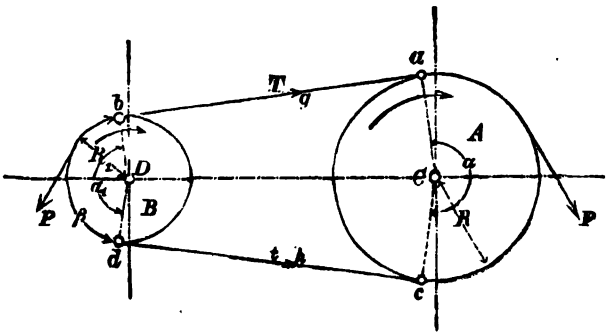


Fig. 174.

gelegenen Scheibe mit dem Halbmesser R_1, auf der getriebenen Welle D. Sieht man von der, bei gewöhnlichermaßen langen und gehörig straff gespannten Riemen nur schwach auftretenden, durch das Gewicht der Riemen aber stets hervorgerufenen und in Form der Kettenlinie erfolgenden, Durchbiegung der Riemen ab, so umschließt der endlose Riemen je einen Theil der Scheibenumfänge und bildet außerdem zwei an die Rollen gelegte Tangenten, deren Schnittpunkt bei offenem Riementriebe in der Verlängerung der Centrale, bei geschränkten Riemen aber innerhalb derselben, zwischen den Scheiben liegt.

Da die bei der Kraftübertragung durch Riemen in Betracht kommende Seilreibung*) von der Länge des Bogens abhängig ist, innerhalb dessen das Seil

*) Weisbach, „Der Ingenieur" 1863, pag. 364.

Digitized by Google

oder der Riemen die betr. Rolle umspannt, so ist es nothwendig, diese Bogenlängen durch die Aufzeichnung des geometrischen Zusammenhanges darzustellen und bezhtl. durch Rechnung zu ermitteln. Diese Bögen, welche durch die Tangentialpunkte a u. c und b u. d begrenzt sind, seien α, resp. α_1. — Das Stück ab des Riemens, welches auf die treibende Rolle A aufläuft, nennt man das führende, das Stück cd, welches von derselben ab- und auf die getriebene aufläuft, ist das geführte Riemenstück.

Denkt man sich nun in der Welle D einen Widerstand, dessen Moment $M = PR_1$ ist und welches durch den Riementrieb überwunden werden soll, so ist es für die Rolle A dasselbe, als ob an deren Umfange eine Tangentialkraft P wirksam wäre, und es hätte demnach der führende Riemen ab eine Spannung $T = P$ auszuhalten. Damit aber die Uebertragung durch den Riementrieb möglich wird, muß der Riemen mit einer gewissen Kraft an die Scheiben angedrückt, d. h. der ganze Riemen muß außerdem um eine Größe t entsprechend angespannt werden, und man hat demnach im führenden Riemenstücke die Spannung

$$T = t + P$$

und im geführten die Spannung t. Von a nach c und von b nach d hin geht die Spannung T allmählig in die von t über.*)

Aus vorstehender Formel erhält man allgemein die Größe der in den Scheibenumfang reducirten Kraft P eines durch den Riementrieb zu übertragenden Momentes zu:

$$P = T - t \quad \ldots \quad (31);$$

diese Kraft ist gleich dem Unterschiede der Spannungen im führenden und im geführten Riemenstücke.

Würde der Riemen bei g und h zerschnitten, und würden daselbst zwei in der Richtung der Riemenstücke wirkende Kräfte T und t angebracht, so würde die Kraft T die entgegengesetzte Kraft t und die dem T ebenfalls entgegenwirkende Seilreibung am Cylinderumfange von B überwinden, wenn sie, wie die Mechanik lehrt, wäre:

$$T = t \cdot e^{f\alpha_1}$$

und für die Rolle A entsprechend:

$$T = t \cdot e^{f\alpha}.$$

Hierin bedeutet $e = 2{,}71828 \ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen, f den Reibungscoefficient für gleitende Reibung zwischen Riemen oder Seil- und Rollenumfang und α_1 den in Bogenmaß ausgedrückten Winkel, der von den Radien bD und dD in den Endpunkten des umspannten Bogens eingeschlossen wird.

Dieser Winkel α_1 ist bei $bDd = \alpha_1{}^0$:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha_1{}^0 = 0{,}01745\, \alpha_1{}^0 = \frac{\beta}{R_1},$$

wenn β die Länge des Riemenbogens bedeutet.

Subtrahirt man von der Spannung $T = e^{f\alpha_1}$ die Spannung t, so bleibt offenbar die Größe der Seilreibung, die wir bei der Rolle B mit F_1 und bei der Rolle A mit F bezeichnen wollen, übrig; nämlich für die Rolle B ist:

$$T - t = F_1$$

$$F_1 = t \cdot e^{f\alpha_1} - t = t\,(e^{f\alpha_1} - 1)$$

*) Redtenbacher, „Der Maschinenbau" 1862, pag. 187.

Digitized by Google

und für die Rolle A:

$$T - t = F:$$
$$F = t\,(e^{f\alpha} - 1).$$

Nach Formel (31) ist aber $T - t = P$, d. h. es muß der kleinere von beiden Werthen F und F_1 mindestens gleich der zu übertragenden Umfangskraft P sein, wenn ein Gleiten des Riemens auf einer der Rollen vermieden werden soll.

Anmerkung. Wir setzen hier voraus, daß die Reibungscoefficienten f bei beiden Rollen dieselbe Größe haben, d. h., daß das Material beider Scheiben dasselbe ist. Sollte es einmal nicht der Fall sein, so muß man die Werthe von F und F_1 mit Berücksichtigung dieses Umstandes vergleichen und den kleineren in die Rechnung einführen.

Die obigen Werthe von F und F_1 unterscheiden sich lediglich durch den Exponenten $f\alpha$ und $f\alpha_1$; es wird derjenige Werth demnach der kleinere sein, der das kleinere α enthält, und das ist bei offenen Riemen stets der Werth, welcher der kleineren Scheibe entspricht. Bei gleich großen Scheiben mit offenem Riemen ist $\alpha = \alpha_1 = \pi$, und bei geschränkten Riemen sind jederzeit die Winkel resp. Bögen α und α_1 einander gleich, wie man aus der paarweisen Aehnlichkeit der durch die Centrale, Tangenten und zugehörigen Radien gebildeten Dreiecke leicht beweisen kann.

Wir verfahren also in jedem Falle richtig, wenn wir die Rechnung für die kleinere der Scheiben machen, was auch hier stets geschehen soll.

Wir setzen nun theoretisch:

$$P = t\,(e^{f\alpha_1} - 1),$$

finden daraus die Spannung im geführten Riemenstücke:

$$t = P \cdot \frac{1}{e^{f\alpha_1} - 1} \quad \ldots\ (32)$$

und setzen diesen Werth in die Formel für $T = t \cdot e^{f\alpha_1}$ ein. So ergiebt sich die Spannung im führenden Riemenstücke:

$$T = P \cdot \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha_1} - 1} \quad \ldots\ (33).$$

Die Größen f und α_1 sind als Exponenten sehr unbequem, und man drückt $e^{f\alpha_1}$ lieber, und für die meisten Rechnungen hinreichend genau, als die ersten Glieder einer Exponentialreihe*) von der Form:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

aus. Alsdann wird:

$$t = P \cdot \frac{1}{f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^2}{2}} \quad \ldots\ (32^a)$$

und:

$$T = P \cdot \frac{1 + f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^2}{2}}{f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^2}{2}} \quad \ldots\ (33^a).$$

Aus diesen Formeln ersieht man, daß die Riemenspannungen T und t um so kleiner ausfallen, je größer f und α_1 sind; man wird also immer suchen müssen, den Reibungscoefficienten und den vom Riemen umspannten Bogen möglichst groß zu machen.

*) Lübsen, Analysis 1868, pag. 78.

Digitized by Google

Der Reibungscoefficient f ist durch die Wahl der reibenden Stoffe bedingt, und diese ist allerdings hier ziemlich beschränkt, da man fast stets eiserne (selten hölzerne) Scheiben und fettige Leder-Riemen anwendet. Doch kann man z. B. vorübergehend die Reibung erhöhen, indem man zwischen Riemen und Scheibe etwas Colophonium einstreut.

Die betreffenden Reibungscoefficienten sind nach Morin:

$f = 0{,}47$ für gewöhnlich fette Riemen auf hölzernen Scheiben,
$f = 0{,}50$ „ neue Riemen auf hölzernen Scheiben,
$f = 0{,}28$ „ gewöhnlich fette Riemen auf abgedrehten Gußrollen,
$f = 0{,}38$ „ feuchte Riemen auf dergl.
$f = 0{,}50$ „ Hanfseile auf hölzernen Trommeln,
$f = 0{,}12$ „ sehr fette Riemen auf Gußrollen. —

Der Einfluß des Winkels α_1 ist auch in seltenen Fällen beliebig zu verändern. Im Allgemeinen muß man suchen, bei sehr verschiedenen Scheibendurchmessern die Entfernung der Wellen möglichst zu vergrößern oder, wenn das unstatthaft, muß man den Riemen schränken, damit α_1 groß werde.

Außerdem lehrt die Praxis, daß ein horizontaler oder wenig von der horizontalen Richtung abweichender Riemen unter denselben Umständen besser „zieht" als ein verticaler oder stark geneigter, was seine Begründung in dem Einflusse des Riemengewichtes und in dem durch das beim Wechseln der Spannungen T und t hervorgerufene Gleiten findet.

Anmerkung. Für genaue Rechnungen ist es nothwendig, daß man — besonders wenn es sich um sehr große, dicke Riemen handelt — auch den Einfluß der Riemensteifigkeit und die Zapfenreibung der Wellen berücksichtigt. Reuleaux (Constr. pag. 359) führt denselben folgendermaßen ein:

$$t = P \cdot \frac{1}{e^{f\alpha_1}(1-u)-(1+u)}$$

und

$$T = P \cdot \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha_1}(1-u)-(1+u)}$$

und setzt darin:

$$u = \frac{s\delta^2}{R_1} + \frac{f_1 d}{2R_1},$$

wo unter gewöhnlichen Verhältnissen:

$$(1+u) = 1{,}02 \text{ und } (1-u) = 0{,}98 \text{ wird.}$$

Wir begnügen uns damit, später an einem numerischen Beispiele zu zeigen, wie sich diese Bewegungswiderstände im Vergleich zu der zu übertragenden Kraft P gestalten. —

2) Der Riemenquerschnitt.

Der Querschnitt der Riemen ist, abgesehen von den für kleinere Drehbänke, Bohrmaschinen ꝛc. mitunter verwendeten gedrehten Riemen, stets rechteckig; die Breite desselben wollen wir bezeichnen mit b, die Dicke mit δ.

Fig. 175 stellt die Querschnitte eines einfachen und eines doppelten Riemens dar.

Der Riemen eines Riementriebes wird im Wesentlichen auf Zugfestigkeit in Anspruch genommen, und die größte Kraft, unter deren Zugwirkung ein Riemen zu stehen kommt, ist theoretisch die Spannung T im führenden Riemenstücke.

Digitized by Google

Die mittlere Anspannung des Riemens im Ruhezustande ist $\left(\frac{T+t}{2}\right)$; dieselbe läßt sich in Wirklichkeit beim Auflegen und Anspannen des Riemens fast gar nicht bestimmen und demnach auch nicht den verlangten Riemenspannungen T und t, d. h. der zu übertragenden Kraft P, entsprechend ausführen.

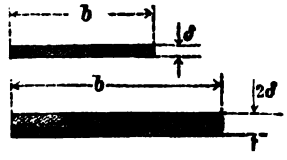


Fig. 175.

Zudem müssen neue Riemen wiederholt und immer etwas stärker angespannt werden, da sie sich im Anfange stark und bleibend ausdehnen. Auch ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß unsere Formeln (32 und 33) nur für den Beharrungszustand des Riementriebes, also nur bei gleichförmiger Bewegung gelten; es findet aber nicht selten eine Beschleunigung der Bewegung, also auch eine stärkere Inanspruchnahme des Riemens statt.

Aus diesen Gründen ist es nothwendig, daß man anstatt der theoretischen Spannung T eine etwas größere, praktische (T) für die Berechnung des Riemens einführt.

Wir setzen mindestens:

$$T = 1{,}1\ T$$

und haben dann nach Formel (1) pag. 17, Bd. II:

$$1{,}1\ T = b\delta\ .\ s.$$

Das giebt für die Riemenbreite:

$$b = \frac{1{,}1\,T}{\delta\ .\ s} \quad \ldots \quad (34).$$

Die pro $\square^{mm}$ des Querschnittes zulässige Spannung s ist für Kuhleder nach Tab. I, pag. 14 u. 15 zu nehmen: $s = 0{,}2^k$; d. i. ungefähr $^1/_8$ der Spannung an der Elasticitätsgrenze und $^1/_{15}$ der Bruchbelastung.

Bei sehr breiten Riemen geht man deshalb noch etwas höher und gestattet $s = 0{,}25$; für doppelte Riemen hingegen nimmt man wegen der stärkeren Biegungsbeanspruchung nicht selten nur $s = 0{,}16$.

Die Dicke der einfachen Riemen variirt im Allgemeinen zwischen $\delta = 3^{mm}$ und $\delta = 7^{mm}$, ist aber meistens nur $\delta = 4 \div 5^{mm}$. Man verwendet am vortheilhaftesten — besonders auch zu Doppelriemen — die stärkeren Lederſorten, den sogen. „Kern" einer Rindshaut.

Endlich hat auch die Breite der Riemen eine durch die organische Beschaffenheit des Rohstoffes bedingte obere Grenze. Man kann nämlich die Riemen nicht gut breiter als etwa 300^{mm} herstellen und muß, wenn ein Riementrieb, für den ein einfacher projectirt war, größere Breite verlangt, einen doppelten Riemen anwenden oder, falls schon der doppelte Riemen der Rechnung nach breiter als 300^{mm} ausfallen sollte, zwei gleiche Riemenläufe neben einander anordnen, oder überhaupt von Riementrieb absehen und zu Zahnrädertransmission oder — bei genügend großen Axenentfernungen — zu Drahtseiltrieb seine Zuflucht nehmen.

3) Die Größe der Riemenscheiben.

In Frml. (33) ist T direct proportional der Umfangskraft P; diese aber ist $\left(P = \frac{M}{R_1}\right)$ umgekehrt proportional dem Scheibenhalbmesser R_1. Wenn man also

Digitized by Google

der Reihe nach P aus dem zu übertragenden Momente M, danach T aus Formel (33) und hierauf b aus Formel (34) bestimmt, so ersieht man, daß die Riemenbreite umgekehrt proportional ist dem Halbmesser der Riemenscheibe. Dieser Umstand ist wohl zu beachten und da, wo die Wahl der Riemenscheibengröße freigegeben ist, zu berücksichtigen.

Man wird nämlich aus praktischen Gründen, besonders rücksichtlich des Kostenpunktes, die Scheiben möglichst klein zu machen suchen. Allein, hier setzt die Rücksicht auf die Ausführbarkeit und Wirkungsfähigkeit des Riementriebes eine Grenze. Je kleiner nämlich die Riemenscheiben sind, desto größer muß die Breite des Riemens oder (bei gleicher Riemenbreite) die Anspannung $\left(\frac{T+t}{2}\right)$ gemacht werden, und hieraus resultirt der bekannte Effektverlust durch Zapfenreibung. Aber auch der Seilbiegungswiderstand ist offenbar um so größer, je kleiner der Rollenhalbmesser ist, und man thut daher gut, die Riemenscheiben womöglich nicht kleiner zu nehmen, als es mit Rücksicht auf die genannten Umstände zulässig ist.

Nach Reuleaux giebt man den Riemenscheiben folgende durch die Riemensteifigkeit bedingten Größen:

$$\frac{b}{R_1} \leqq \frac{0{,}7}{1+\frac{R_1}{R}} \text{ oder } \frac{R R_1}{R_1+R} \leqq 1{,}43 \cdot b,$$

wobei man vermeidet, daß die durch Riemensteifigkeit und Zapfenreibung hervorgerufenen Effectverluste eine unverhältnißmäßige Größe erreichen. —

Ehe wir nun zum praktischen Theile unserer Abhandlung verschreiten, wollen wir den Gebrauch der entwickelten Formeln an einigen Beispielen einüben und auf diese Weise eine Vorstellung von den Verhältnissen und der Wirkungsweise des Riementriebes zu gewinnen suchen.

Beispiele.

1. Aufgabe. Zwei parallele Wellen, die um eine Axenentfernung $a = 5^m$ von einander abstehen, und von denen die treibende in der Minute $n = 72$ Umdrehungen macht, sind durch einen Riementrieb mit einander so zu verbinden, daß die getriebene Welle $n_1 = 90$ Tr. p. m. macht und dabei $N = 12$ Pferdest. überträgt. Wegen der geringen Entfernung der treibenden Welle von einer ihr parallelen Wand kann man beispielsweise den Halbmesser der treibenden Scheibe nicht größer als $R = 500^{mm}$ nehmen. Es ist nun zu ermitteln:

a) Die Spannungen T, t und $\frac{T+t}{2}$ des Riemens,

b) die Breite b desselben bei offenem und bei geschränktem Riemen.

c) Wie stellt sich das Verhältniß $\frac{b}{R_1}$?

Auflösung a). Da uns hier die zu übertragende Kraft in Form von Arbeit (N und n_1) gegeben ist, so berechnen wir erst nach Formel (III) pag. 135 die Größe P:

$$PR_1 = 716200\frac{N}{n_1}.$$

Digitized by Google

Es ist: $$\frac{R}{R_1} = \frac{n_1}{n}$$

und der Halbmesser der getriebenen Scheibe:

$$R_1 = \frac{500 \,.\, 72}{90} = 400^{mm}.$$

$$P = 716200 \,.\, \frac{12}{90 \,.\, 400} = 238{,}7 \sim = 240^{k}.$$

Machen wir zuerst einmal die Berechnung der Riemenspannungen nach den genauen Formeln (32 und 33), so empfiehlt es sich, zum Voraus die Potenz $e^{f\alpha_1}$ numerisch zu bestimmen.

Der Reibungscoefficient f ist, wenn wir abgedrehte gußeiserne Scheiben und wenig gefettete Riemen voraussetzen, nach pag. 227: $f = 0{,}28$. Wir wollen aber der Sicherheit wegen etwas heruntergehen und, wie meistens geschieht, nur $f = 0{,}25$ nehmen.

Der Bogen α_1, in welchem der Riemen die kleinere Rolle umschließt, ist bei der ziemlich beträchtlichen Wellen-Entfernung (a) und dem verhältnißmäßig geringen Unterschiede zwischen R und R_1 nicht viel kleiner als die halbe Peripherie, und wir können denselben zu $\alpha_1 = 0{,}9\,\pi = 0{,}9 \,.\, 3{,}1416 = 2{,}8274$ calculiren.

Dann haben wir:

$$e^{f\alpha_1} = 2{,}71828^{0{,}25 \,.\, 2{,}8274}.$$

Wenn man das logarithmisch ausrechnet, so wird:

$$\log e^{f\alpha_1} = f \,.\, \alpha_1 \log e = f \,.\, \alpha_1 \,.\, \log 2{,}71828$$
$$= 0{,}25 \,.\, 2{,}8274 \,.\, \log 2{,}71828 = 0{,}707 \,.\, 0{,}4342942$$
$$= 0{,}3070460$$
$$e^{f\alpha_1} = 2{,}0289.$$

Nun ist zuerst nach Frml. (32) die Spannung im geführten Riemenstücke:

$$t = P \,.\, \frac{1}{e^{f\alpha_1} - 1} = 240 \,.\, \frac{1}{1{,}0289}$$
$$t = 240 \,.\, 0{,}97 = 232{,}8^{k}.$$

Die Spannung im führenden Riemenstücke ist nach Frml. (33):

$$T = P \,.\, \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha_1} - 1} = 240 \,.\, \frac{2{,}0289}{1{,}0289}$$
$$T = 240 \,.\, 1{,}97 = 472{,}8^{k}.$$

Probe. Nach Frml. (31) ist:

$$P = T - t.$$
$$P = 472{,}8 - 232{,}8$$
$$P = 240.$$

Die Kraft, mit welcher der Riemen beim Auflegen angespannt werden muß, ist demnach ungefähr mindestens:

$$\frac{T + t}{2} = 352{,}8^{k};$$

sie wird in Wirklichkeit immer noch etwas größer genommen werden müssen, damit man sicher ist, daß der Riemen die verlangte Kraft $P = 240^{k}$ auch überträgt ohne zu gleiten. —

Digitized by Google

Die Annäherungswerthe (32a und 33a) geben folgende Resultate. Es ist:

$$f\alpha_1 = 0{,}707;\ \frac{f^2\alpha_1^{\,2}}{2} = 0{,}25;\ \frac{f^3\alpha_1^{\,3}}{6} = 0{,}0589.$$

$$t = P \cdot \frac{1}{f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^{\,2}}{2}} = 240 \cdot \frac{1}{0{,}707 + 0{,}25}$$

$$t = 240 \cdot 1{,}045 = 250{,}8^k.$$

Ferner:

$$T = P \cdot \frac{1 + f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^{\,2}}{2}}{f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^{\,2}}{2}} = 240 \cdot \frac{1 + 0{,}707 + 0{,}25}{0{,}707 + 0{,}25}$$

$$T = 240 \cdot 2{,}045 = 490{,}8^k.$$

Diese Werthe weichen um 18^k gegen die genauen ab. Da sie um so viel größer sind als jene, so würde man, wenn man hiermit rechnete, zwar etwas zu große Riemenbreite bekommen, man würde aber doch sicher sein, daß der Riemen greift.

Benutzt man die Exponentialreihe bis zum 4. Gliede, so wird z. B.:

$$T = P \cdot \frac{1 + f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^{\,2}}{2} + \frac{f^3\alpha_1^{\,3}}{6}}{f\alpha_1 + \frac{f^2\alpha_1^{\,2}}{2} + \frac{f^3\alpha_1^{\,3}}{6}} = 240 \cdot \frac{1 + 0{,}707 + 0{,}25 + 0{,}0589}{0{,}707 + 0{,}25 + 0{,}0589}$$

$$T = 240 \cdot 1{,}98 = 474{,}2^k,$$

und man nähert sich damit schon sehr dem genauen Werthe.

Wir nehmen hier der Einfachheit wegen:

$$T = 2P = 480^k$$

und bestimmen nun dafür die Riemenbreite.

Auflösung b). Wir benützen Frml. (34) und sehen erst zu, ob wir mit einem einfachen Riemen auskommen. Es ist:

$$b = \frac{1{,}1 \cdot T}{\delta \cdot s},$$

und wenn wir die Dicke des Riemens zu $\delta = 4{,}5^{mm}$ und die zulässige Inanspruchnahme zu $s = 0{,}2^k$ pr. $\square^{mm}$ voraussetzen, so ist:

$$b = \frac{1{,}1 \cdot 480}{4{,}5 \cdot 0{,}2} = \frac{528}{0{,}9} = 587^{mm}.$$

So breit läßt sich für gewöhnlich ein Riemen nicht herstellen, und wir müssen daher einen Doppelriemen anwenden.

Dazu nehmen wir aber 5^{mm} starkes Leder und gestatten $s = 0{,}18^k$ pr. $\square^{mm}$. Alsdann wird:

$$b = \frac{528}{2 \cdot 5 \cdot 0{,}18} = 294 \sim = 300^{mm}.$$

Das ist eine Breite, die schon selten vorkommt, und es wird sich fragen, ob man, da die Drehrichtung der getriebenen Welle einmal gleichgiltig sein soll, nicht wenigstens den Riemen geschränkt verwendet? Für diesen Fall wollen wir auch die Größe des Riemenbogens auf der kleinen Scheibe etwas genauer bestimmen.

Gesetzt, es seien in umstehender Figur A und B die beiden Riemenscheiben mit den Halbmessern R und R_1 und der Axenentfernung a. Ziehen wir darin die gemeinschaftliche Tangente DD_1 und die zugehörigen Radien DC und D_1C_1, so sind die Dreiecke CDS und C_1D_1S einander ähnlich. Es verhält sich demnach

Digitized by Google

$$R : R_1 = a - x : x$$
$$R + R_1 : R_1 = a - x + x : x,$$

und daraus ist:

$$x = \frac{R_1 \cdot a}{R + R_1}.$$

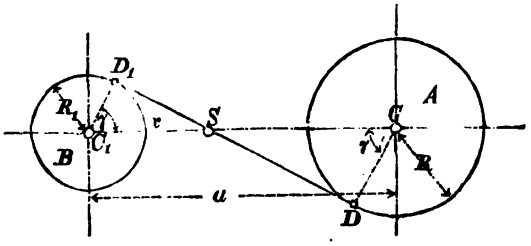


Fig. 176.

Setzen wir nun hier unsere Zahlenwerthe ein, so erhalten wir:

$$x = \frac{400 \cdot 5000}{900} = 2222{,}2^{mm}.$$

Nun können wir in dem rechtwinkligen Dreiecke $C_1 D_1 S$ den Winkel $D_1 C_1 S = \gamma$ bestimmen:

$$\cos \gamma = \frac{R_1}{x} = \frac{400}{2222{,}2}$$
$$\log \cos \gamma = \log 400 - \log 2222{,}2$$
$$2{,}6020600$$
$$- 3{,}3467831$$
$$9{,}2552769 - 10$$
$$\gamma = 79^0 38'' \sim = 80^0.$$

Nunmehr finden wir sofort den vom Riemen umschlossenen Bogen zu:

$$\alpha_1{}^0 = 360 - 2 \cdot \gamma = 200^0$$

und in Bogenmaß:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{360} \alpha_1{}^0 = 0{,}01745 \cdot 200$$
$$\alpha_1 = 3{,}49.$$

Den Reibungscoefficient belassen wir zu: $f = 0{,}25$. Alsdann ist der Exponent

$$f\alpha_1 = 0{,}25 \cdot 3{,}49 = 0{,}8725.$$
$$\log e^{f\alpha_1} = f\alpha_1 \log e = 0{,}8725 \cdot 0{,}43429$$
$$e^{f\alpha_1} = 2{,}3928.$$

Dann finden wir:

$$T = P \cdot \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha_1} - 1} = 240 \cdot \frac{2{,}3928}{1{,}3928}$$
$$= 240 \cdot 1{,}718 = 412{,}3^k.$$

Es ist also hier beim geschränkten Riemen die größere Spannung um $60{,}5^k$ geringer als beim offenen.

Im geführten Riementheile wird sein:

$$t = T - P = 412{,}3 - 240 = 172{,}3^k,$$

und die mittlere Spannung:

Digitized by Google

$$\frac{T+t}{2} = 292{,}3^{k}.$$

Nun finden wir auch eine bedeutend geringere Riemenbreite; für den Doppelriemen nämlich:

$$b = \frac{1{,}1\,T}{2\,.\,\delta\,.\,s} = \frac{453{,}5}{2\,.\,5\,.\,0{,}18} = 252^{mm}.$$

Auflösung c). In unserem vorliegenden Falle ist:

$$\frac{b}{R_1} = \frac{300}{400} = 0{,}75.$$

Wenn aber für die Wahl von R und R_1 nicht eine Beschränkung vorläge, so würde man, um weniger Effectverlust zu haben, die Riemenscheiben lieber größer nehmen. Nach der Formel

$$\frac{b}{R_1} \leqq \frac{0{,}7}{1+\frac{R_1}{R}}$$

erhalten wir:

$$R_1 \geqq 1{,}43\,.\,b\left(1+\frac{R_1}{R}\right)$$
$$\geqq 1{,}43\,.\,300\,.\,1{,}8 \geqq 772^{mm}$$
$$R_1 = 800^{mm} \text{ und } R = 1000^{mm},$$

und das giebt:

$$\frac{b}{R_1} = 0{,}375. -$$

2. Aufgabe. Für zwei in einer Entfernung $a = 3^{m}$ gelegene parallele Transmissionswellen ist ein offener Riementrieb anzuordnen. Die treibende Scheibe ist bestimmt zu $R = 360^{mm}$ Durchmesser und die getriebene zu $R_1 = 420^{mm}$; erstere macht in der Minute $n = 120$ Umdrehungen und soll $N = 3$ Pferdestärken auf die andere übertragen.

a) Wie groß sind die Riemenspannungen und die dadurch bedingte Riemenbreite?

b) Wie groß ist das Verhältniß $\frac{b}{R}$?

c) Wie groß ist der Effectverlust: 1) in Folge der Riemensteifigkeit, 2) in Folge der Zapfenreibung der Wellen?

Auflösung a). Zur Größe des Winkels, welcher zu dem von dem Seile umspannten Bogen an der kleineren Scheibe gehört, gelangen wir auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Beispiele.

Bezeichnen wir hier den halben Winkel von α mit γ und denken wir uns die Centrale sowie die Riemenrichtungen bis zu dem hier außerhalb, auf der Seite der kleineren Rolle liegenden gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte verlängert, so bildet der Radius R (als anliegende Kathete) durch die Entfernung x des Aehnlichkeitspunktes vom Centrum der kleinen Rolle (als Hypotenuse) den Cosinus des Winkels γ:

$$\frac{R}{x} = \cos\gamma = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Im vorliegenden Falle ist:

Digitized by Google

$$x = \frac{aR}{R_1 - R}$$

$$\frac{R}{x} = \frac{R_1 - R}{a} = \cos\gamma.$$

Wir erhalten also:

$$\cos\gamma = \frac{420 - 360}{3000} = \frac{1}{50}$$

$$\log\cos\gamma = \log 1 - \log 50$$
$$= 10{,}0000000 - 10$$
$$- 1{,}6989700$$
$$8{,}3010300 - 10$$

$$\gamma = 88^\circ 51' 25'' \text{ und } \alpha = 2\gamma = 177^\circ 42' 50''$$

oder:

$$\alpha = 177{,}714^\circ.$$

Das giebt in Bogenmaß:

$$\alpha = 0{,}01745\alpha^\circ = 0{,}01745 \cdot 177{,}714$$
$$\alpha = 3{,}1.$$

Nehmen wir den Coefficienten der Seilreibung an zu $f = 0{,}258$, so wird der Exponent:

$$f\alpha = 0{,}258 \cdot 3{,}1 = 0{,}8,$$

daher:

$$e^{f\alpha} = 2{,}71828^{0{,}8}$$
$$\log e^{f\alpha} = f\alpha \cdot \log e = 0{,}8 \cdot 0{,}4342942$$
$$= 0{,}3474353$$
$$e^{f\alpha} = 2{,}2255.$$

Die Spannung im geführten Riemenstücke ist nun:

$$t = P \cdot \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} = P \frac{1}{1{,}2255} = P \quad 0{,}816.$$

Die Umfangskraft P erhalten wir wieder aus:

$$P = 716200 \frac{N}{nR} = 716200 \frac{3}{120 \cdot 360}$$

$$P = 49{,}7 \backsim = 50^k.$$

Demnach ist:

$$t = 0{,}816 \cdot 50 = 40{,}8^k.$$

Die größere Spannung:

$$T = P \cdot \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = P + t$$

$$T = 50 \cdot 1{,}816 = 50 + 40{,}8$$

$$T = 90{,}8^k.$$

Die mittlere Spannung:

$$\frac{T + t}{2} = \frac{40{,}8 + 90{,}8}{2} = 65{,}8^k$$

und die für die Berechnung der Riemenbreite einzuführende Spannung

$$\mathfrak{T} = 1{,}1 \cdot T = 100^k.$$

Wir erhalten also wieder wie im vorigen Beispiele für die größere Riemenspannung ungefähr das Doppelte der Umfangskraft.

Digitized by Google

Die Riemenbreite ist hier aber, wenn wir $\delta = 4^{mm}$ und $s = 0{,}2$ setzen:

$$b = \frac{1{,}1\,T}{\delta s} = \frac{100}{4 \cdot 0{,}2} = \frac{1000}{8} = 125^{mm}.$$

und für $\delta = 5^{mm}$:

$$b = \frac{100}{1} = 100^{mm}.$$

Auflösung b). Das Verhältniß der Riemenbreite zum Halbmesser der kleineren Riemenscheibe ist im ersten Falle:

$$\frac{b}{R} = \frac{125}{360};\ \text{nahezu} = 0{,}35.$$

Umgekehrt liefert:

$$R \gtrless 1{,}43 \cdot b \left(1 + \frac{R}{R_1}\right)$$
$$\gtrless 1{,}43 \cdot 125 \cdot 1{,}857 = 332^{mm}.$$

Die Riemenscheiben sind also hiernach den Verhältnissen wohl entsprechend.

Auflösung c). Wenn gleich die zum Riemenbetrieb verwendeten Zugorgane gegenüber anderen materiellen Körpern verhältnißmäßig viel Biegsamkeit besitzen, so ist doch nicht zu verkennen, daß sie beim Aendern ihrer Form, beim Umbiegen nach dem Umfange der Scheiben, einen gewissen Widerstand darbieten. Das Gleiche findet statt, sobald der Riemen von der Rolle abläuft, wenn er also von dem gebogenen Zustande wieder in den geradlinigen übergeht; denn die fraglichen Zugorgane sind andererseits wenig elastisch und setzen deshalb auch dem Aufbiegen einen Widerstand entgegen.

1) Für ein über eine Rolle vom Halbmesser R gehendes Seil von der Dicke δ_0 fand Eytelwein die Größe der Kraft P, welche eine am anderen Ende wirkende Kraft Q und den entstehenden Seilbiegungswiderstand überwindet, durch Versuche den allgemeinen Ausdruck:

$$P = \mu \cdot \frac{{\delta_0}^2}{2R} \cdot Q.$$

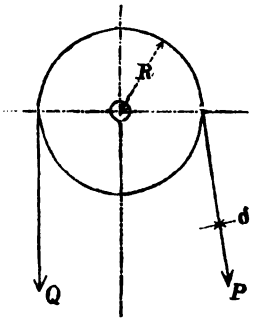


Fig. 177.

Diese Formel kann ohne Bedenken auf Riemen angewendet werden, sofern man nur geeignete Werthe für den Coefficienten μ einführt. Es ist nämlich

für Seile: $\mu = 0{,}026$
„ einfache Riemen: $\mu = 0{,}018$
„ doppelte „ : $\mu = 0{,}02$.

Setzen wir ferner anstatt des kreisförmigen Seilquerschnittes den rechteckigen Riemenquerschnitt:

$$\frac{\pi}{4} {\delta_0}^2 = b\,\delta,$$

also für:

$${\delta_0}^2 = \frac{4}{\pi} b\,\delta,$$

so gestaltet sich der Seilbiegungswiderstand in unserem Falle für die eine Scheibe zu:

$$S_1 = \mu \cdot \frac{2}{\pi} \frac{b\delta}{R} \cdot t + S_2$$

Digitized by Google

und für die andere zu:

$$S_2 = \mu \frac{2}{\pi} \frac{b\delta}{R_1} T + S_1.$$

In den normalen Fällen der Praxis sind die Größen von S_1 und S_2 nicht sehr bedeutend im Vergleich zu T und t; man kann deshalb ihren gegenseitigen Einfluß außer Betracht lassen und kann ebenso anstatt einzeln T und t jedesmal die Spannung $\frac{T+t}{2}$ einführen. Dann wird:

$$S_1 = \mu \cdot \frac{2}{\pi} \frac{b\delta}{R} \cdot \frac{T+t}{2} \text{ und } S_2 = \mu \frac{2}{\pi} \frac{b\delta}{R_1} \cdot \frac{T+t}{2}$$

und der gesammte Seilbiegungswiderstand:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\mu}{\pi} b\delta (T+t) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \ldots . (1).$$

Setzen wir die bezgl. Zahlenwerthe ein:

$$S = \frac{0{,}018}{3{,}1416} \cdot 125 \cdot 4 \cdot 132 \left(\frac{1}{360} + \frac{1}{420}\right)$$

$$S = 0{,}00573 \cdot 66000 \cdot 0{,}005158.$$

$$S = 1{,}947^k \sim = 2^k.$$

Es ist also in Wirklichkeit die Anspannung des Riemens um circa 2^k größer, als wir mittelst Frml. (33) berechnen, oder es kann streng genommen bei einer Anspannung $\frac{T+t}{2}$ nicht ganz soviel Umfangskraft P übertragen werden, als wir nach unseren theoretischen Formeln finden. Hiernach erscheint es gerechtfertigt, daß man bei der Berechnung der Riemenbreite die Spannung T um 10% größer einführt als theoretisch nothwendig ist (s. pag. 228).

2) Außer der Seilsteifigkeit bietet auch die Reibung der Wellen in den Zapfenlagern einen Widerstand dar, wodurch sich wiederum die zum Betriebe erforderliche bewegende Kraft in Wirklichkeit etwas höher stellt, als theoretisch

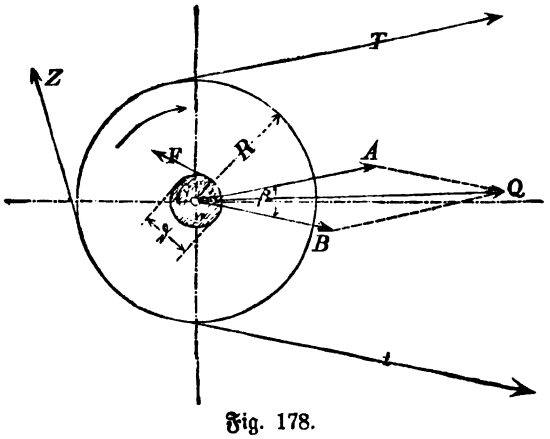


Fig. 178.

berechnet wird. Es kommt hierbei nicht nur das Gewicht der Transmissionstheile in Frage, sondern in höherem Grade der durch die Riemenspannung erzeugte Zapfendruck.

Wir beschränken unsere vorliegenden Ermittelungen auf den Einfluß der durch die Riemenspannungen allein hervorgerufenen Reibungswiderstände und sehen ab

Digitized by Google

von dem Einflusse des Eigengewichtes, da dieses je nach der Anordnung sehr verschiedene Wirkungen und Aenderungen hervorbringt.

Haben wir in Fig. 178 eine Rolle mit dem Halbmesser R und darauf einen Riemen mit den Spannungen T und t, deren Richtungen einen Winkel β einschließen, so ist die als Zapfendruck wirkende Resultante aus dem Kräfteparallelogramm CAQB nach der Mechanik:

$$Q = \sqrt{T^2 + t^2 + 2Tt \cdot \cos\beta}.$$

Der Winkel β ist meistens sehr klein und kann daher $\beta =$ Null angenommen werden, was zugleich den für die vorliegende Betrachtung ungünstigsten Fall enthält. Alsdann ist aber $\cos\beta = 1$ und:

$$Q = T + t.$$

Die Größe der Zapfenreibung ist, wie die gleitende Reibung überhaupt, allgemein gleich dem Normaldrucke auf den Zapfen mal den Reibungscoefficienten. Ist dieser $= f$, so haben wir also:

$$F = Qf.$$

Die Zapfenreibung F wirkt tangential am Umfange des Wellenzapfens, hat also einen Hebelarm $\frac{d}{2}$; die bewegende Kraft hingegen wirkt am Umfange der Riemenscheibe, also in einem Normalabstande $= R$ vom Drehpunkte. Die Größe dieser auf die Ueberwindung der Zapfenreibung verwendeten Kraft sei bei der Rolle R gleich Z_1, bei der Rolle R_1 gleich Z_2. Wir haben demnach die statische Gleichung:

$$F \cdot \frac{d}{2} = Z_1 R$$

oder:

$$Q \cdot f \frac{d}{2} = Z_1 R \text{ und } Qf \frac{d_1}{2} = Z_2 R_1.$$

Hieraus finden wir die gesammte Kraft Z, welche zur Ueberwindung der der Bewegung sich entgegenstellenden Zapfenreibung nöthig ist:

$$Z = Z_1 + Z_2 = f\left(\frac{d}{R} + \frac{d_1}{R_1}\right)\frac{T+t}{2} \quad \ldots \text{(II)}.$$

Der Reibungscoefficient für Reibung eines schmiedeisernen Zapfens in Bronzelager ist

bei ununterbrochener Oelung: $f = 0{,}06$

„ gewöhnl. Unterhaltung derselben: $f = 0{,}07$ bis $0{,}08$.

Wir setzen ferner voraus, daß die Zapfen der Transmissionswellen nicht abgesetzt sind, und daß auch die betreffenden Wellen nur die Arbeit $\frac{N}{n} = \frac{3}{120}$ zu übertragen haben. Die Durchmesser derselben sind dann nach Frml. (48b) pag. 137:

$$d = 120\sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 120\sqrt[4]{\frac{3}{120}} = 48^{mm}$$

und:

$$d_1 = 120 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{103}} = 49{,}4^{mm}.$$

Setzen wir da rund: $d = d_1 = 50^{mm}$, so ergiebt Frml. (II) numerisch:

$$Z = 0{,}06\left(\frac{50}{360} + \frac{50}{420}\right) \cdot 66$$

$$= 0{,}06 \cdot 0{,}2578 \cdot 66 = 1{,}02^{k}.$$

Digitized by Google

Die Umfangskraft P, multiplicirt mit der secundlichen Geschwindigkeit v ihres Angriffspunktes, giebt die Arbeitsgröße P . v. Der Widerstand S der Seilsteifigkeit und derjenige Z der Zapfenreibung wirken an demselben Kreisumfange wie P, und ihre Angriffspunkte haben daher auch dieselbe Geschwindigkeit v. Es ist demnach S . v der Effectverlust, welchen die Seilsteifigkeit erzeugt und Z . v der durch Zapfenreibung hervorgerufene Effectverlust. Wir drücken denselben jedoch der leichteren Uebersicht halber besser im Verhältniß zur Nutzarbeit P . v, und zwar in Procenten derselben, aus. Es ist nämlich:

$$1)\ \frac{Sv}{Pv} = \frac{S}{P} = \frac{2}{50} = 0{,}04 = 4\%$$

$$2)\ \frac{Zv}{Pv} = \frac{Z}{P} = \frac{1{,}02}{50} = 0{,}0204 = 2\%.$$

In Summa würden also die schädlichen Widerstände bei der besprochenen Anlage 6% von der Nutzleistung betragen. Als Mittelwerth kann man jedoch bei Transmissionen immerhin 8, und in sehr ungünstigen Verhältnissen 10% annehmen, denn es stellt sich bei dem praktischen Betriebe noch manches Hinderniß heraus, was gar nicht vorauszusehen ist.

So dürfte auch die Voraussetzung selten zutreffen, daß die Wellen nicht stärker sind, als die durch den fraglichen Riementrieb zu übertragende Kraft allein fordert. Meistens finden doch Abzweigungen von stärkeren Transmissionswellen statt, und dann hat auch, wenigstens die eine Welle, größeren Durchmesser.

Befänden sich z. B. in der treibenden Welle vor der Riemenscheibe unseres Riementriebes noch 30 Pferdestärken, so würde der Durchmesser derselben sein:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 120 \sqrt[4]{\frac{30}{120}} = 120 \quad 0{,}707 = 84{,}84 \backsim = 85^{mm}.$$

Alsdann wäre aber, wenn wir außerdem nur für gewöhnliche Unterhaltung der Oelung sorgen:

$$Z = 0{,}075 \left(\frac{85}{360} + \frac{50}{420}\right) . 66$$
$$= 0{,}075 . 0{,}354 . 66 = 1{,}75^{k},$$

Dann beträgt der Effectverlust schon:

$$\frac{S+Z}{P} = 0{,}04 + 0{,}035 = 0{,}075$$

oder $7\frac{1}{2}\%$. —

3. Aufgabe. Wie groß ist die Maximal-Arbeitsstärke, ausgedrückt in Pferdestärken (N_m), welche durch einen Doppel-Riemen (offen) von der Maximalbreite $b = 300^{mm}$ noch übertragen werden kann, wenn angenommen wird, daß die Halbmesser der beiden Riemenscheiben einander gleich sind, und am Umfange der Riemenscheiben eine Maximalgeschwindigkeit $v = 12{,}5^{m}$ pr. sec. statt hat? Wie groß sind außerdem dann die Durchmesser der Riemenscheiben zu machen?

Auflösung a). Wenn $R = R_1$ ist, so ist beim offenen Riemen der vom Riemen umschlossene Bogen am Riemenscheibenumfange: $\alpha = \alpha_1 = \pi$.

Nehmen wir ferner den Reibungscoefficient zu $f = 0{,}28$ an, so wird:

$$\log e^{f\alpha} = 0{,}28 . 3{,}1416 . \log e = 0{,}88 . \log 2{,}71828$$
$$\log e^{f\alpha} = 0{,}3821788$$
$$e^{f\alpha} = 2{,}4.$$

Digitized by Google

Alsdann ist:

$$\frac{e^{fa}}{e^{fa}-1} = \frac{2,4}{1,4} = 1,7,$$

und wir erhalten in diesem speciellem Falle:

$$T = 1,7\, P_m$$

und:

$$P_m = 0,6\, T.$$

Die Spannung T hängt hier nun von dem Riemenquerschnitte ab. Nehmen wir für einen Doppelriemen die Dicke $\delta = 2 \cdot 6 = 12^{mm}$ und die größte zulässige Inanspruchnahme: $s = 0,28$ pr. $\square^{mm}$, so ist:

$$P_m = 0,6 \cdot b\delta s = 0,6 \cdot 300 \cdot 12 \cdot 0,28 = 604,8,$$

oder ungefähr:

$$P_m = 600^k.$$

Die Arbeitsleistung ist nun:

$$Pv = 75N$$

oder:

$$N_m = \frac{P_m v}{75} = \frac{600 \cdot 12,5}{75} = 100\ HP.$$

Hiernach könnte man also im äußersten Falle den Riementrieb bis zu 100 Pferdestärken Arbeitsleistung benützen, vorausgesetzt, daß man eine Riemengeschwindigkeit von $12,5^m$ hat. Letzteres wird aber höchst selten der Fall sein, und deshalb der Riementrieb auch nicht in dieser Weise ausgenützt werden können.

Auflösung b). Für die Riemenscheiben erhielte man dann im Minimum die Halbmesser:

$$R = R_1 \geqq 1,43 \cdot b \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)$$
$$\geqq 1,43 \cdot 300 \cdot 2$$
$$\geqq 858^{mm},$$

würde aber noch besser thun, dieselben aus Rücksicht für die Steifigkeit zu 1^m anzunehmen, da der Riemen 12^{mm} stark ist.

4. Aufgabe. Eine Centrifugal-Pumpe, die zu ihrem Betriebe bei 800 minutlichen Umdrehungen des Flügelrades 6 Pferdestärken erfordert, soll durch eine Locomobile betrieben werden, deren Schwungscheibe 800^{mm} Halbmesser hat und 100 Umdrehungen in der Minute zurücklegt. Wie groß ist die Breite des Riemens zu machen?

Auflösung. Wir nehmen an, die Locomobile werde so aufgestellt, daß die Schwungradwelle derselben um $a = 4^m$ von der Kreiselwelle der Pumpe absteht; der Halbmesser R_1 der Riemenscheibe an der Pumpe ist:

$$R_1 = R\frac{n}{n_1} = 800 \cdot \frac{100}{800} = 100^{mm}.$$

Dann ist für den halben Riemen-Bogen an dieser Scheibe:

$$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \cos\gamma_1 = \frac{R - R_1}{a} = \frac{800 - 100}{4000} = \frac{7}{40}$$
$$= 0,175$$

Digitized by Google

und der Winkel $\alpha_1{}^0$ selbst nahezu 160^0.

$$\alpha_1 = 0{,}01745 \,.\, 160 = 2{,}792.$$

Gestatten wir ferner ausnahmsweise den Reibungscoefficient $f = 0{,}35$*), da wir voraussetzen, daß der Riemen fortwährend etwas mit Wasser benetzt werde, so wird:

$$f\alpha_1 = 2{,}792 \,.\, 0{,}35 = 0{,}977 \sim = 1.$$

Alsdann ist:

$$T = P \frac{e^{f\alpha_1}}{e^{f\alpha_1} - 1} = P \,.\, \frac{2{,}71828}{1{,}71828} = 1{,}6\ P.$$

$$P = 716200 \frac{N}{n_1 R_1} \text{ und } 1{,}1\ T = b\,\delta\,s.$$

Demnach:

$$b = 1{,}1 \,.\, 1{,}6 \,.\, 716200 \frac{N}{n_1 R_1 \delta s} = 1293512 \frac{N}{n_1 R_1 \delta s}.$$

Ist noch $\delta = 5^{mm}$ und $s = 0{,}2^{k}$ pr. $\square^{mm}$, so erhält man:

$$b = 1293512 \frac{N}{n_1 R_1}$$

$$b = 1293512 \frac{6}{800 \,.\, 100} = \frac{388{,}05}{4} = 97^{mm}$$

$$b = 100^{mm}. \text{ —}$$

Anmerkung. Für gewöhnliche Verhältnisse nimmt man auch allgemein:

$$b = 2000000 \frac{N}{n_1 R_1} \quad \ldots \ (35),$$

woraus:

$$N = n_1 \frac{b R_1}{2000000} \quad \ldots \ (36),$$

und es können diese Formeln ihrer Einfachheit wegen bei Aufstellung von Voranschlägen und oberflächlichen Calculationen recht gute Dienste leisten. — Hat man anstatt der flachen Lederriemen Hanfgurten oder Gummiriemen (mit Hanfeinlagen), so ist selbstverständlich in Frml. (34) für die zulässige Spannung (s) ein anderer Werth einzusetzen als für Lederriemen.

Gedrehte Riemen, Fig. 179, welche durch Zusammendrehen eines flachen,

Fig. 179.

schmalen, 2–3^{mm} dicken Lederriemens, meist von weißgarem Leder, gebildet werden, kommen nur bei ganz geringen Kräften zur Anwendung. Den äußeren Durchmesser d bemißt man entsprechend der Zugfestigkeit, und indem man den Querschnitt als vollen Kreis ansieht nach:

$$d = 3{,}6 \sqrt{P} \quad \ldots \ldots \ (37^a)$$

oder:

$$d = 3000 \sqrt{\frac{N}{n \,.\, R}} \quad \ldots \ (37^b).$$

*) Nach Weisbach ist für diesen Fall $f = 0{,}38$.

Digitized by Google

Die zu solchem Schnurtriebe gehörenden Rollen oder Räder bekommen dann am Umfange keilförmige Rillen, mit 30 bis 40° Flächenwinkel, eingedreht; die Schnüre klemmen sich darin fest und übertragen so die Bewegung ohne sehr beträchtliche Anspannung.

4) Riemenlänge und Stufenscheiben.

Wir haben unter den vorgängigen Nummern unterlassen, allgemeine Ausdrücke für die Länge des zu einem Riementriebe gehörigen Zugorganes abzuleiten, da man für gewöhnlich in der Praxis auf eine genaue Bestimmung der Riemen- resp. Seillängen keinen besondern Werth zu legen braucht. Handelt es sich um die Anfertigung oder Bestellung eines Treibriemens, so calculirt man dessen ungefähre Länge allerdings aus dem geometrischen Zusammenhange, nimmt dieselbe aber der Verbindung wegen um ein beträchtliches Stück größer, und hat also, da auch besonders neue Riemen wiederholt nachgespannt werden müssen, nicht nöthig, die geometrische Länge bis auf einen Centimeter genau zu bestimmen.

Anders ist dies bei sogenannten Stufenscheiben. Stufenscheiben oder Riemenscheiben-Conus nennt man die Räder oder Scheiben eines Riementriebes dann, wenn sie einzeln aus einer Combination von zwei oder mehreren auf einer gemeinschaftlichen Drehaxe nebeneinander angeordneten Riemenscheiben von verschiedenen Halbmessern bestehen. Jeder Conus wird in der Regel für sich in einem einzigen Stücke gefertigt, und zwei dergleichen kommen auf den bezügl. parallelen Wellen in eine solche relative Lage, daß immer je zwei correspondirende einfache Scheiben oder Stufen (bei Seilen und Schnüren — Rillen) mit ihren Mittelebenen in eine gemeinschaftliche, zur Axenebene normale, Ebene fallen, und daß einer größeren Scheibe des einen Conus eine kleinere des anderen entspricht (siehe Fig. 180, die untere Ansicht).

Verbindet man nun zwei solche Stufenscheiben durch ein endloses Zugorgan, so erhält man einen indirect-wirkenden Rädertrieb, dessen Uebersetzung in gewissen, durch die Verhältnisse und Anzahl der Stufen bedingten Grenzen mehrfach variirt werden kann. Es ist nun selbstverständlich, daß, damit das Verlegen des einzigen Treibriemens von einem Scheibenpaare auf ein anderes rasch ausgeführt werden kann, derselbe seiner Länge nach auf alle vorhandenen Scheibenpaare der beiden Conus passen muß, so zwar, daß er in jeder Lage die zur Arbeitsübertragung nöthige Anspannung erhält.

In theoretischer Beziehung liegt also hier die Aufgabe vor, den einzelnen Scheiben relativ solche Halbmesser zu geben, daß die verlangten Uebersetzungen erreicht werden und eine constante Riemenlänge für alle paarweis correspondirenden Scheiben verwendet werden kann.

Die absolute Größe der Scheiben bemißt man auch hier wieder nach der Intensität der zu übertragenden Kraft; die Uebersetzungsverhältnisse, Anzahl und Höhe der Stufen richten sich nach den Anforderungen der betr. Maschine, für welche die Stufenscheiben in die Transmission eingeschaltet werden.

Man kann natürlich die zwei zu einem Riementriebe gehörenden Conus unter einander mehr oder wenig verschieden machen, sodaß z. B. durch jedes Scheibenpaar eine Uebersetzung nach vorwärts entsteht, oder daß man mit einigen Scheiben-

Digitized by Google

paaren Vorwärts-, mit den übrigen gar keine oder Rückwärtsübersetzung erhält u. s. f.

Mit Rücksicht auf die Billigkeit der praktischen Ausführung macht man aber am einfachsten die zwei Conus gleich, ordnet sie aber so an, daß die kleinste Scheibe des einen mit der größten des andern Conus correspondirt (s. Fig. 180). Alsdann kann man also beide Stufenscheiben nach einem und demselben Modelle abgießen und erhält außerdem, wenn eine ungerade Anzahl Scheibenpaare vorhanden ist, jederzeit eines mit den gleichen Halbmessern R_0, also mit der Uebersetzung $\varphi = 1$. —

Die folgende geometrische Untersuchung des vorliegenden Gegenstandes wird uns zeigen, daß nicht in allen Fällen die zwei zusammenarbeitenden Conus ganz genau gleich gemacht werden dürfen. Die Abweichung, welche die constante Riemenlänge verlangt, ist aber in der Regel so gering, daß man dennoch ein und dasselbe Gußmodell für beide Conus verwenden kann, und man nur nöthig hat, beim Abdrehen auf die Unterschiede Rücksicht zu nehmen.

Die Höhe der Stufen, also die Unterschiede der einzelnen Scheibenhalbhalbmesser eines Conus macht man gewöhnlich unter einander gleich groß. —

Die meiste Verwendung finden Stufenscheiben in mechanischen Werkstätten, zum Betriebe der einzelnen Werkzeugmaschinen, da letztere je nach Größe und Beschaffenheit des zu bearbeitenden Gegenstandes die Arbeit in verschiedener Weise auszuführen haben: Entweder viel Druck und weniger Geschwindigkeit, oder weniger Druck bei vermehrter Geschwindigkeit. Es wird dieser Zweck durch die genannten Stufenscheiben auf sehr einfache und in ausgiebiger Weise erreicht. —

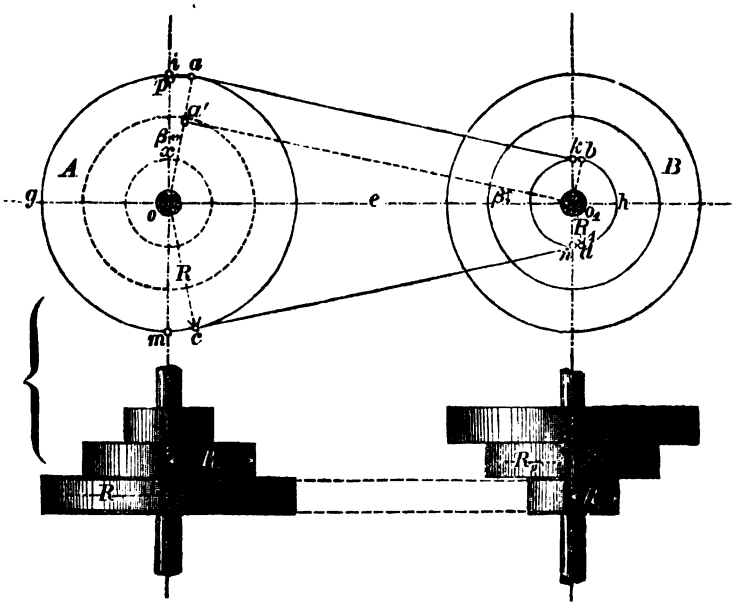


Fig. 180.

Wir bestimmen zuerst mit Bezug auf Fig. 180 und die dabei angewendete Bezeichnung allgemein die für einen beliebigen einfachen Riementrieb geltende Riemenlänge, und zwar einzeln für offene und geschränkte Riemen.

Digitized by Google

Die Länge (L) eines offenen Riemens ist danach:

$$L = \overset{\frown}{cga} + \overset{\frown}{bhd} + 2 \cdot \overline{ab}.$$

Diese drei Theile einzeln haben folgende Größen:

$$\overset{\frown}{cga} = \overset{\frown}{mgi} + 2\overset{\frown}{ia} = R\pi + 2R\beta,$$

worin R den Halbmesser der Scheibe A und β den Winkel $ioa = moc$ bedeutet. Für die Scheibe B ist analog:

$$\overset{\frown}{bhd} = \overset{\frown}{khn} - 2 \cdot \overset{\frown}{kb} = R_1\pi - 2 \cdot R_1\beta.$$

Zieht man nun von o_1 aus eine Parallele zur Tangente ba, so bilden diese beiden Linien mit den auf der gemeinschaftlichen Tangente jederzeit rechtwinkligen Radien aa' und bo_1 ein Rechteck abo_1a', und es ist demnach $ab = a'o_1$. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze erhalten wir also, wenn die Länge der Centrale $oo_1 = e$:

$$\overline{ab} = \overline{a'o_1} = \sqrt{e^2 - x^2},$$

und da $x = R - R_1$ ist:

$$\overline{ab} = \overline{a'o_1} = \sqrt{e^2 - (R - R_1)^2}.$$

Es ist also:

$$L = R\pi + 2R\beta + R_1\pi - 2R_1\beta + 2\sqrt{e^2 - (R - R_1)^2}$$

$$L = \pi(R + R_1) + 2\beta(R - R_1) + 2\sqrt{e^2 - (R - R_1)^2} \quad \ldots \quad (38)$$

Die Länge des geschränkten Riemens ist dagegen nach Fig. 181:

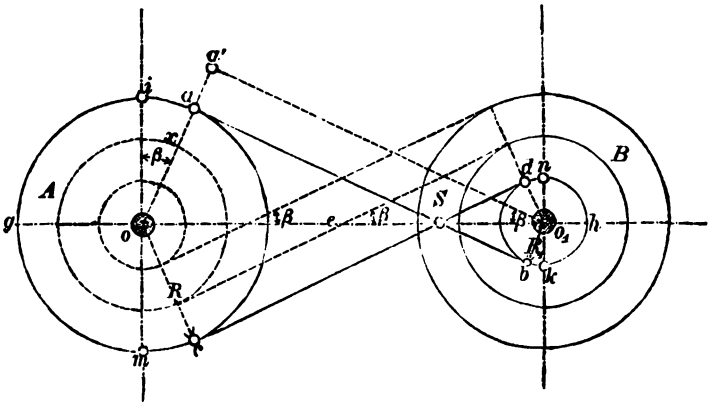


Fig. 181.

$$L' = \overset{\frown}{cga} + \overset{\frown}{bhd} + 2 \cdot \overline{ab}.$$

$$\overset{\frown}{cga} = \overset{\frown}{mgi} + 2 \cdot \overset{\frown}{ia} = R\pi + 2 \cdot R\beta$$

$$\overset{\frown}{bhd} = \overset{\frown}{khn} + 2 \cdot \overset{\frown}{kb} = R_1\pi + 2 \cdot R_1\beta$$

$$\overline{ab} = \overline{a'o_1} = \sqrt{e^2 - x^2} = \sqrt{e^2 - (R + R_1)^2}.$$

Demnach:

$$L' = \pi(R + R_1) + 2\beta(R + R_1) + 2\sqrt{e^2 - (R + R_1)^2}$$

$$L' = (R + R_1)(\pi + 2\beta) + 2\sqrt{e^2 - (R + R_1)^2} \quad \ldots \quad (39).$$

In dem speciellen Falle, wo die Scheibenhalbmesser R und R_1 einander gleich sind, oder allgemein für ein mittleres Stufenscheibenpaar mit dem Radius $R_0 = \frac{R + R_1}{2}$, sind die Riemenlängen beim offnen Riemen:

Digitized by Google

$$L_0 = 2R_0\pi + 2e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38^a)$$

und beim geschränkten Riemen:

$$L_0' = 2R_0(\pi + 2\beta_0) + 2\sqrt{e^2 - 4R_0^2} \quad \ldots (39^a).$$

Anmerkung: Die Größen, welche zur Berechnung der Riemenlängen für die Halbmesser R und R_1 einzuführen sind, hat man analog dem Beispiele Fig. 149, pag. 183 als sogen. mittlere Riemen- oder Seilbogenhalbmesser anzusehen; sie bestehen aus dem Halbmesser der Scheibe plus der halben Riemen- oder Seildicke. Man betrachtet also geometrisch die Mittellinie des Zugorganes als Länge, da beim Umbiegen desselben um die Rollen die innere Hälfte des Querschnittes zusammengedrückt, die äußere Hälfte dagegen ausgedehnt wird. —

Weiter haben wir die Bedingungen aufzusuchen, unter denen ein- und derselbe Riemen für sämmtliche Scheibenpaare eines Stufenscheibentriebes als Zugorgan zu verwenden ist.

Wir gehen, um die Ableitung möglichst zu vereinfachen, von dem Halbmesser R_0 eines mittleren Scheibenpaares aus — gleichviel ob ein solches wirklich vorhanden ist oder nicht — und geben unseren Zeichen folgende Bedeutung:

e = Axenentfernung zweier Stufenscheiben,

R u. R_1 = Halbmesser zweier zusammenarbeitenden Scheiben, bestimmt durch die Forderungen der betr. Anlage,

L = Riemenlänge, bestimmt aus dem Scheibenpaare mit R und R_1,

$\varphi = \frac{r}{r_1}$ = Umsetzungsverhältniß eines zweiten Paares correspondirender Scheiben,

$R_0 = \frac{R + R_1}{2}$ = mittlerer Radius des bekannten Scheibenpaares,

β = Winkel der Centrale mit der Richtung der geraden Riemenstücke.

Für offenen Riemen und Scheiben mit den Halbmessern r und r_1 wird Gleichung (38) lauten:

$$L = \pi(r + r_1) + 2\beta(r - r_1) + 2\sqrt{e^2 - (r - r_1)^2},$$

und die Länge für zwei gleiche Scheiben mit den Halbmessern R_0 ist nach Frml. (38^a):

$$L_0 = 2R_0\pi + 2e.$$

Für beide Rollenpaare soll aber das Zugorgan passend sein; folglich ist:

$$L = L_0,$$

d. h.:

$$2R_0\pi + 2e = \pi(r + r_1) + 2\beta(r - r_1) + 2\sqrt{e^2 - (r - r_1)^2}$$

Die Größen r und r_1 sind hieraus nicht ohne Weiteres zu berechnen; man muß vielmehr durch erlaubte Vernachlässigungen die Formel in eine einfachere Gestalt zurückzuführen suchen, woraus man dann eine unter besonderen Voraussetzungen giltige Bedingung ablesen und Werthe für r und r_1, bezhtl. mit Correction, ableiten kann.

Da bei offenen Riemen die Winkel β meistens sehr klein sind, so kann man, ohne merklich zu fehlen, anstatt des Bogenmaßes von β den Sinus desselben setzen; man nimmt also verhältnißmäßig anstatt des Bogens ai, Fig. 180, das Loth ap. Aus dem Dreieck $a'o_1o$ daselbst berechnet sich aber:

$$\sin\beta = \frac{x}{e} = \frac{R - R_1}{e};$$

Digitized by Google

es wird also sein angenähert:

$$\beta = \frac{r - r_1}{e}.$$

Setzen wir diesen Werth für β in die obige Gleichung ein und ergänzen wir durch e, so entsteht:

$$\text{(I)}\quad 2R_0\pi + 2e = \pi(r + r_1) + 2e\left(\frac{r - r_1}{e}\right)^2 + 2e\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{e}\right)^2}.$$

Dasselbe für die Scheiben R und R_1:

$$\text{(I}^a\text{)}\quad 2R_0\pi + 2e = \pi(R + R_1) + 2e\left(\frac{R - R_1}{e}\right)^2 + 2e\sqrt{1 - \left(\frac{R - R_1}{e}\right)^2}.$$

Setzen wir in Gleichung (I) $\frac{r - r_1}{e} = 0$, so fallen rechts das zweite Glied nnd die Wurzel weg. Man hat also:

$$2R_0\pi = \pi(r + r_1) + 2e - 2e$$

oder:

$$\text{(II)}\quad r + r_1 = 2R_0.$$

Dieses Resultat besagt: Für Stufenscheibenpaare, bei wechen der Unterschied der Halmesser im Vergleich zur Entfernung der Drehaxen sehr klein ist, genügt es, wenn man die Halbmesser der correspondirenden Scheiben so bemißt, daß ihre Summe gleich einer constanten Größe ist, also z. B. gleich der Summe von ein paar mittleren Scheibenhalbmessern.

Wollen wir diese Constructionsregel auch da benützen, wo $\frac{r - r_1}{e}$ eine namhafte Größe erlangt, so werden wir einen Fehler machen; wir werden etwas zu große Scheiben erhalten und müssen das Resultat hinterher durch Subtraction des zu viel genommenen Betrages wieder corrigiren. Auf diese Weise können wir in der That Frml. (II) für Stufenscheiben mit offenen Riemen allgemein verwendbar machen und auch die Radien daraus einzeln bestimmen. Da nämlich: $\frac{r}{r_1} = \varphi$, so erhält man durch geeignete Combination und Reduction, für ungefähr $\frac{r - r_1}{e} < 0{,}05$:

$$r = \varphi \cdot \frac{2R_0}{\varphi + 1} \quad \ldots\ldots (40)$$

und:

$$r_1 = \frac{2R_0}{\varphi + 1} \quad \ldots\ldots (41).$$

Wenn $\frac{r - r_1}{e} > 0{,}05$ ist, findet man die Halbmesser eines Stufenpaares ziemlich genau, indem man von den Werthen nach Frml. (40 u. 41) einen Fehler, den wir mit f bezeichnen wollen, abzieht; also sind dann die Radien des Stufenscheibenpaares:

$$r = \varphi \cdot \frac{2R_0 - f}{\varphi + 1} \quad \ldots (40^a)$$

und:

$$r_1 = \frac{2R_0 - f}{\varphi + 1} \quad \ldots\ldots (41^a).*)$$

*) Eine graphische Lösung des vorliegenden Problemes nach Culmann findet sich in Reuleaux's „Construction der Maschinentheile" 1862, pag. 610.

Digitized by Google

Einen Ausdruck für den Werth erhalten wir, indem wir in Gleichung (I) setzten $(2R_0 - f)$ anstatt $(r + r_1)$. Es entsteht:

$$2R_0\pi + 2e = 2R_0\pi - f\pi + 2e\left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2 + 2e\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2}$$

$$f\pi = 2R_0\pi + 2e\left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2 + 2e\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2} - 2R_0\pi - 2e$$

$$f = \frac{2e}{\pi}\left[\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2} - 1 + \left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2\right] \ldots \quad (42),$$

oder pro Einheit der Centrale (e):

$$\frac{f}{e} = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2} - 1 + \left(\frac{r-r_1}{e}\right)^2\right] \ldots . \quad (42^a).$$

Bei numerischen Rechnungen ermittelt man zuerst die Halbmesser r u. r_1 des fraglichen Scheibenpaares wie für gekreuzten Riemen aus $r + r_1 = R + R_1 = 2R_0$ und entsprechend der gegebenen Uebersetzung φ, berechnet mit diesen Werthen die Größe f aus Frml. (42), setzt dann den gefundenen Werth f in Frml. (40^a) und (41^a) ein und berechnet daraus hinreichend genau die corrigirten Halbmesser, welche die betreffenden Scheiben für einen offenen Riemen erhalten müssen.

Bei geschränkten oder gekreuzten Riemen gestaltet sich die Sache bedeutend einfacher.

Setzen wir nämlich

$$L' = L_0',$$

so wird:

$$2R_0(\pi + 2\beta_0) + 2\sqrt{e^2 - 4R_0^2} = (r + r_1)(\pi + 2\beta) + 2\sqrt{e^2 - (r+r_1)^2}.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn:

$$r + r_1 = 2R_0 \ldots . \quad (43).$$

Unter dieser Voraussetzung wird nämlich auch $\beta_0 = \beta$; die tangentialen Riemenstücke schneiden die Centrale oo_1 dann jederzeit unter demselben Winkel β (Fig. 181), wovon man sich durch Construction oder auf trigonometrischem Wege leicht überzeugen kann.

Die vorstehende Constructionsregel, nach welcher man die Summe der Radien zweier zusammenarbeitenden Räder constant zu machen hat, gilt demnach auch bei geschränkten Riemen, und zwar hier ohne Beschränkung. Wir können daher die Scheibenhalbmesser bei Stufenscheiben mit gekreuzten Riemen direct berechnen nach:

$$r = \varphi \cdot \frac{2R_0}{\varphi + 1} \ldots \quad (40)$$

$$r_1 = \frac{2R_0}{\varphi + 1} \ldots . \quad (41).$$

Beispiele.

1. Aufgabe. Gegeben, resp. durch besondere Forderungen der Anlage bedingt, ist der eine zu einem Stufenscheibentriebe gehörige Riemenscheiben-Conus A (Fig. 182).

Die vier einzelnen Scheiben oder Stufen haben folgende Durchmesser:

Digitized by Google

1) $2R = 200^{mm}$
2) $2r = 300^{mm}$
3) $2r' = 400^{mm}$
4) $2r'' = 500^{mm}$;

die Höhe jeder einzelnen Stufe — d. i. die halbe Differenz der Durchmesser von je zwei benachbarten Scheiben — ist also durchgehends dieselbe und gleich 50^{mm}. Die Entfernung der Conus-Wellen sei $= 1{,}2^{m}$.

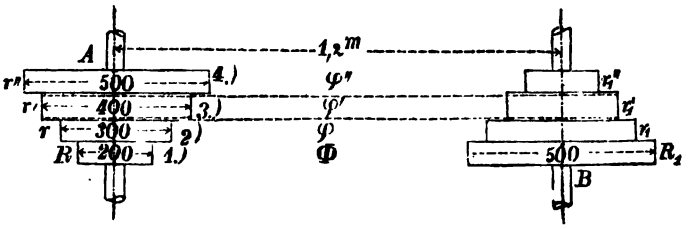


Fig. 182.

Es soll ein entsprechender Gegenscheiben-Conus B construirt werden, dessen größte, der kleinsten Scheibe 1) des Conus A gegenüberstehende Scheibe einen Durchmesser von $2R_1 = 500^{mm}$ hat, also eben so groß ist wie die größte Scheibe 4) des gegebenen Conus A. —

a) Welche Durchmesser erhalten die übrigen Scheiben des Conus B, wenn der Riemen geschränkt aufgelegt wird, welches sind die Uebersetzungszahlen der einzelnen Stufenscheibenpaare und wie lang ist der Riemen?

b) Welche corrigirten Halbmesser bekommen die einzelnen Scheiben der beiden Conus für dieselben Uebersetzungsverhältnisse wie sub a), wenn der Riemen offen treiben soll?

Auflösung a). Für gekreuzten Riemen ist die einfache Bedingung Frml. (43) zu erfüllen:

$$R + R_1 = r + r_1 = r' + r_1' = r'' + r_1'' = 2R_0.$$

Der Halbmesser R_0 eines mittleren Scheibenpaares (das zwar hier nicht vorhanden ist, mit dem wir aber rechnen können) ist, da das erste Scheibenpaar bekannt ist:

$$R_0 = \frac{R + R_1}{2} = \frac{100 + 250}{2} = \frac{350}{2} = 175^{mm}.$$

Es ist also:

$$2R_0 = 2 \cdot 175 = 350,$$

und wir erhalten mit Hilfe der Frml. (43) die Durchmesser der drei übrigen Scheiben des Conus B zu:

$r_1 = 2R_0 - r = 350 - 150 = 200$; $2r_1 = 400^{mm}$
$r_1' = 2R_0 - r' = 350 - 200 = 150$; $2r_1' = 300^{mm}$
$r_1'' = 2R_0 - r'' = 350 - 250 = 100$; $2r_1'' = 200^{mm}$.

Es bestätigt sich in diesem Beispiele, was wir oben allgemein bemerkten, daß in solchem Falle, wo wir geschränkte Riemen voraussetzen und die größten oder die kleinsten Scheiben der beiden Conus gleiche Durchmesser haben, die Conus auch übrigens genau gleiche Scheiben erhalten.

Digitized by Google

Die bezüglichen Umsetzungsverhältnisse der einzelnen Scheibenpaare sind dann:

$$\Phi = \frac{R}{R_1} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\varphi = \frac{r}{r_1} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\varphi' = \frac{r'}{r_1'} = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

$$\varphi'' = \frac{r''}{r_1''} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Es sind also bei congruenten Conus ferner die Umsetzungsverhältnisse des letzten oder n^{ten}, des $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$ u. s. f. Paares die reciproken Werthe der Umsetzungsverhältnisse des 1ten, 2ten, 3ten u. s. f. Paares. $\varphi = 1$ kommt bei solchen congruenten Stufenscheiben-Conus mit constanter Stufenhöhe nur dann vor, wenn eine ungerade Anzahl Stufen vorhanden sind. —

Die erforderliche Riemenlänge ist hier nach Frml. (39ª):

$$L_0, = 2R_0(\pi + 2\beta_0) + 2\sqrt{e^2 - 4R_0^2}.$$

Analog Fig. 181 erhalten wir für $R = R_1 = R_0$:

$$\sin\beta_0 = \frac{2R_0}{e} = \frac{350}{1200} = \frac{7}{24} = 0{,}291666$$

$$\beta_0{}^0 = 16^0\,57'\,27{,}8'' = 16{,}95772^0$$

$$\beta_0 = 0{,}01745 \,.\, 16{,}95772 = 0{,}2959$$

$$L_0' = 350\,(3{,}1416 + 0{,}2959) + 2\sqrt{1200^2 - 4\,.\,175^2}$$

$$L_0' = 1306{,}7 + 2\sqrt{1317500}$$

$$L_0' = 1306{,}7 + 2295{,}6 = 3602{,}3^{mm}. —$$

Auflösung b). Bei offenem Riemen ändert sich, da die Axenentfernung (e) für jedes Scheibenpaar dieselbe ist, mit dem Uebersetzungsverhältnisse auch der Winkel β, welchen die Centrale mit jedem der geraden (tangentialen) Riemenstücke einschließt. Daher kommt es, daß dann für constante Riemenlänge der Stufenhöhe nicht für alle Scheiben constant gemacht werden kann; sie wird um so kleiner, je mehr bei gleichen Conus das Verhältniß φ von dem Werthe „Eins" abweicht.

Das Näherungsverfahren zur Bestimmung die corrigirten Stufenscheibenhalbmesser besteht nun darin, daß wir den Betrag (f) der anzubringenden Correctur nach Frml. (42) für angenommene oder nach der Regel für geschränkte Riemen ($R + R_1 = \text{constant}$) bestimmte Scheibenpaare ausmitteln, dann aber mit Rücksicht auf den Einfluß der verschiedenen Winkel (β) die wirklichen Halbmesser der Stufenscheiben für offenen Riemen nach Frml. (40ª) und (41ª) berechnen.

Für das 1. Stufenscheibenpaar mit den Halbmessern R und R_1 (Fig. 182) heißt die Frml. (42):

$$f_1 = \frac{2e}{\pi} = \left[\sqrt{1 - \left(\frac{R - R_1}{e}\right)^2} - 1 + \left(\frac{R - R_1}{e}\right)^2\right].$$

Numerisch ist hier:

$$\frac{R - R_1}{e} = \frac{100 - 250}{1200} = -\frac{3}{24} = -0{,}125$$

und:

$$\left(\frac{R - R_1}{e}\right)^2 = (-0{,}125)^2 = 0{,}015625.$$

Digitized by Google

$$f_1 = \frac{2 \cdot 1200}{3{,}1416} (\sqrt{1 - 0{,}015625} - 1 + 0{,}015625)$$

$$f_1 = 763{,}942\ (0{,}992157 - 1 + 0{,}015625)$$

$$f_1 = 763{,}942\ (- 0{,}007843 + 0{,}015625) = 763{,}942 \cdot 0{,}007782$$

$$\mathbf{f = 5{,}945.}$$

Frml. (40ª) und (41ª) ergeben vorliegend:

$$\mathbf{R = \Phi \frac{2R_0 - f_1}{\Phi + 1} = 0{,}4 \cdot \frac{2 \cdot 175 - 5{,}945}{0{,}4 + 1} = \frac{0{,}4 \cdot 344{,}055}{1{,}4} = 98{,}3}$$

$$\mathbf{R_1 = \frac{2R_0 - f_1}{\Phi + 1} = \frac{344{,}055}{1{,}4} = 245{,}75.}$$

Bei dem zweiten Scheibenpaare wird:

$$f_2 = \frac{2e}{\pi}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{e}\right)^2} - 1 + \left(\frac{r - r_1}{e}\right)^2\right]$$

$$\frac{r - r_1}{e} = \frac{150 - 200}{1200} = -\frac{1}{24} = -0{,}041666$$

$$\left(\frac{r - r_1}{e}\right)^2 = (-0{,}041666)^2 = 0{,}001736.$$

$$f_2 = 763{,}942\ (\sqrt{1 - 0{,}001736} - 1 + 0{,}001736)$$

$$f_2 = 763{,}942\ (0{,}999131 - 1 + 0{,}001736) = 763{,}942 \cdot 0{,}000867$$

$$\mathbf{f_2 = 0{,}66234.}$$

Die Halbmesser r und r_1 der beiden Scheiben erhalten dann in Wirklichkeit folgende Größen:

$$\mathbf{r = \varphi \frac{2R_0 - f_2}{\varphi + 1} = 0{,}75 \frac{2 \cdot 175 - 0{,}66234}{0{,}75 + 1} = 0{,}75 \cdot \frac{349{,}33766}{1{,}75} = 149{,}715}$$

$$\mathbf{r_1 = \frac{2R_0 - f_2}{\varphi + 1} = \frac{349{,}33766}{1{,}75} = 199{,}62.}$$

Es wird nun bei der vorliegenden Anordnung von congruenten Stufenscheiben das (f) für das dritte Scheibenpaar gleich dem des zweiten und das (f) des vierten Scheibenpaares gleich dem des ersten, da die Differenzen der Halbmesser absolut bezüglich dieselben sind und die Vorzeichen im Quadrate stets Plus geben. Es ist also:

$$f_3 = f_2 = 0{,}66234$$

und:

$$f_4 = f_1 = 5{,}945.$$

Wir erhalten schließlich:

$$\mathbf{r' = \varphi' \frac{2R_0 - f_3}{\varphi + 1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{349{,}33766}{\frac{4}{3} + 1} = 4 \cdot \frac{349{,}33766}{7} = 199{,}62}$$

$$\mathbf{r_1' = \frac{2R_0 - f_3}{\varphi' + 1} = \frac{349{,}33766}{\frac{4}{3} + 1} = 3 \cdot \frac{349{,}33766}{7} = 149{,}716}$$

$$\mathbf{r'' = \varphi'' \frac{2R_0 - f_4}{\varphi'' + 1} = 2{,}5 \cdot \frac{344{,}055}{3{,}5} = 245{,}75}$$

$$\mathbf{r_1'' = \frac{2R_0 - f_4}{\varphi'' + 1} = \frac{344{,}055}{3{,}5} = 98{,}3.}$$

Digitized by Google

Die corrigirten Durchmesser der Stufenscheiben für offenen Riementrieb sind also nun:

$$2R = 196{,}6^{mm} = 2r_1''$$
$$2r = 299{,}4^{mm} = 2r_1'$$
$$2r' = 399{,}2^{mm} = 2r_1$$
$$2r'' = 491{,}5^{mm} = 2R_1.$$

Aus der ersten und letzten Zeile ersieht man, daß die Abweichung gegen die uncorrigirten Durchmesser ($2R = 200$ und $2r'' = 500$) ziemlich bedeutend wird, je mehr sich die Uebersetzung φ von dem Werthe $\varphi = 1$ entfernt, und die Abweichung ist wegen der Multiplication mit φ in Frml. (40ᵃ) bei den größeren Scheiben auch verhältnißmäßig größer. —

Wir wollen nun noch nachsehen, ob die gefundenen Stufenscheibenhalbmesser auch der Anforderung genügen, daß für jedes der vier Scheibenpaare eine und dieselbe Riemenlänge paßt. Zu diesem Zwecke berechnen wir erst die Riemenlänge für ein mittleres Scheibenpaar (R_0) und dann dieselbe für das 1. und 4. Paar. Nach Frml. (38ᵃ) ist:

$$L_0 = 2R_0\pi + 2e = 1099{,}56 + 2400 = 3499{,}56.$$

Frml. (38) heißt, wenn wir Scheiben eines Paares der Einfachheit wegen vertauschen:

$$L = \pi(R + R) + 2\beta(R_1 - R) + 2\sqrt{e^2 - (R_1 - R)^2}.$$

Wir berechnen die drei Glieder dieser Formel einzeln:

$$\pi(R_1 + R) = \pi(245{,}75 + 98{,}3) = 3{,}1416 \,.\, 344{,}055$$
$$= 1080{,}8832.$$
$$\frac{R_1 - R}{e} = \sin\beta = \frac{245{,}75 - 98{,}3}{1200} = 0{,}122875$$
$$\log\sin\beta = 9{,}0894636 - 10$$
$$\beta^0 = 7^0\,3'\,29'' = 7{,}058_0$$
$$\beta = 0{,}01745 \,.\, 7{,}058 = 0{,}1231621$$
$$2\beta(R_1 - R) = 0{,}2463242\,(245{,}75 - 98{,}3)$$
$$= 36{,}3205.$$
$$2\sqrt{e^2 - (R_1 - R)^2} = 2\sqrt{1440000 - 21741{,}5} = 2\sqrt{1418258{,}5}$$
$$L = 1080{,}8832 + 36{,}3205 + 2381{,}8 = 3499{,}0037.$$

Die Differenz beträgt also selbst bei dem größten resp. kleinsten φ nur $^1/_2$ Millimeter, und wir sehen, daß die vorstehende Näherungsmethode vollkommen genügende Resultate ergiebt. —

Wollten wir die Stufenscheiben wie bei gekreuzten Riemen mit uncorrigirten Halbmessern auch für offenen Riemen verwenden, so würde nun derselbe Riemen nicht ohne Weiteres zu benutzen sein, denn die Riemenlänge für das erste Paar Scheiben wäre:

$$\pi(R_1 + R) = \pi(250 + 100) = 1099{,}56 = \pi(r_1 + r)$$
$$\frac{R_1 - R}{e} = \sin\beta = \frac{250 - 100}{1200} = 0{,}125$$
$$\beta^0 = 7^0\,10'\,50{,}7'' = 7{,}1807^0$$
$$\beta = 0{,}01745 \,.\, 7{,}1807 = 0{,}1253032$$

Digitized by Google

$$2\beta\,(R_1 - R) = 0{,}2506043\,(250 - 100) = 37{,}5906$$

$$2\sqrt{e^2 - (R_1 - R)^2} = 2\sqrt{1440000 - 22500} = 2\sqrt{1417500}$$

$$= 2381{,}2.$$

$$L = 1099{,}56 + 37{,}59 + 2381{,}2 = 3518{,}35^{mm}.$$

Für das zweite Paar hingegen wäre:

$$\pi\,(r_1 + r) = 1099{,}56.$$

$$\frac{R_1 - R}{e} = \sin\beta = \frac{200 - 150}{1200} = 0{,}041666$$

$$\beta^0 = 2^0\,23'\,16{,}8'' = 2{,}388^0$$

$$\beta = 0{,}01745 \,.\, 2{,}388 = 0{,}0416706$$

$$2\beta\,(r_1 - r) = 0{,}0416706 \,.\, 2 \,.\, 50 = 4{,}16706$$

$$2\sqrt{e^2 - (r_1 - r)^2} = 2\sqrt{1440000 - 2500} = 2\sqrt{1437500}$$

$$L = 1099{,}56 + 4{,}167 + 2397{,}8 = 3501{,}527_{mm}.$$

Für das zweite und dritte Stufenscheibenpaar wäre demnach der Riemen des ersten und vierten Paares circa 17^{mm} zu lang. —

II. Riemenverbindungen, Construction und Verhältnisse der Riemenscheiben.

Die Zugorgane, welche man zur Vermittlung der Bewegung zwischen zwei Rädern eines indirect-wirkenden Frictionsrädertriebes verwendet, sind der Form nach vorwiegend endlose Bänder mit rechteckigem Querschnitte, während die runden Treibschnüre nur in untergeordneter Weise, namentlich für kleine Kräfte*) (bei einzelnen Werkzeug- und Spinnmaschinen) Verwendung finden.

Jeder Stoff, welcher die nöthige Festigkeit, Biegsamkeit, Dauerhaftigkeit, mit Eisen zusammen einen hinreichend großen Reibungscoefficienten liefert, kann als Zugorgan für Transmissionen dienen. Bisher verwendete man als solche: Lederriemen, Guttapercha- und Kautschukriemen, Hanfgurten, Stahlbänder, Eisen- und Messing-Drahtseile. Von allen diesen haben sich jedoch nur die Lederriemen und Eisendrahtseile dauernd bewährt.**) Die Kautschukriemen sind zwar durch geeignete Leinwandeinlagen in ihrer Widerstandsfähigkeit gegen Zug wesentlich zu erhöhen und haben besonders den Vortheil, daß sie in großer Länge ohne Naht hergestellt werden können; sie reißen aber an der Verbindungsstelle — Schloß — sehr leicht aus, dehnen sich beim Betriebe stark und springen in Folge des unausgesetzten Biegens — namentlich in sehr trocknen Locales — leicht auf. Zudem sind gute

*) Erst in neuester Zeit sind in England und Deutschland Versuche gemacht worden, die runden Hanf- oder Juteseile auch für größere Kräfte anzuwenden, und da man ziemlich günstige Resultate damit erzielte, so dürfte bald eine allgemeine Einführung dieser Art Seiltriebe zu erwarten sein. Die betreffenden Seile haben $30 \div 50^{mm}$ Durchmesser und werden je nach Bedarf in einer größeren oder geringeren Anzahl nebeneinander laufend angeordnet. Die Seiltrommeln haben dem entsprechend am Umfange soviel conische Spuren oder Rillen eingedreht, als Seile zu verwenden sind; die Durchmesser der Seilrollen macht man 50, und wenn die Rolle zugleich als Schwungrad dienen soll, 100 mal so groß als die Seilstärke, und die Neigung der kegelförmigen Spurflächen 45°. — Dieses Transmissionsmittel wirkt ähnlich wie ein Drahtseiltrieb, liefert namentlich ganz ruhige Bewegung, geringe Abnutzung und ist billig in Anlage und Unterhaltung. — Ausführliche Mittheilung über Hanfseil-Transmission giebt K. Keller in der Ztschr. d. V. D. Ing. 1876.

**) Haar-Treibriemen von Benecke in Hamburg machen jetzt viel von sich reden.

Digitized by Google

Kautschukriemen eben so theuer wie Lederriemen. Gurten sind bei größeren Kräften für die Dauer nicht zu verwenden.

Es verbleiben uns also zur Zeit — bis auf die Eisendrahtseile, welche wir nachfolgend beim Drahtseiltriebe weiter besprechen werden — nur die Lederriemen für den Transmissionsbetrieb verfügbar. Das Leder hierzu ist am besten geeignet, wenn es aus dem Rückentheile (Kern) einer Kuhhaut geschnitten ist, nach der Lohgerbe rothbraun aussieht, einen dunklen, möglichst gleichförmigen, körnigen Querschnitt zeigt, gut gefettet ist und nach dem Umbiegen keine Risse und Falten hinterläßt. Auch Roßleder wird mitunter zu Treibriemen verarbeitet.

Die Streifen, welche man zum Zwecke der Riemenfabrikation aus den Riemenhäuten schneidet, haben eine Dicke von mindestens 3^{mm}, gewöhnlich aber von 4 $\div$ 7^{mm}, sind 30 $\div$ 300^{mm} breit und 1,4 $\div$ 1,6^{m} lang. Da die zum Riementriebe nöthige Länge in der Regel bedeutend größer ist, so vereinigt man mehrere solche Stücke der Länge nach, indem man je zwei Enden 120 $\div$ 200^{mm} lang übereinander legt und mit sogen. Näh- oder Binderiemen — in einfachen Vorderstichen zu 3 $\div$ 4 Längsnähten — zusammennäht. Doppelte Riemen werden dadurch hergestellt, daß man erst einen einfachen Riemen in der verlangten Breite fertigt und auf diesen dann die Lederstreifen der zweiten Schicht mit dem einfachen Riemen verleimt oder verkittet und auf diesen so aufnäht, daß diese selbst wieder übereinander greifen und die Verbindungsstellen der beiden Schichten abwechselnd zwischen einander fallen.

Im Allgemeinen soll man bestrebt sein, so lange es mit Rücksicht auf die Breite irgend möglich ist, einfache Riemen zu verwenden, da doppelte in Folge der größeren Dicke wesentlich mehr Steifigkeit haben, deshalb nicht so haltbar und dauerhaft, übrigens aber kostspieliger sind.

Hat man nun einen solcherart hergestellten endlosen Riemen in gehöriger Länge beschafft, so wird derselbe über die Riemenscheiben gelegt, straff angespannt, und dann werden die beiden noch übrigen Enden vollends verbunden oder geschlossen. Diese Verbindung erfolgt auf sehr verschiedene Art und muß auch bei neuen Riemen, nachdem sie sich durch den Gebrauch gestreckt haben, mehrmals wiederholt werden. Eine sehr einfache und bewährte Methode des Riemenschlusses ist folgende. Man schlägt mit einem Locheisen in die beiden Enden runde Löcher in zwei oder drei Reihen und gehörigen, aber untereinander gleichen, Abständen ein, legt die Enden ein Stück übereinander und zieht einen Binderiemen durch. Die geschlagenen Löcher reißen nicht so leicht aus und, wenn sich der Riemen gestreckt hat, kann man die Enden um eine Lochentfernung weiter übereinander legen und den Binderiemen wieder durchziehen.

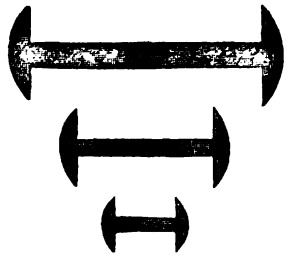


Fig. 183a.

In neuer Zeit sind, namentlich für einfache und schmale Riemen, die in beistehender Fig. 183a skizzirten Green'schen Riemennieten von Messing sehr beliebt geworden. Mit diesen ist der Riemenschluß sehr leicht und rasch zu bilden; man spart dabei an Riemenlänge und kann, wenn sich der Riemen gestreckt hat, das eine oder beide gelochten Enden abschneiden und ein neues Schloß machen. Um das Ausreißen zu erschweren, dürfte es sich

Digitized by Google

auch hier empfehlen, die nach den Riemenenden hin gelegenen Schlitzenden mit einem schwachen Locheisen einzuschlagen und dann die Oeffnungen für das Einbringen der Riemennieten nach rückwärts aufzuschneiden.

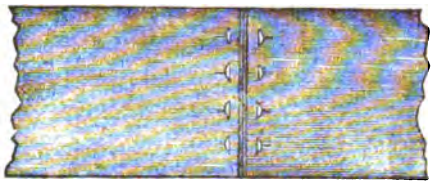


Fig. 183.

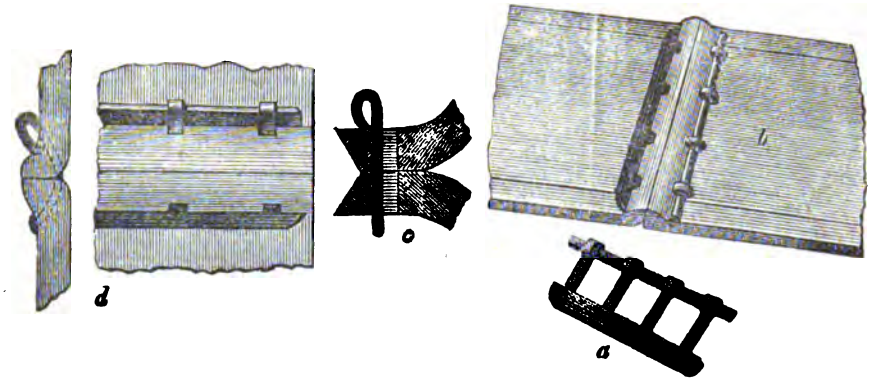


Fig. 184.

Ein dem vorigen ganz ähnliches Riemenschloß bildet man bei einfachen und bis 80mm breiten Riemen unter Anwendung der ebenfalls messingnen Riemenverbinder von M. Wilczynski (in Hamburg). Dieselben bestehen (Fig. 184a) aus einem ausgestanzten rechenartigen Körper, dessen Zinkenenden flach umgebogen sind, und einem Vorsteckstäbchen. Die Löcher werden wie bei den Green'schen Riemennieten an den abgeschrägten Enden eingeschlagen (Fig. 184c) und, nachdem die Verbinder durchgesteckt sind, umgebogen und mit dem Hammer flach geklopft, sodaß dann die Verbindung das in Fig. 184d dargestellte Aussehen zeigt.

Eine Erfindung älteren Datums ist die nebenbei skizzirte Verbindungsplatte von Harris, Fig. 185. Sie besteht aus einer schwach gewölbten Gußplatte (schmiedbares Gußeisen), deren Länge gleich der Riemenbreite ist, und welche an der hohlen (concaven) Seite mit zwei paar Reihen Zähnen, die etwas schief einander zugeneigt stehen, besetzt ist. Die Zähne haben circa 5 ÷ 6mm Höhe, sind im Querschnitt oval und an den Enden rundlich zugeschärft. Die Riemenenden werden, in der halben Plattenbreite zusammenstoßend, auf die Zähne gelegt, und durch Schläge mit dem Hammer auf zwischengelegtes Holz bringt man die Zähne zum Eindringen in das Leder. Die Wölbung der Platte schließt sich der Riemenkrümmung beim Umlegen um die Scheibe an.

Fig. 185.

Bei starken und breiten, sowie bei doppelten Riemen, bewerkstelligt man sowohl die Verbindung der einzelnen Riemenstücke als auch den Schluß der Riemen durch sogenannte Riemenschrauben (Fig. 186); das sind schmiedeiserne Mutterschrauben mit ganz flachen, runden, kugelig abgedrehten Köpfen und Muttern. Letztere haben einen

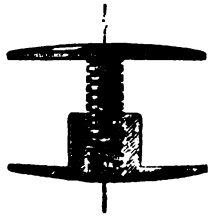


Fig. 186.

Digitized by Google

das Muttergewinde enthaltenden hohl-cylindrischen Zapfen, welcher im geschlossenen Zustande ziemlich bis an den Kopf der Spindel reicht; Kopf- und Mutterscheiben sind je mit zwei runden Löchern versehen, in denen die Zapfen eines hierzu gehörigen Mutterschlüssels (Fig. 3, Bl. IX) anfassen. In die zu verbindenden Riemenenden schlägt man runde, dem äußeren Durchmesser des Hohlcylinders entsprechende Löcher ein, steckt die Mutter durch und zieht die Schraubenspindel fest an, sodaß die flachen Scheiben (Köpfe) sich etwas in das Leder eindrücken. —

Da es selbstverständlich nicht möglich ist, breite und starke Riemen beim Schlusse so stark anzuziehen, wie es der zu übertragenden Kraft entsprechend

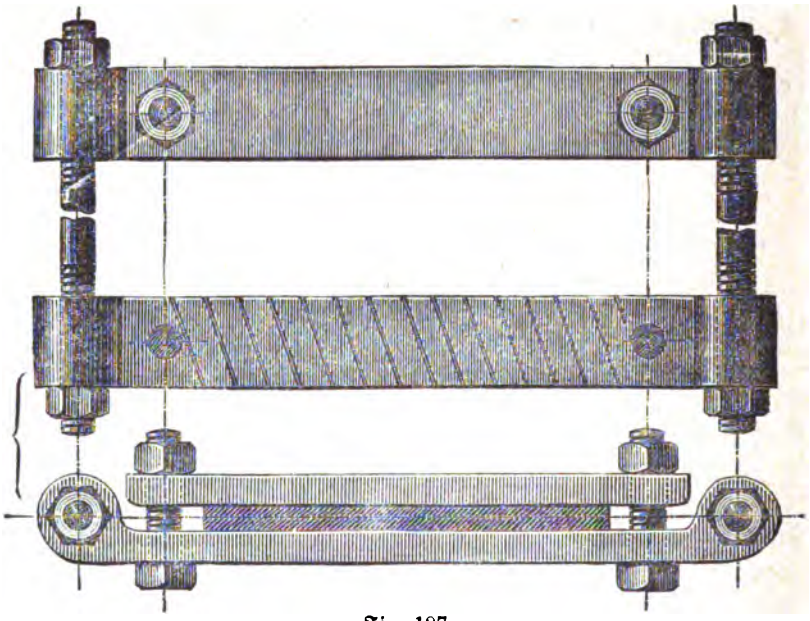


Fig. 187.

nothwendig wäre, so bedient man sich hierzu der sogenannten **Riemenspanner**, Fig. 187. Dieselben bestehen aus zwei paar starken schmiedeisernen **Flachschienen**, welche je ein Riemenende mittelst Schrauben zwischen sich fest klemmen, und zwei entsprechend langen Schraubenspindeln, welche durch die Oesen der Flachschienen durchgehen, sodaß man beim Anziehen der Muttern diese und die Riemenenden gegen- und übereinander bewegt und feststellt. —

Die **Riemenscheiben**, deren Typus Fig. 3, Bl. LXXI darstellen mag, lassen sich hinsichtlich ihrer wirklichen Form in drei wesentlich verschiedene Theile zerlegen: Kranz, Arme und Nabe. Der Kranz, welcher die materielle Darstellung der Grundform ist, hat im Wesentlichen sich dieser anzuschließen und besteht im Allgemeinen aus einem verhältnißmäßig schwachen, cylindrischen Ringe, an dessen äußerer Fläche das Mittel der Bewegungsübertragung — die Reibung — wirksam ist, und an dessen innerer Seite sich das Armsystem anschließt, das, wie bei jedem gewöhnlichen Wagenrade, aus einem oder mehreren, in der Mittelebene des Rades, normal und sternförmig gegen die Drehaxe angeordneten Stäben, Speichen oder Armen besteht, welche sich an der Axe oder Welle zu der diese umschließenden Hülse oder Nabe vereinigen.

Digitized by Google

In der Praxis macht man die Außenfläche des Riemenscheibenkranzes (ausgenommen bei Riementrommeln, welche als eine Combination von mehreren gleichgroßen Riemenscheiben zu betrachten sind) nicht genau cylindrisch, sondern etwas gewölbt, damit nämlich die Riemen bei der in Wirklichkeit unvollkommen parallelen Wellenlage und nicht immer ganz centrischen Drehung der Wellen und Scheiben nicht so leicht von der Scheibe abgleiten. Wenn allerdings die Riemen an und für sich auf den Scheiben stark gleiten — wenn also $P > F$ — so begünstigt die Wölbung des Riemenscheibenkranzes auch das Abrutschen, was man beim Ingangsetzen oft beobachten kann, und man sieht sich auch hierauf veranlaßt, das Gleiten der Riemen möglichst zu verhindern.

Früher, als man die Riemenscheibenmodelle meist in der Mittelebene AB (Fig. 3, Bl. LXXI) getheilt ausführte und je eine Hälfte in Ober- und Unterkasten einformte, konnte man schon das Kranzmodell für die Wölbung einrichten und erleichterte dadurch gleichzeitig das Ausheben aus der Form. Gegenwärtig vermeidet man jedoch der Kostspieligkeit wegen die getheilten Modelle und formt die Scheiben meist in der ganzen Breite in den Unterkasten ein, sodaß das rohe Gußstück wegen der Modell-Verjüngung durch die ganze Breite eine doppelt zu große Stärke erhalten, und man dann beim Abdrehen des Kranzes allein die kugelige oder ellipsoidische Gestalt geben muß. Bei breiteren Scheiben ersetzt man dieselbe billiger durch eine doppel-conische Gestalt — welche durch den vom Support selbstthätig geführten Drehstahl schon erzeugt werden kann — und rundet im Scheitel die stumpfe Kante ab.

Im allgemeinen giebt man dem Riemenscheibenkranze etwas mehr Breite als dem Riemen, verstärkt die Wandung innen nach der Mitte zu und setzt dort eine ringsum laufende, meist rundliche Verstärkung an, welche einen bequemeren Anschluß der Arme gestattet.

Die Arme der Riemenscheiben sind entweder gerade oder geschweift und erhalten, damit sie bei der Drehung weniger Luftwiderstand erzeugen, elliptischen Querschnitt (Fig. 3^a und 3^b, Bl. LXXI). Ist in Richtung der Mittelebene der Scheibe, und zwar an der Wurzel, wo der Arm in die Nabe übergeht, die Höhe des Ellipsenquerschnittes = H, so verjüngt man die Arme bis auf 0,7 H am Kranze und giebt ihnen entweder eine constante Breite oder besser in jedem Querschnitte eine Breite gleich der halben Höhe des betreffenden Querschnittes — erhält also an der Nabe 0,5 H und am Kranze 0,35 H — und macht ebenso stark die am Kranze umlaufende wulstartige Verstärkung. Als Krümmungsradius für die schwachgekrümmten Theile der Ellipse nimmt man am einfachsten $^3/_4$ H resp. $^3/_4$ (0,7 H) und rundet in der dazu rechtwinkligen Axe mit kleinen, den umschreibenden Kreis berührenden Kreisbögen ab.

Die Schweifung der Arme erhöht nicht unwesentlich die Herstellungskosten der Modelle, ist aber insofern von großem Werth, als man verhindert, daß bei der langsameren Abkühlung und dem späteren Schwinden der Nabe die Arme nicht so leicht reißen oder springen, da die geschweiften Arme dem Zusammenziehen und Drehen der Nabe nachgeben. Die Krümmung der Arme braucht deshalb auch nicht so stark zu sein, wie es manche Constructeure für nothwendig halten und wie es in Bezug auf Materialersparniß ungünstig ist. Wir schlagen deshalb folgende einfache Construction vor: Wenn CF die Richtung eines ideellen geraden

Digitized by Google

Armes ist, so ziehe man von C aus eine Senkrechte zu CF, mache CJ = 0,75 R und ziehe von J als Mittelpunkt aus die Mittellinie CE des geschweiften Armes; alsdann trägt man in Richtung der Krümmungsradien zu beiden Seiten der Linie CE die halbe Armhöhe 0,5 H an der Nabe und die halbe Armhöhe 0,35 H am Kranze auf und zeichnet die Conturen des Armes als Kreisbögen, deren Mittelpunkte in Richtung von EJ liegen und beziehentlich etwas größer und kleiner sind als 0,75 R. Den Anschluß der Arme an Kranz und Nabe bewirkt man durch geeignete Abrundung der hohlen Ecken und giebt der Nabe (Querschnitt, Fig. 3) ebenfalls eine wulstartige Verstärkung.

Die Nabe ist wie bei jedem anderen auf einer cylindrischen Welle anzuordnenden derartigen Gegenstande construirt. Es ist eine nach beiden Enden hin schwach verjüngte Hülse, die eine der zu übertragenden Kraft entsprechende Stärke und Länge haben muß, welche im Innern ausgebohrt und an den Endflächen abgedreht wird und die zur Befestigung nöthige Keilnut enthält. —

Insofern als die nach einem und demselben Modelle abzugießenden Riemenscheiben oft den verschiedensten Zwecken zu dienen haben, unter den verschiedensten Verhältnissen anzuordnen sind; da ferner die Durchmesser und Breiten der Riemenscheiben einerseits und die Wellenstärken andererseits oft in gar keinem theoretischen Zusammenhange stehen: so gestaltet sich die Arbeit der Construction eines rationellen Riemenscheibenmodelles durchaus nicht so einfach, wie es dem Gegenstande nach für den ersten Blick erscheint — denn man fertigt in der Regel nicht ein so theures Modell an, um es nur für einen bestimmten Fall allein zu verwenden; man will vielmehr, daß danach, vielleicht mit geringer, das Modell nicht schädigender Veränderung Riemenscheiben für verschiedene Zwecke abgegossen werden können.

Streng genommen müßte man eine Anzahl Modelle haben, welche einmal nach der Größe der Durchmesser in gehöriger Abstufung stehen, andererseits aber müßten für eine jede solche Größe wieder Scheiben vorhanden sein, welche in Bezug auf Breite und Stärke der Querschnittsdimensionen eine den praktischen Bedürfnissen entsprechende Abstufung darbieten. Um nun diese hiernach nöthige große Anzahl der Modelle in etwas zu verringern, construirt man für jeden Durchmesser zwei, höchstens drei Scheiben verschiedener Breite und Stärke und giebt der stärkeren solche Dimensionen, daß eventuell eine für den betreffenden Durchmesser als Maximalkraft zu betrachtende Kraft übertragen werden kann. Machen sich dann einmal Scheiben nöthig, die zwischen den vorhandenen Modellen einer Größe liegen, so benutzt man eines von diesen, setzt aber eine für den vorliegenden Fall passende Nabe mit entsprechender Kernmarke auf, verstärkt eventuell den Kranz durch Umlegen von Holz oder Pappe und sticht, wenn der Kranz zu breit sein sollte, am Gußstücke denselben auf die erforderliche Breite ab.

Ebenso hilft man sich durch unwesentliche Modellveränderungen, wenn die Riemenscheibe getheilt oder mit getheilter Nabe gefertigt werden soll, oder wenn sonstige außergewöhnliche Bestandtheile — Spurkränze, Keilverstärkungen 2c. — nothwendig sind. —

Für die Verhältnisse der Riemenscheiben haben wir mit Rücksicht auf rationelle Construction und Ausführung, geprüft durch den Vergleich mit vorhandenen guten Objecten, folgende allgemeinen — theils rationellen, theils empirischen —

Digitized by Google

Formeln gefunden, bemerken jedoch, daß dieselben für abweichende Verhältnisse einer gehörigen Correction unterworfen werden müssen.

Es bedeutet in Millimeter: R = Halbmesser der Riemenscheibe, b = Breite des Riemens und b = Durchmesser der Welle.

Die Breite des Riemenscheibenkranzes sei dann:

$$b_1 = 10 + 1{,}1\,b \ldots . \quad (44).$$

Die Höhe der Wölbung:

$$p = 2 + 0{,}02\,b \ldots . \quad (45).$$

Die Stärke des Kranzes am Rande:

$$s = 4 + 0{,}01\left(b + \frac{R}{4}\right) \ldots \quad (46);$$

die Stärke s_1 in der Mitte macht man dann ungefähr $s_1 = 2{,}2 \,.\, s$, jedenfalls aber so, daß an der inneren Seite des Kranzes zwei Kegelflächen mit voneinander gekehrten Spitzen entstehen und so das Ausheben des Modelles aus der Form möglich ist.

Die Anzahl der Arme wählt man proportional dem Halbmesser und im umgekehrten Verhältnisse zur Riemenbreite, damit die im umgekehrten Verhältnisse zur Armzahl stehenden Querschnitte passende Dimensionen erhalten:

$$A = 3 + 0{,}5\,\frac{R}{b} \ldots \quad (47).$$

Die Arme einer Riemenscheibe sind strenggenommen und meist gleichzeitig auf sehr verschiedene Art in Anspruch genommen, vorwiegend jedoch auf Biegung, und wir wollen deshalb die Armhöhe (H) an der Wurzel (Nabe), auf welche wir die übrigen Armdimensionen bezogen haben, auf Grund ihrer Abhängigkeit von der Größe der zu übertragenden Kraft durch den bekannten Scheibenhalbmesser und den von der Inanspruchnahme bedingten Riemenquerschnitt ausdrücken.

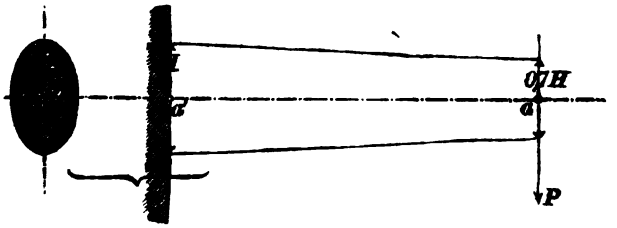


Fig. 188.

Betrachten wir den Arm von der Länge = R als einen geraden abgestutzten Kegel mit elliptischem Querschnitte und nehmen wir an, daß sich die ganze im Umfange der Scheibe enthaltene Kraft P auf die Hälfte ($\frac{1}{2}$ A) der Armzahl vertheilt, so ist am Ende a eines Armes die Normal-Biegungskraft

$$P_1 = \frac{P}{0{,}5\,A} = \frac{2\,.\,P}{A}$$

wirksam; dieselbe hat einen Hebelarm l = R und der Querschnittsmodulus ist, wenn die kleine Halbaxe der Ellipse gleich $\frac{1}{2}$ der großen ist·

$$q = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{H}{2} \cdot H^2 = \frac{\pi}{64} H^3.$$

Digitized by Google

Ist außerdem die zulässige Spannung in dem Materiale (Gußeisen) der Arme $s = s_0$, so heißt die Grundformel (16) pag. 48

$$Pl = qs;$$

für den vorliegenden Fall:

$$\frac{2P \cdot R}{A} = \frac{\pi}{64} H^3 s_0;$$

und es ist:

$$P = \frac{\pi}{2 \cdot 64} \cdot \frac{A}{R} \cdot H^3 s_0.$$

Die Kraft P, welche ein Riemen von der Breite b und der Stärke δ überträgt, finden wir aus Frml. (33 u. 34), wenn wir einmal für f und α geeignete, den ungünstigsten Verhältnissen entsprechende Zahlenwerthe einführen. In Frml. (33)

$$T = P \cdot \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}$$

sei $f = 0{,}26$ und $\alpha = 0{,}86\pi$. Dann wird $f\alpha = 0{,}7$ und

$$\log e^{f\alpha} = 0{,}7 \cdot 0{,}4343 = 0{,}304$$

$$e^{f\alpha} = 2$$

$$T = 2P$$

oder, wie wir s. Z. annahmen:

$$\mathfrak{T} = 1{,}1\,T = 2{,}2\,P = b\delta s_z,$$

wenn wir mit s_z die zulässige Zugspannung des Leder-Riemens bezeichnen. Setzen wir diesen Werth von P in die obige Gleichung ein, so entsteht:

$$\frac{\pi}{2 \cdot 64} \cdot \frac{A}{R} \cdot H^3 s_0 = \frac{b \cdot \delta \cdot s_z}{2{,}2}$$

$$H^3 = \frac{2 \cdot 64}{2{,}2 \cdot \pi} \cdot \frac{R \cdot b \cdot \delta}{A} \cdot \frac{s_z}{s_0}$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 64}{2{,}2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{Rb\delta}{A} \cdot \frac{s_z}{s_0}}$$

$$H = 2{,}6 \sqrt[3]{\frac{Rb\delta}{A} \cdot \frac{s_z}{s_0}} \quad \ldots \quad (48)$$

Hierin setzt man für einfache Lederriemen:

$$s_z = 0{,}2 \div 0{,}25;\ \text{i/M: } s_z = 0{,}2^k \text{ pr. } \square^{mm};$$

für doppelte Riemen:

$$s_z = 0{,}16 \div 0{,}2;\ \text{i/M: } s_z = 0{,}16^k \text{ „ „}$$

Ebenso setzten wir bei Scheiben für einfache Riemen, also für schwächere Scheiben überhaupt:

$$s_0 = 2{,}5 \div 1{,}5;\ \text{i/M: } s_0 = 2^k \text{ pr. } \square^{mm}$$

und für Scheiben zu Doppelriemen:

$$s_0 = 2{,}0 \div 1{,}0;\ \text{i/M: } s_0 = 1{,}7^k \text{ „ „}$$

Außerdem ist $A = 3 + 0{,}5\,\frac{R}{b}$ und bei einfachen Riemen:

$$\delta = 3 \div 7;\ \text{i/M: } \delta = 5^{mm},$$

bei Doppelriemen im Mittel: $\delta = 10^{mm}$. Wir können demnach für gewöhnliche Verhältnisse Frml. (48) der Armhöhe noch zu folgenden für Riemenscheiben mit einfachen Riemen:

Digitized by Google

$$H_1 = 2 \sqrt[3]{\frac{Rb}{3 + 0{,}5 \frac{R}{b}}} \quad \ldots . \quad (48^a)$$

und für Doppelriemen:

$$H_2 = 2{,}5 \sqrt[3]{\frac{Rb}{3 + 0{,}5 \frac{R}{b}}} \quad \ldots \quad (48^b)$$

ausführen.

Anmerkung. Giebt man einer Riemenscheibe eine andere Anzahl Arme, als nach Frml. (47) berechnet wird, so hat man bei der Berechnung der Armhöhe H nach Frml. (48^a) und (48^b) anstatt des Nenners $\left(3 + 0{,}5 \frac{R}{b}\right)$ die angenommene Anzahl Arme zusetzen.

Die Nabe bekommt eine Länge:

$$L = b + 0{,}05\, R \gtrless b_1 \quad \ldots . \quad (49)$$

und am Ende eine Wandstärke:

$$w = 10 + 0{,}2\,(b + H) \quad \ldots \quad (50),$$

die Keilnut in derselben eine Breite:

$$k = 5 + 0{,}14\,(b + H) \quad \ldots \quad (51).$$

Das Beispiel Fig. 3, Bl. LXXI ist eine Riemenscheibe von den am häufigsten verlangten Größen; sie hat einen Durchmesser von 700 mm und ist für einfache Riemen bis zu 100 mm Breite zu verwenden, während, wenn die Welle, auf welche dieselbe aufgesteckt werden soll, stärker als 55 mm ist, eine größere Nabe aufgesetzt werden muß. —

Fig. 4, Bl. LXXI ist construirt für 300 mm Durchmesser, 100 mm Riemenbreite und eine Welle von 80 mm Durchmesser, also für ziemlich abnorme Verhältnisse insofern, als eine schmiedeiserne Welle von obiger Stärke nicht ihre ganze Kraft in einen einfachen Riemen von 100 mm Breite abgeben kann. Es ist aber nichtsdestoweniger dieser Fall in der Praxis sehr oft gegeben, und daher kommt es, daß Riemenscheiben unter einander ganz wesentlich in ihren Verhältnissen abweichen können.

Die Arme werden in Folge der großen Nabe hier so kurz, daß man fast besser thut, anstatt der berechneten 4 nur einen einzigen anzuordnen, d. h. die einzelnen Arme zusammen durch eine volle Scheibe zu ersetzen, wie es in der oberen Hälfte der Fig. 4 angenommen ist. Ueberdies ist hier der Fußpunkt der Mittellinie der geschweiften Arme aus dem Wellencentrum in die Peripherie der Welle verlegt, der Mittelpunktskreis dieser Bögen aber in der Entfernung $= {}^3{}_4\,R$ vom Scheibenmittel belassen, sodaß die Arme bei ihrer geringen Länge auch etwas stärkere Krümmung erhalten.

Fig. 1, Bl. LXXII stellt eine sehr leichte Scheibe — für einen 70 mm breiten Riemen — dar, hat aber einen Durchmesser von 1400 mm.

Die Wandstärke der Nabe wäre hier bei 45 mm Wellendurchmesser nach Frml. (50) zu 27 mm ausgefallen; wir haben aber sogleich die Nabe 110 mm groß genommen, damit dasselbe Modell sofort auch für stärkere (bis 60 mm) Wellen verwendet werden

Digitized by Google

kann, und die geringe Vermehrung der Wandstärke beim Gesammtgewicht der Riemenscheibe macht nicht viel aus.

Fig. 2, Bl. LXXII zeigt eine Scheibe, welche denselben Durchmesser hat wie die vorhergehende, aber für einen Doppelriemen von 140^{mm} Breite construirt ist. Diese letztere Bedingung veranlaßt, daß die Arme im vorliegenden Beispiele der Zahl nach geringer, um so mehr aber in den Querschnittsdimensionen stärker sind, wie überhaupt die ganze Scheibe den Charakter eines starken, schweren Organes an sich trägt. Die fragliche Riemenscheibe bietet außerdem in jedem ihrer Haupttheile Neues und Eigenthümliches dar. Die Nabe ist getheilt gegossen, weil gerade Arme angenommen wurden. Da nämlich, wie oben erwähnt, gerade Arme bei solchen Scheiben und Rädern theils beim Schwinden nach dem Gusse, theils später in Folge der zurückgebliebenen Gußspannungen, namentlich am Kranze, gern reißen, bezhtl. springen, so muß man, wenn nicht geschweifte Arme angeordnet werden sollen, die Nabe getheilt gießen. Man setzt zu diesem Zwecke am Modelle $4 \div 5^{mm}$ starke Scheiben quer über die Nabe auf, bringt in die hierdurch in der Form entstehende schwache Höhlung ein die Nabe und den Bohrungskern quer durchschneidendes Blech von der Größe der Scheiben ein, sodaß das von zwei Seiten her fließende Eisen in der Nabe nicht zusammentreten kann, sondern am Gußstücke vielmehr eine Oeffnung von etwas mehr als der Stärke des Bleches stehen bleibt. Da aber jede Nabenhälfte mit der Hälfte der Armzahl allein in Zusammenhang steht, so können diese nicht abreißen; es wird nur die Theilfuge in der Nabe durch das Schwinden der Arme entsprechend erweitert.

Bevor nun eine solche Scheibe auf die Drehbank kommt, wird diese Fuge mit Blei oder einer entsprecheuden Composition ausgegossen, nachdem die Nabe vorher etwas angewärmt und die Begrenzungen der Nabenfuge mit feuchter Erde oder Lehm und Papier zugesetzt worden sind. Alsdann dreht man die für zwei warm aufzuziehende schmiedeiserne Ringe am Modelle ausgesparten Winkelringe an den beiden Nabenenden ab und steckt sofort die rothwarm gemachten Ringe auf.

Schließlich wird das Ganze behandelt wie jede andere Riemenscheibe mit ungetheilter Nabe: an der Außenseite des Kranzes abgedreht, dieser selbst auf die erforderliche Breite abgestochen, die Nabe ausgebohrt und an den Enden abgedreht und die Keilnut auf der Stoßmaschine eingestoßen oder von Hand eingehauen.

Die warm aufgezogenen Verbindungsringe, über deren Verbindungsmethode wir uns pag. 164, Bd. I und Bl. XXIV weiter verbreitet haben, bekommen womöglich einen Minimalquerschnitt in Form eines Rechtecks, dessen Seite parallel zur Ringaxe:

$$m = 0{,}3 \sqrt{L w} \quad \ldots \quad (52)$$

und dessen radiale Dimension $n = 0{,}75\ m$ gemacht werden kann. Dabei ist L = Nabenlänge und w = Nabenstärke. Bei großen Rädern und Scheiben giebt man den Naben, welche getheilt gegossen werden sollen, besser etwas mehr Wandstärke, damit zwischen Ring und Bohrung entweder noch genug Gußwand stehen bleibt oder andererseits die Ringe radial nicht zu weit vorstehen.

Auch der Kranz hat im vorliegenden Beispiele seine Eigenthümlichkeit: er ist an der einen Seite mit einem nach außen vorstehenden Rande oder sogen. Borde versehen, da wir uns gedacht haben, daß die fragliche Riemenscheibe zu einer stehenden Welle gehören soll. In solchem Falle empfiehlt es sich stets, die

Digitized by Google

Scheiben mit Bord zu versehen, da, wiewohl für gewöhnlich der straffgespannte Riemen sich immer auf dem höchsten Punkte der Wölbung hält, es doch bequemer und sicherer ist, wenn man einer durch das Riemengewicht veranlaßten Abwärtsbewegung begegnet.

Die Breite des Randes macht man in den meisten Fällen genügend zu:

$$B = 15 + 0{,}2\,b \quad \ldots \quad (53)$$

und die Dicke desselben an der äußeren Peripherie circa = 0,9 s, während man dem Kranze solcher Scheiben am Rande eine größere Stärke, nämlich ungefähr = 1,2 s giebt.

Außer für horizontal laufende Riemenscheiben machen sich einseitige Borde an verticalen Scheiben noch nöthig, wenn man verhindern will, daß der Riemen nach einer Seite hin, wo vielleicht andere Organe sich befinden, in denen sich der Riemen verwickeln kann. An beiden Seiten der Riemenscheiben bringt man Borde an, wenn dieselben sehr schnell oder unruhig laufen (bei Ventilatoren, Kreissägen 2c.) und z. B. auch bei Aufzügen mit Frictionsbetrieb, wo der Riemen außer dem Betriebe schlaff ist und erst beim Aufziehen an die Scheibe angezogen wird.

Zu Riemenscheiben mit Bord verwendet man gewöhnliche Riemenscheibenmodelle und steckt den den Bord bildenden Ring nur vorübergehend an.

Fig. 3, Bl. LXXII. Während man die Riemenscheiben meist nur dann mit getheilter Nabe gießt, wenn dieselben eine beträchtliche Größe haben und mit geraden Armen ausgestattet sind, ist man öfter noch genöthigt, die ganze Scheibe aus zwei getrennten Theilen zu fertigen, und zwar entweder, wenn die betreffende Scheibe nachträglich auf einer Transmissionswelle befestigt werden soll, ohne daß man diese selbst aus den Lagern heraus und eventuell darauf befindliche andere Riemenscheiben und Räder losnimmt, oder wenn die Scheibe im Ganzen so groß ist, daß sie sowohl bei der Herstellung in der Werkstatt, als auch beim Transporte (auf der Eisenbahn) beschwerlich und kostspielig, bezhtl. sogar unmöglich zu handhaben ist.

Das in Rede stehende Beispiel Fig. 3 hat 2,4^{m} Durchmesser und eine Kranzbreite entsprechend einem 170^{mm} breiten Doppelriemen. Die Welle von 90^{mm} Durchmesser ist so stark, daß sie als lange Transmissionswelle (auf die Größe der Verdrehung berechnet) gerade so viel Kraft (170^{k}) aufnehmen kann, als der Riemen überträgt.

Die getheilten Riemenscheiben werden auf verschiedene Weise fabricirt. Man fertigt entweder das Modell — wenigstens dasjenige des Kranzes — im Ganzen und setzt, ähnlich wie bei den Riemenscheiben mit getheilter Nabe, an die Nabe Scheiben an, sowie an die Nabe und an den Kranz Lappen für das spätere Zusammenschrauben. Diese Methode ist deshalb gut, weil in solchem Falle eher ein vollkommen kreisrunder Kranz schon beim Gusse entsteht, da sich das Modell weniger leicht verziehen und werfen kann, als wenn es nur zur Hälfte besteht. Zudem kann man hierbei ein vorhandenes passendes Riemenscheibenmodell verwenden und braucht nur die erwähnten Veränderungen anzubringen; man kann ferner die Scheibe im Ganzen abdrehen und ausbohren — wenn die Größe der Scheibe dies zuläßt — und läßt zu diesem Zwecke sowohl am Kranze als auch an der Nabe eine schwache, 5 ÷ 12^{mm} dicke Gußwand stehen, welche erst nach der Bearbeitung aufgebohrt und zersprengt wird. An der Nabe kann man schließlich

Digitized by Google

dieser Gußwand ganz entfernen, die Fugenflächen bearbeiten und legt dann entsprechend starke Holz- oder Blechscheiben bei; am Kranze dagegen durchbohrt man diese Gußwand nur mit einer Reihe $4 \div 7^{mm}$ weiter Löcher, sprengt die zwischen den Löchern stehen gebliebenen Gußverbindungen auseinander und läßt den Bruch in seiner natürlichen Fläche bestehen, so daß, wenn man die auseinander gesprengten Scheibentheile wieder gehörig zusammensetzt, der Kranz unverändert als ein voller Kreis erscheint, ohne daß man nöthig hat, etwas beizulegen.

Im vorliegenden Beispiele Fig. 3, Bl. LXXII haben wir die andere Herstellungs-Methode zu Grunde gelegt. Wir haben angenommen, daß entweder das Modell nur zur Hälfte vorhanden ist oder daß dasselbe im Ganzen vorhanden und eingeformt, und in der Form dann die eine Hälfte „abgedämmt" wird. Selbstverständlich wird man, wenn letzteres der Fall sein sollte, mit der später abzudämmenden Hälfte nicht die vollständige Formarbeit ausführen; man wird auch an den Theilstellen der Nabe und des Kranzes in der Form etwas mehr aussparen, damit am Gußstücke für die Zusammenarbeitung dieser Flächen genug Material stehen bleibt.

Wie auch bei getheilten Schwung- und Zahnrädern behaut und feilt man hier zuerst die Theilfugenflächen, dann schraubt man die Theile zusammen, dreht die Scheibe an Kranz und Nabe ab und bohrt die Nabe aus.

In unserem Beispiele hat sich die Construction und Anfertigung noch insofern etwas schwierig gestaltet, als wir eine ungerade Anzahl — sieben — Arme angenommen haben. In Folge dessen sahen wir uns genöthigt, wenn wir die der Theilfuge der Nabe zunächstliegenden Arme nicht schwächen wollten, die Fuge selbst nach einer gebrochenen Linie anzuordnen, was natürlich die Bearbeitung etwas erschwert. Ferner ist hier zu berücksichtigen, daß die beiden Kranzfugen je zwischen dieselben zwei Arme zu liegen kommen müssen, zwischen denen die Theilung der Nabe liegt, und deshalb erreicht man bei einer ungeraden Anzahl geschweifter Arme auch die Erleichterung für die Bearbeitung nicht, daß sämmtliche Theilfugen in eine Ebene zu liegen kommen.

Die Stärke der Lappen für die Verbindungsschrauben haben wir zu 0,7 w angenommen, bemerken jedoch, daß man unter Umständen diejenigen am Kranze etwas schwächer halten kann. Die Durchmesser der Verbindungsschrauben sind bestimmt nach:

$$d_1 = 5 + 0{,}2\sqrt{Lw} \quad \ldots \quad (54).$$

Endlich weisen wir noch darauf hin, daß die Arme bei dieser großen Riemenscheibe mittelst Seitenrippen verstärkt worden sind. Wie uns der mittlere Querschnitt AB, Fig. 3* zeigt, liegt derselbe gerade in einem Kreise vom Durchmesser = H, und es dient die Verstärkung vorwiegend nur zur seitlichen Aussteifung der Arme, während die Festigkeit derselben in Richtung der Mittelebene des Armsystemes durch die Rippen unwesentlich vermehrt wird, wovon man sich durch Vergleichung der Querschnittsmoduli des Ellipsenquerschnittes ohne Rippen und desselben mit Rippen leicht überzeugen kann.

Fig. 4, Bl. LXXII. Nicht selten vereinigt man eine Riemenscheibe mit dem Schwungrade einer Dampfmaschine oder wohl gar mit einem Wasser- oder Zahnrade. Dann braucht man nicht die Riemenscheibe in allen dreien ihrer wesentlichen Theile auszuführen: man kann vielmehr Armsystem und Nabe des Schwung-,

Digitized by Google

Wasser- oder Zahnrades benutzen, indem man einen in einem Stücke gegossenen Riemenscheibenkranz oder, bei größeren Scheiben, einen getheilten dergleichen an das vorhandene Rad anschraubt.

In genannter Fig. 4 ist die theilweise Ansicht eines solchen getheilten Riemenscheibenkranzes in $^1/_{20}$ wirklicher Größe gezeichnet und in Fig. 4ª der Querschnitt desselben in $^1/_5$ wirkl. Gr. dargestellt.

Es ist hierbei vorausgesetzt, daß der Kranz an ein Schwungrad mit 6 Armen, deren jeder zu diesem Zwecke mit Lappen von der Form und Größe derjenigen A des Kranzes Fig. 4 versehen ist, befestigt werden soll, daß ferner der Riemenscheibenkranz 3ᵐ Durchmesser und der Doppelriemen 250ᵐᵐ Breite hat. Jeder Kranztheil umfaßt $^1/_3$ des vollständigen Kranzes und kann also an zwei Armen zugleich angeschraubt werden. Das Profil des Kranzes ist nach außen durch zwei unter einem stumpfen Winkel einander schneidende und durch einen flachen Kreisbogen ineinander übergeführte gerade Linien begrenzt, an der inneren Seite aber durch eine einzige Gerade so, daß am äußeren Rande eine Kranzstärke s, am inneren, dem Rade zugekehrten eine solche 2,2 s entsteht; ebendaselbst ist noch eine rings umlaufende Rippe von der Stärke 2,7 s angesetzt, deren Höhe man den Umständen gemäß zu wählen hat.

Die Größe der Lappen A ist so bemessen, daß mindestens zwei Schrauben bequem eingebracht und angezogen werden können; ihre Stärke beträgt circa 3 s. Dasselbe gilt auch von den Lappen B, mittelst deren man die einzelnen Theile oder Sectoren aneinander schraubt. Sämmtliche Lappen B werden zuerst so weit bearbeitet, daß die einzelnen Kranztheile zusammen annähernd rund gehen, alsdann dreht man den zusammengeschraubten Kranz sowie die äußeren Flächen der Lappen A auf einer Plandrehbank ab. Dasselbe muß selbstverständlich auch mit den correspondirenden Lappen am Rade geschehen sein, damit schließlich der Riemenscheibenkranz nicht „weist" oder „schleudert".

Fig. 5, Bl. LXXII endlich bringt noch eine sehr häufig zur Anwendung kommende Art Riemenscheiben, sogen. „Fest- und Losscheiben", zur Darstellung. Es sind dies zwei genau gleich große und gleich breite Riemenscheiben A und B, von denen die Letztere fest auf der zugehörigen Welle aufgekeilt ist, während die andere, die sogen. Losscheibe, sich auf der Welle dreht, indem sie sich einerseits mit ihrer ganz wenig gegen den Kranz vorstehenden Nabe an diejenige der Festscheibe anlegt und andererseits durch einen Stellring mit versenkter Schraube an Längsbewegung gehindert ist. Die Nabe der Losscheibe ist mit einer Oelvorrichtung zu versehen und bekommt bei guten Ausführungen ein Rothguß oder Weißmetallfutter.

Die in Rede stehenden Scheiben haben 300ᵐᵐ Durchmesser und 50ᵐᵐ Riemenbreite. Auf der gegenüberstehend zu denkenden Betriebswelle ist eine Scheibe von der Breite $= 2b_1$ anzubringen, und der Riemen wird durch einen Riemenführer und Ausrückung abwechselnd auf die Los- und Festscheibe verlegt, je nachdem man die durch die Welle a betriebene Maschine in oder außer Thätigkeit haben will.

Die Riemen-Ausleger oder „Riemenführer" sind entweder Hebel mit aus Rundeisen gebogener Gabel, oder es sind parallel zur Welle geführte Schienen, an welchen die Gabeln angeschraubt werden. Für die Anordnung der Riemenführer ist als wesentlich die Bedingung zu erfüllen, daß die Gabel möglichst in der Nähe

Digitized by Google

der Riemenscheiben stehen und daß dieselbe jederzeit an dem auflaufenden Riemenstücke anfassen muß.

Dem Futter der Losscheibe giebt man eine Stärke:

$$w_1 = 5 + 0{,}04\, b. —$$

Daß wir uns im Vorstehenden lediglich auf Riemenscheiben beschränkt und die Schnurscheiben außer Betracht gelassen haben, glauben wir damit genügend zu begründen, indem wir diese einmal theoretisch als nur in untergeordnetem Range stehend bezeichnen, zum Andern aber bemerken, daß die Arme und Nabe derselben ganz ebenso bestimmt und construirt werden können, wie die betreffenden Theile der Riemenscheiben. Nur der Kranz ist in seiner Querschnittsform abweichend, bietet aber der Construction gar keine Schwierigkeiten dar, zumal wir ja auch bei den Drahtseilscheiben eine ähnliche Construction kennen lernen werden. Von letzteren unterscheiden sich die Schnurscheiben-Kranzprofile wesentlich nur insofern, als die Spur bei den Drahtseilrollen am Grunde nach einem verhältnißmäßig großen Bogen abgerundet wird, während die Scheiben für Baumwollen-, Hanf- und Lederschnüre am Grunde in eine spitz auslaufende Rille ausgehen und so das Zugorgan zwischen den geneigten Seiten- (Kegel-) flächen festklemmen. —

Die Construction der Stufenscheiben ist nach dem über diese und über die Riemenscheiben im Allgemeinen Gesagten auch nicht schwer und gehört außerdem in das Gebiet des Werkzeugmaschinenbau's. —

Heut' zu Tage noch fertigt man nicht selten auch kleinere Riemenscheiben aus Holz. Dieselben sind natürlich nicht so dauerhaft als eiserne, geben aber einen etwas größeren Reibungscoefficienten und sind namentlich da zu empfehlen, wo man wegen Unkenntniß der zum Betriebe eventuell einer neu construirten Maschine erforderlichen Kraft die Minimal-Riemenscheibengröße ausprobiren muß, indem man von der Holzscheibe leicht etwas abdrehen oder auffatteln kann.

Die hölzernen Riemenscheiben werden entweder aus hartem Holze in einem Stücke gefertigt und erhalten an den Seitenflächen blecherne oder gußeiserne, runde oder viereckige Platten — letztere mit einer niedrigen Nabe oder einer in das Innere der Scheibe eindringenden Hülse versehen — an denen der Holzkörper mittelst durchgehender Schrauben befestigt wird, oder aber man verleimt und verdübelt die Holzscheibe aus einzelnen Pfosten und armirt sie zum Zwecke des Aufkeilens auf die Welle nach der vorgenannten Weise. Auch getheilte Holzscheiben kann man auf diese Weise ohne Schwierigkeit herstellen.

b) Drahtseiltrieb.

Die Entstehung des Drahtseiltriebes datirt von dem Anfange der fünfziger Jahre unseres Jahrhunderts. Derselbe wurde von G. A. Hirn in Mühlhausen*) im Elsaß zuerst eingeführt und ging hervor aus dem Bedürfnisse, mechanische Arbeiten auch auf größere Entfernungen, als bisher mittelst Riementriebes und Wellenleitungen erreicht worden war, zu übertragen, und seitdem hat sich der Drahtseiltrieb schon so allgemein eingebürgert, daß die Erfindung desselben als ein

*) Bulletin de la société d'encouragement und Bulletin de la société industrielle de Mulhouse 1858.

Digitized by Google

wichtiges Ereigniß angesehen werden muß, insofern dadurch der Ausbreitung und Erweiterung der rationellen Industrie ein wesentliches Förderungsmittel geboten worden ist.

Theoretisch erscheint es zwar nicht unmöglich, durch combinirte Riementriebe oder (unterirdische) Wellenleitungen Kräfte mit drehender Bewegung auch auf größere Entfernungen hin zu übertragen; es werden jedoch damit niemals so entfernte Ziele erreicht als durch den Drahtseiltrieb, und außerdem absorbiren dann — abgesehen von den erheblich größeren Kosten und sonstigen speciellen Hindernissen — die schädlichen Widerstände einer langen Wellenleitung einen so hohen Prozentsatz der Bewegungsarbeit, daß zu den Zinsen des beträchtlichen Anlagecapitals auch noch ganz bedeutende Betriebs- und Unterhaltungskosten hinzu kommen würden, wenn nicht gar durch den Umstand, daß die Widerstände die ganze in einen Riemen oder einen Wellenstrang höchstens einzuführende Arbeit aufbrauchen, diese Kraftübertragung unmöglich gemacht wird. Bei Wellen z. B. würde in Folge des Eigengewichtes derselben — abgesehen von Kupplungen und anderen Organen — bei ÷ 1,5 Kilometer Länge die Zapfenreibung dieselbe Kraft absorbiren, welche auf Grund der Torsionsfestigkeit überhaupt von der Welle aufgenommen werden kann, wovon man sich durch eine bezügliche Rechnung leicht überzeugen kann, und zudem würde man in Folge der beträchtlichen Verwindung noch einen sehr unruhigen Gang erhalten.

Es ist zwar selbstverständlich, daß die Reibungsverluste auch der Fortsetzung eines Drahtseiltriebes ein Ziel setzen oder zum Mindesten denselben schließlich als unvortheilhaft erscheinen lassen; allein die Natur dieser Transmissionsweise ist der Art, daß, wenn man die Theile desselben möglichst rationell construirt, die Grenze des vortheilhaften Betriebes auf 2 ÷ 3 Kilometer und weiter hinaus gerückt werden kann. Dabei betragen die Anlagekosten unter Umständen nur den zehnten Theil derjenigen einer Wellenleitung und der Effectverlust circa 1 bis 1,5% der Nutzleistung.

Die Anordnung eines einfachen Drahtseiltriebes wird durch beistehende Fig. 189 veranschaulicht.

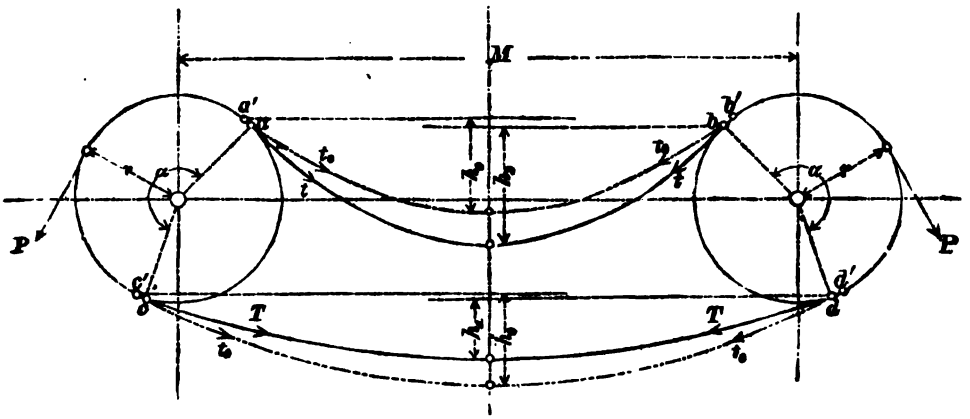


Fig. 189.

Derselbe besteht aus zwei gleich (selten verschieden) großen Seilscheiben oder Rollen vom Halbmesser r. deren Drehaxen entweder in derselben

Digitized by Google

Horizontalen liegen oder sich in verschiedenen Höhen über dem Horizonte befinden. Diese Seilscheiben haben am Kranze eine Spur oder Rille, in welche das endlose Drahtseil eingelegt, in Folge seines Eigengewichtes fest an den Umfang der Rolle, soweit es denselben umspannt, angedrückt wird, und vermittelst der hierdurch entstandenen Reibung setzt das durch die Drehung der einen Rolle in Umlauf gesetzte Seil die andere in drehende Bewegung.

Es hat hiernach der Drahtseiltrieb Aehnlichkeit mit dem Riementriebe, ist aber insofern von diesem wesentlich verschieden, als beim Riementrieb das Zugorgan straff angespannt werden muß, während das Drahtseil im Allgemeinen lose oder schlaff zwischen den Seilscheiben hängt und in Folge seines hohen specifischen Gewichtes den zur Uebertragung nöthigen Reibungsdruck erzeugt.

Wenn man das endlose Seil auf die ruhenden Scheiben aufgelegt hat, so nimmt es in Folge der auf alle Theile desselben gleichstark einwirkenden Anziehung der Erde in den zwischen den Rollen liegenden Stücken eine nach Art der Kettenlinie gekrümmte Gestalt an, welche man die Seilcurve nennt; dieselbe schließt sich in den Endpunkten a, b, c und d stetig an die Kreisbogen an. Die Horizontalentfernung der Fußpunkte a, b und c, d ist bei beiden Seilcurven beinahe dieselbe; in Folge dessen sind die Pfeilhöhen der Kurven oder die Einsenkungen des führenden und des geführten Seilstückes im Ruhezustande im Allgemeinen von derselben Größe h_0, und die Seilstücke sind dann mit einer Intensität t_0 angespannt. Sobald nun eine Seilscheibe in Umdrehung versetzt wird und dabei die andere, der ein gewisser Widerstand P am Umfange der Rolle entgegensteht, an der Bewegung Theil zu nehmen genöthigt wird, so hebt sich das führende Seilstück in Folge der größeren Anspannung T, während sich das geführte mit Eintritt der geringeren Spannung t senkt, und im Zustande gleichförmiger Bewegung beobachten wir die bezüglichen Seilsenkungen h_1 und h_2.

Die charakteristische Eigenthümlichkeit, daß das Seil in einer der Größe der zu übertragenden Kraft (P) entsprechenden Weise schlaff zwischen den Scheiben hängt, bedingt, daß man für gewöhnlich das Zugorgan im geschlossenen Zustande über die vorstehenden Ränder der Rillen in diese einlegen kann, daß Schwankungen, Stöße und Vibrationen sich durch das schlaffe Seil noch viel weniger fortpflanzen als durch einen straffen Riemen — indem sich dadurch nur das führende Seil etwas hebt und senkt — daß man aber bei der Anlage auf die Größe der tiefsten Einsenkung insofern Rücksicht nehmen muß, als einestheils der Verkehr unter dem Seile durch dieses in der Regel nicht gestört werden darf, anderntheils auch vermieden werden muß, daß das Seil am Boden oder an Gegenständen auf demselben streift.

Nun ist klar, daß mit der Größe M des Rollenabstandes die Seilsenkung zunehmen wird, und insofern diese durch Terrain- und Verkehrsverhältnisse beschränkt ist, hat auch die Entfernung der Seilscheiben eine Grenze. Damit ist jedoch die Grenze der Drahtseiltransmission überhaupt noch nicht erreicht; denn entweder können die Seilstücke durch sogenannte Tragollen innerhalb ihrer Länge derart gestützt werden, daß die Seilsenkungen auf ein zulässiges Maß zurückgeführt werden, oder man setzt den ganzen Seiltrieb aus mehreren einfachen zusammen. Letzteres Verfahren, welches übrigens bei langen und starken Transmissionen vorgezogen wird, kommt in der Weise zur Ausführung, daß die Seilscheiben am Kranze mit

Digitized by Google

zwei nebeneinander liegenden Seilrillen versehen werden, oder daß man — wenn etwa die Axe einer solchen innerhalb der Strecke der ganzen Seiltransmission gelegenen Zwischenscheibe einen Theil der Arbeit an eine Maschine oder Fabrik abgiebt und man für die Weiterführung des Restes ein schwächeres Seil und kleinere Scheiben verwenden kann — auf der betr. Welle zwei Seilscheiben nebeneinander anordnet, wovon die eine das zu-, die andere das weiterführende Seil trägt. Zum Unterschiede von jenen Tragrollen kann man diese dann Arbeits- oder Ueberragrollen nennen; und ist (recht-) winklig auf die Richtung der Hauptleitung eine Zweigleitung anzulegen, so verbindet man die an der Zweigstelle gelegenen Seilscheibenwellen durch Kegel-Zahnräder.

Den Abstand der Seilscheiben wählt man bei kleinen Kräften nicht unter circa 15^m und bei großen mindestens $20 \div 30^m$, da man sonst keine genügende Einsenkung erhält. Das Maximum der Entfernung zweier Seilstützungen beträgt, wenn es aus anderen, localen Umständen zulässig ist, $90 \div 120^m$.

Ein wesentlicher Vorzug der Seiltransmission liegt nun auch darin, daß man denselben ohne Schwierigkeiten und ohne bedeutende Kosten sowohl schräg auf- und abwärts, über Berge, Häuser ꝛc. und, bei Anordnung geeigneter Leitrollen, auch in der Ebene unter beliebigen Winkeln verlegen kann.

Das glänzendste Beispiel davon, mit welcher Leichtigkeit selbst die kühnsten Ideen auf diesem Gebiete der Technik zur Ausführung gebracht werden können, liefert die Turbinenanlage in Schaffhausen in der Schweiz, wo das am Rheinfalle vorhandene Gefälle durch drei 200-pferdige Turbinen ausgenützt und durch eine über die ganze Stadt verzweigte Drahtseiltransmission für jeden Industriellen gegen einen verhältnißmäßig geringen Pacht verwendbar gemacht ist, und es dürfte vielleicht noch mehrere von der Natur mit unentgeltlicher Elementarkraft beschenkte Orte geben, denen ein ebenso intelligenter Unternehmer wie Herr Moser in Schaffhausen zu wünschen ist. —

Bevor wir nun in der Theorie des Drahtseiltriebes selbst eintreten, wollen wir uns zunächst mit den Zugorganen bekannt machen.

1) Die Transmissions-Drahtseile.

Die Seile, welche man beim Maschinenbetriebe überhaupt als Zugorgane verwendet, sind entweder organischer oder anorganischer Natur. Zu ersteren nimmt man als Rohstoff die durch „Hecheln" von der Strohfaser befreite Hanf- oder Leinfaser, oder auch die Faser der Baumwollenfrucht; die nichtorganischen Seile dagegen werden aus den zu Draht gezogenen Metallen: Eisen, Stahl und Messing gefertigt.

Die Drähte werden, ähnlich wie bei Hanfseilen die gezwirnten Faden, zu Litzen versponnen, indem man 3, 6, 8, 10 und mehr Drähte, die man sich auf ein kurzes Stück nebeneinander gelegt denken kann, zu einer Art Schraube mit $70 \div 80^0$ Steigungswinkel zusammendreht; 6, 10 und mehr solche Litzen geben dann — entweder in der vorgeschriebenen Weise abermals, aber mit entgegengesetzter Drehrichtung versponnen oder wie Gurten zu einem Bande verflochten oder, in einer Ebene parallel neben einander gelegt und streckenweis mittelst quer durchgesteckter Nieten verbunden — ein Drahtseil.

In der Technik überhaupt verwendet man die Drahtseile entweder als

Digitized by Google

stehende, stationäre (zu Drahtbrücken) oder als laufende Seile. Letztere kommen hier allein in Betracht und werden nach ihrer Bestimmung theils als Förderseile (für Schacht- und Bremsbergförderungen), theils als Treibseile (für Drahtseilbahnen und Transmissionen) bezeichnet. Die Förderseile sind endlich, einerseits an dem zu fördernden Gegenstande befestigt, andererseits mit einer Windetrommel verbunden, auf welche sich beim „Aufholen" das Seil auf-, und von der es sich beim „Hängen" abwickelt. Man verwendet dazu theils runde, gesponnene, theils, und namentlich bei großen Lasten, flache, geflochtene Seile. Alle laufenden Seile nehmen während des Betriebes abwechselnd eine annähernd geradlinige und eine nach dem Umfange der Scheibe resp. Trommel gekrümmte Gestalt an, müssen sich also fortwährend auf- und zubiegen. Durch die Biegung wird, wie bekannt, ein Theil der Prismenfasern — hier der Drähte — in der Längsrichtung gedehnt, ein anderer zusammengedrückt. Ist nun der Durchmesser des Seiles groß im Vergleich zum Radius der Krümmung, so leidet das Seil unter der fortwährenden Formänderung, und man erkennt schon jetzt, daß zwischen Seilstärke und Scheiben- resp. Trommelhalbmesser ein bestimmtes Verhältniß eingehalten werden muß. Eben deshalb sind aber die starken runden Seile besser durch breite, flache zu ersetzen, da alsdann die Seilscheiben nicht so groß zu sein brauchen.

Als Förderseile finden in der That die flachen Seile jetzt ziemlich rasche Verbreitung, während sie sich als Treibseile insofern weniger eignen dürften, als sie dem Winde eine zu große Fläche darbieten und in Folge dessen dann heftig schwanken werden.

Diese ebengemachte Beobachtung veranlaßt uns aber, den Durchmesser der runden Treibseile möglichst klein zu machen, ohne jedoch die nöthige Festigkeit Preis zu geben, und das kann bei gegebenem Widerstande nur durch die Wahl eines geeigneten Materiales erreicht werden. Deshalb fertigt man den Draht zu eisernen Seilen womöglich aus bestem schwedischen Holzkohleneisen; Förderseile macht man in neuer Zeit nicht selten auch aus Gußstahldraht, während Kupfer- und Messingdraht, ebenso Draht aus Phosphorbronze, für Seile keine namhafte Verwendung finden, da diese Stoffe wegen der geringeren Festigkeit zu schwere und überdies kostspielige Seile liefern.

Der Eisendraht hat nach Tab. I, pag. 14 u. 15 eine absolute Bruchfestigkeit von 70^k und kann per $\square^{mm}$ mit $27 \div 30^k$ belastet werden, ehe die Elasticitätsgrenze erreicht wird. Geglühter Draht ist zwar etwas biegsamer als ungeglühter, hat aber beim Glühen fast die Hälfte seiner Festigkeit verloren, ist fast gar nicht elastisch und eignet sich deshalb nicht zu Drahtseilen.

Die Treibseile werden meistens aus 6 Litzen zu je 6 Drähten gesponnen, sodaß also ein solches Seil aus 36 Drähten von 0,5 bis 3^{mm} Stärke besteht. Damit bei der durch die Kraftübertragung entstehenden Zugbeanspruchung und bei der in jedem neuen Seile eintretenden Streckung alle Drähte gleichmäßig belastet werden und nicht etwa einzelne reißen, gilt für die Herstelllung der Drahtseile als besonders wichtig die Bedingung, daß beim Spinnprozesse ganz genau gleiche Drahtlängen versponnen werden, daß die einzelnen Drähte alle möglichst dieselbe Spiralform bekommen und daß auch die Litzen überall in gleichen Abständen von der geometrischen Axe der Seilrichtung liegen.

Denken wir uns nun den Normalschnitt einer 6-drähtigen Litze aus concentrisch

Digitized by Google

um einen Punkt gelagerten, einander berührenden Kreisen (in Wirklichkeit sind es streng genommen Ellipsen) zusammengesetzt (Fig. 190), so sehen wir, daß innerhalb der Litzen ein hohler Raum frei bleibt, in welchen sich alsbald einzelne Drähte eindrücken und so aus ihrer richtigen Lage kommen würden. Um dies zu verhüten, gleichzeitig aber zu verhindern, daß sich die Drähte gegenseitig zerreiben und zerquetschen, und um den Drähten resp. Litzen schon beim Spinnen die gehörige Lage zu ertheilen, spinnt man in die einzelnen Litzen getheerten Hanf, sogenannte Seelen, ein und füllt auch das Seilinnere mit einer Hanfseele aus. Solche Drahtseile mit Hanfseelen haben eine bedeutend größere Dauerhaftigkeit als dergleichen ohne Hanfseele und sind daher als Treib- und Förderseile vorzüglich zu verwenden.

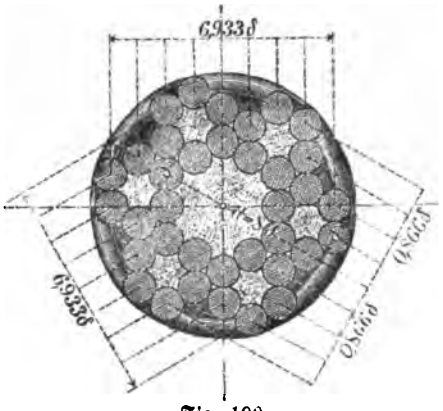


Fig. 190.

Man hat es wohl auch versucht, die Hohlräume der Litzen und des Seiles durch Drahtseelen auszufüllen, also, wie dort um eine Hanfschnur, hier um einen Draht herumzuspinnen. Allein der Augenschein lehrt uns, und die Erfahrung hat es bestätigt, daß solche Drahtseelen verhältnißmäßig zu stark in Anspruch genommen werden, und daß in Folge dessen die Seile, welchen man anfangs eine größere Tragfähigkeit zuerkennen mußte, später einen großen Theil derselben verlieren.

Da sowohl die Treibseile als auch die Förderseile dem zerstörenden Einflusse der Atmosphäre und deren Niederschlägen ausgesetzt sind, letztere auch fortwährend durch die Schachtwasser benetzt werden, so schützt man sie vor dem Rosten durch einen Leinöl-, resp. Theer- und Pechüberzug, den man von Zeit zu Zeit erneuert. Hierdurch bildet sich auch in den Seilrillen der Scheiben eine das Seil schonende Theerschicht.

Die Treibseile müssen nun in ihren Enden verbunden; d. h. sie müssen endlos gemacht werden; das geschieht, wie auch bei Hanftreibseilen, durch Verspließen der Enden. Da aber diese Arbeit ziemlich mühsam und nach eingetretener Streckung ein oder noch mehrere Male zu wiederholen ist, so befestigt man, vorausgesetzt, daß eine Streckung von mindestens 1^m Länge erwartet werden kann, vorläufig an den beiden Enden Haken und hängt damit die Seilenden ineinander. Diese Haken sind je mit einer sich conisch nach außen verjüngenden Hülse versehen, in diese wird das Seilende eingesteckt, etwas durchgezogen und die einzelnen Drähte werden rückwärts umgebogen, sodaß am Seilende eine Verdickung entsteht, welche sich zwar fest in die conische Hülse ein-, aber nicht durch dieselbe hindurchziehen läßt.

Das Verspließen der Seilenden geschieht auf folgende Weise. Man löst jedes Seilende auf $1 \div 1{,}6^m$ Länge in seine Litzen auf und ebenso abwechselnd drei Litzen des einen und drei des anderen Seilendes, entfernt auf entsprechende Länge die Hanfseelen, windet die Drähte der aufgelösten Litzen um die unaufgelösten herum, und zwar so, daß die Drahtenden sich über verschiedene Punkte

Digitized by Google

in der Länge der Verbindung vertheilen und damit nicht die Seilstärke an der Verbindungsstelle plötzlich und übermäßig größer wird. Schließlich wickelt man wohl noch einen Draht in flachen Windungen um das Seil.

Bei der Berechnung der Tragfähigkeit eines Drahtseiles kann nur die absolute oder Zug-Festigkeit in Frage kommen, und es bestimmt sich dieselbe offenbar aus der Festigkeit der einzelnen Drähte, d. h. sie ist proportional der Summe der Drahtquerschnitte des Seiles.

Bezeichnet man also in Fig. 190 mit δ den Durchmesser eines Drahtquerschnittes der, selbstverständlich unter einander gleich starken, Drähte und mit i die Anzahl der Drahtquerschnitte eines normalen Seilquerschnittes — in Fig. 190 also $i = 36$ — so ist die Größe des für die Tragfähigkeit maßgebenden Seilquerschnittes allgemein:

$$F = i \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2,$$

demnach die Tragkraft nach Frml. (1) pag. 17 selbst:

$$P_1 = F s = i \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot s.$$

Die pro $\square^{mm}$ des Drahtquerschnittes zulässige Zugbelastung ist nach Tab. I (pag. 14 u. 15) 12^k; so hoch geht man jedoch bei Seilen nicht, sondern setzt höchstens $s = 5 \div 7^k$ oder 8^k. Wir wollen jedoch vorläufig die Materialspannung s in der obigen Formel belassen, da wir nach dem Vorbilde von Reuleaux auch hier diese Größe im Zusammenhange mit dem Verhältniß der Seildicke zu dem Seilscheibenhalbmesser bestimmen werden.

Die allgemeine Formel für die Tragkraft eines Eisendrahtseiles wird also lauten:

$$P_1 = 0{,}7854 \cdot i \cdot \delta^2 \cdot s \quad \ldots \quad (55).$$

Daraus ist umgekehrt die Stärke des Drahtes für eine Seilbelastung P_1:

$$\delta^2 = \frac{1}{0{,}7854} \cdot \frac{P_1}{i \cdot s}$$

$$\delta = 1{,}13 \sqrt{\frac{P_1}{i \cdot s}} \quad \ldots \quad (56).$$

Wenn die Drahtseile genau der obenerwähnten Vorschrift gemäß angefertigt werden, so kann der Querschnitt eines Drahtseiles in einen Kreis vom Durchmesser d eingeschrieben werden; es ist dann geometrisch dieser Durchmesser, den wir kurz als Seildurchmesser bezeichnen wollen, aus der Anzahl und Größe der Drahtquerschnitte zu berechnen, und es kann schließlich dieser anstatt δ in die vorstehenden Formeln eingeführt werden. Darauf wollen wir hier aber nicht eingehen, da in der That die Rechnung dann bei der Unvollkommenheit der wirklichen Ausführung zu unsicher erscheint.

Das Verhältniß des Seildurchmessers zur Drahtstärke ist für die üblichen durch 6 theilbaren Drahtseilen folgendes:

Anzahl der Drähte	$i = 36$	48	54	60	66	72
Verhältniß $\frac{d}{\delta} =$	8,0	10,25	11,33	12,8	13,25	14,2.

Die Dauer der Drahtseile ist selbstverständlich sehr verschieden und hängt im Allgemeinen ab von der Beschaffenheit und mehr oder weniger sorgfältigen

Digitized by Google

Herstellung, von der Stärke der Inanspruchnahme, Scheibengröße, sowie von äußeren Einflüssen des umgebenden Mittels. Bei Förderseilen, wo eine sorgfältige Beobachtung des Zustandes der Seile durchaus nothwendig ist, ermittelt man die zulässige Dauer durch Versuche, durch Vergleichung der Festigkeit vor und nach dem eine gewisse Zeitdauer gewährten Gebrauche, und setzt schließlich eine Grenze für die Benutzung eines Seiles, ausgedrückt in Zeit und Förderquantum.

Bei der Beurtheilung eines in Betrieb gewesenen Seiles ist nicht außer Acht zu lassen, daß sich die Drähte nicht nur äußerlich bei der Berührung mit den Scheiben abschleifen, sondern in Folge des Auf- und Zubiegens, namentlich auch im Innern. Man hat z. B. Förderseile abgelegt, welche nach einjährigem Betriebe äußerlich noch tadellos erscheinen, wo sich aber die einzelnen Drähte aneinander so weit abgeschliffen hatten, daß die Tragfähigkeit nur noch 85% derjenigen des neuen Seiles betrug.

2) Die Theorie des Drahtseiltriebes

beschäftigt sich im Wesentlichen mit der Lösung zweier Fragen:

a) Welche Zugspannungen treten in dem Seile auf, wenn durch den Drahtseiltrieb mechanische Arbeit übertragen wird und

b) Welche Form nimmt das lose auf die Scheiben aufgelegte Seil zwischen denselben in Folge der eigenen Schwere außer und während der Arbeits-Uebertragung an?

a) In einem einfachen Drahtseiltriebe, wie er beifolgend in Fig. 191 skizzirt ist und wie er die Grundlage für umfangreichere, zusammengesetzte Seiltrans-

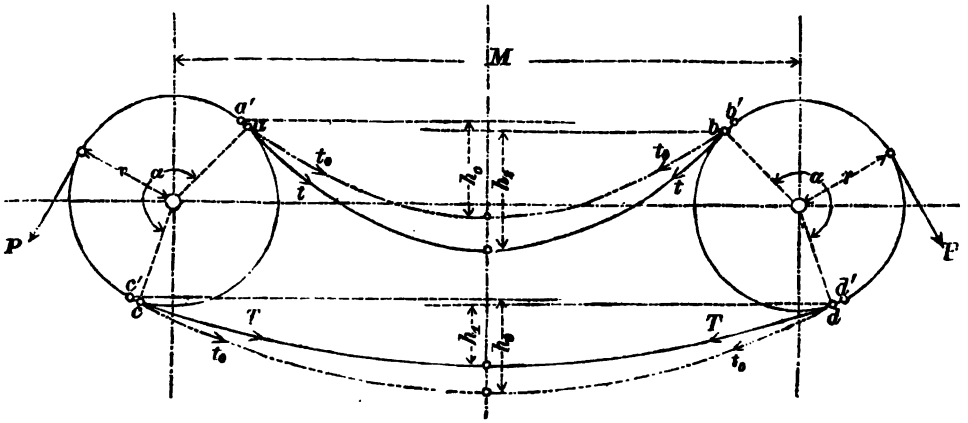


Fig. 191.

missionen bildet, halten die Seilspannungen und die in den Scheibenumfang verlegte Kraft der zu übertragenden Arbeit, die Seilreibung und Bewegungswiderstände einander in derselben Weise das Gleichgewicht wie diese Kräfte beim Riementriebe Fig. 174, pag. 224. Die für den Riementrieb abgeleiteten allgemeinen Formeln gelten daher auch für die Spannungen des Zugorganes beim Seiltriebe.

Bezeichnen wir conform mit:

T die Spannung im führenden, mit

t die Spannung im geführten Seilstücke während der Bewegung und mit

t_0 die beiderseitige Spannung im ruhenden Seile,

Digitized by Google

so ist die Größe der zu übertragenden Umfangskraft:

$$P = T - t \quad \ldots\ldots (57)$$

und allgemein:

$$T = P \cdot \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots (58)$$

$$t = P \cdot \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots (59).$$

Auch hier ist wieder: $e = 2{,}71828 \ldots$, und speciell für Drahtseiltrieb gilt $f = 0{,}23$ und $\alpha = \pi$. Es ist zwar für die Reibung eines Eisen-Drahtseiles auf dem Grunde des gußeisernen Scheibenkranzes der Coefficient f nicht speciell ermittelt; da aber, wenigstens bei den stärkeren Transmissionen, die Seilrillen immer mit Leder oder Holz ausgelegt werden, so ist im Grunde der Reibungscoefficient derselbe wie beim Riementrieb; da wir ferner $\alpha = \pi$ setzen, also eine Kleinigkeit größer nehmen als es bei Seiltrieb mit oberer Führung und namentlich auch bei verschieden großen Scheiben wirklich ist, und um schließlich auch dem verhältnißmäßig geringen Einflusse der Zapfenreibung — Seilbiegungswiderstand kann ganz vernachlässigt werden — der Seilscheibenwellen Rechnung zu tragen, so gehen wir mit f bis auf 0,23 herab.

Es ist also: $f\alpha = 0{,}23 \cdot 3{,}14159 = 0{,}72$

$$\log e^{f\alpha} = f\alpha \cdot \log e = 0{,}72 \cdot 0{,}4342942$$

$$e^{f\alpha} = 2{,}0544$$

und: $T = 1{,}95 \cdot P;\ t = 0{,}95P;\ t_0 = \frac{T + t^*)}{2} = 1{,}45\,P,$

wofür wir abgerundet setzen:

$$T = 2P;\ t = P;\ t_0 = 1{,}5\,P^*) \ \ldots\ (60).$$

Soll nun das Seil die Kraft P mit genügender Sicherheit gegen Bruch übertragen können, so muß sein:

$$T \leqq P_1 \text{ (Frml. 55)}.$$

Wir haben also die Bedingung:

$$2\,P = 0{,}7854 \cdot i \cdot \delta^2 \cdot s,$$

worin i = Anzahl der Drähte des Seiles, δ = Durchmesser eines Drahtes und s = zulässige Belastung eines □mm Drahtquerschnitt, hervorgerufen durch die Zugspannung T.

Bei Transmissionen rechnet man meistens mit Pferdestärken (N) und Umdrehungszahlen (n) pr. mint., und wir führen deshalb für das Moment Pr, worin r den Halbmesser der (kleineren) Seilscheibe in Millimeter und P die Umfangskraft in Kilogr. bedeutet, ein:

$$Pr = 716200\,\frac{N}{n}.$$

Dann ist:

$$2 \cdot 716200\,\frac{N}{n \cdot r} = 0{,}7854 \cdot i \cdot \delta^2 \cdot s.$$

Hieraus, sowie aus der vorhergehenden Bedingungsgleichung, könnte man sofort δ berechnen, wenn man nur für s einen Zahlwerth, etwa im Mittel $s = 6^k$, ein-

*) Gilt nur für $h_0 = h_1 = h_2 = 0$ und ist genau: $t_0 = \frac{h_1}{h_0} \cdot T = \frac{h_2}{h^0}\,t.$

Digitized by Google

setzt. Die beim Umbiegen des Seiles um die Scheiben in den Drähten entstehenden **Biegungsspannungen** bedingen aber einen beträchtlichen Einfluß auf die Haltbarkeit der Seile, welchem man durch geeignete, dem Verhältniß zwischen Seilstärke und Scheibenhalbmesser entsprechende Wahl von s Rechnung tragen muß. Wir führen deshalb dieses Verhältniß ein, indem wir die Gleichung beiderseits mit δ multipliciren:

$$2 \cdot 716200 \frac{N}{n} \cdot \frac{\delta}{r} = 0{,}7854 \cdot i \cdot \delta^3 \cdot s.$$

Daraus ist:

$$\delta^3 = 1823784 \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{\delta}{r} \cdot \frac{N}{n \cdot s}$$

Zu einer Relation zwischen s und $\frac{\delta}{r}$ gelangen wir nun durch folgende Betrachtung. Denken wir uns in Fig. 192 einen Draht nach dem Halbmesser r der Seilscheibe gebogen, so hat für einen Centriwinkel α die neutrale Axe (pag. 43) AB desselben eine Länge:

$$l = \alpha r,$$

die am meisten gedehnte Faser DE eine Länge:

$$l_1 = \alpha \left(r + \frac{\delta}{2}\right);$$

die Verlängerung λ beträgt demnach:

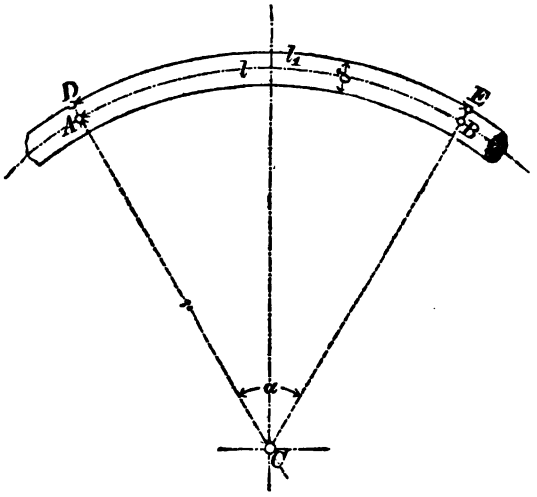


Fig. 192.

$$\lambda = l_1 - l = \alpha \left(r + \frac{\delta}{2} - r\right) = \alpha \frac{\delta}{2}.$$

Ist nun E der Elasticitätsmodulus — für Eisendraht nach Tab. I, pag. 14 u. 15: E = 19500 — und s_1 die der Verlängerung λ entsprechende Biegungsspannung, so hat man, da der Erklärung für den Elasticitätsmodulus gemäß die demselben entsprechende Verlängerung = l ist:

$$s_1 : E = \lambda : l = \alpha \cdot \frac{\delta}{2} : \alpha \cdot r$$

$$s_1 = \frac{E}{2} \frac{\delta}{r}$$

und:

$$\frac{r}{\delta} = \frac{E}{2 \cdot s_1}$$

$$\frac{r}{\delta} = \frac{19500}{2 \cdot s_1} = \frac{9750}{s_1},$$

wofür man abgerundet setzt:

$$\frac{r}{\delta} = \frac{10000}{s_1} \quad \ldots \quad (61).$$

Digitized by Google

Für ein 36-drähtiges Seil vom Durchmesser = d ist, da hier $\delta = \frac{1}{8}$ d:

$$\frac{r}{d} = \frac{1}{8} \cdot \frac{10000}{s_1} = \frac{1250}{s_1},$$

und diese Gleichung liefert für verschiedene Verhältnisse $\frac{r}{\delta}$ folgende Werthe:

$\frac{r}{d}$ =	125	100	80	50	46,3
s_1 =	10	12,5	15,6	25	27.

Diese Zusammenstellung zeigt, daß die Seilscheiben für Drathseiltrieb sehr beträchtliche Größen erhalten müssen, wenn die Seile nicht schon durch die Biegung um die Scheiben allein übermäßig stark beansprucht werden sollen.

Am besten ist für gewöhnlich das Verhältniß $\frac{r}{d} = 100$, wobei in den Drähten eine Biegungsspannung von $s_1 = 12{,}5^k$ eintritt, und hat man dazu das Seil für eine zulässige Zugspannung von $s = 6^k$ pr. $\square^{mm}$ berechnet, so erhält man in den um die Seilscheibe gelegenen gefährlichen Querschnitten eine Totalspannung $\mathfrak{s} = s + s_1 = 6 + 12{,}5 = 18{,}5$, welche nur wenig von der in den meisten Fällen als zulässig erachteten Größe $\mathfrak{s} = \frac{2}{3} Z = \frac{2}{3} 27 = 18$ abweicht.

Die Elasticitätsgrenze Z = 27 (Tab. I, pag. 14 u. 15) wird bei 36-drähtigen Eisenseilen durch die Biegungsspannung allein schon erreicht, wenn der Seilscheibenhalbmesser nur 46,3 mal so groß genommen wird wie die Seilstärke, und es ist selbstverständlich, daß man, ohne die Dauerhaftigkeit des Seiles wesentlich zu beeinträchtigen, nicht bis zu dieser Grenze herabgehen darf, sondern allgemein $\frac{r}{d} > 50$ beobachten muß.

Setzen wir nun den Werth von $\frac{\delta}{r}$ aus Frml. (61) in unsere Gleichung für δ^3 ein, so entsteht:

$$\delta^3 = 182{,}3784 \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{s_1}{\mathfrak{s} - s_1} \cdot \frac{N}{n}.$$

Schließlich acceptiren wir den von Reuleaux vorgeschlagenen constanten Werth für die Totalspannung $\mathfrak{s} = 18^k$ pr. $\square^{mm}$ und erhalten:

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{i} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot \frac{N}{n}} \quad \ldots \quad (62).$$

Nach dieser Formel ist die Drahtstärke eines i-drähtigen Treibseiles von Eisendraht zu berechnen, wenn die Größe der zu übertragenden Arbeit in Pferdestärken und Umdrehungszahlen pr. mint. gegeben ist. Hiervon abhängig ist aber auch der Seilscheibenhalbmesser zu bestimmen nach:

$$\frac{r}{\delta} = \frac{10000}{s_1} \quad \ldots \quad (61),$$

indem man den in Frml. (62) für s_1 eingeführten Zahlwerth der Biegungsspannung auch in Frml. (61) einsetzt und mittelst dieser für den durch (Frml. 62) gefundenen Werth von δ den Scheibenhalbmesser berechnet.

Die Halbmesser (r_1) für etwa anzuordnende Tragrollen macht man, wenn diese das führende Seil tragen sollen:

Digitized by Google

$$r_1 = r \ldots (63^a)$$

und für das geführte Seil wegen $t = 0{,}5\ T$:

$$\frac{r_2}{\delta} \geqq \frac{10000}{9 + 0{,}5 \,.\, s_1} \ldots (63^b).$$

Indem wir nun die Summe $s = s + s_1$) der Zug- und Biegungsspannung gleich einer constanten Größe setzen, ist die Wahl der Zugspannung innerhalb ziemlich weiter Grenzen freigegeben und nur an die Bedingung gebunden, daß man entsprechend einer größeren Zugspannung s auch die Seilscheibe im Durchmesser genügend vergrößere, damit die Biegungsspannung wieder um so viel kleiner ausfällt und durch die Summe beider Spannungen $s = s + s_1 = 18^k$ pr. $\square^{mm}$ nicht überschritten wird. Da aber die Wahl an eine solche Bedingung geknüpft ist, so ist es von besonderem Interesse, zu wissen, bei welcher Wahl von s man am vortheilhaftesten arbeitet, d. h. für welche Größe der Zugspannung sich das kleinste Verhältniß $\frac{r}{d}$ ergiebt.

Mit Hilfe der „Theorie der Maxima und Minima" findet man, daß $\frac{r}{d}$ oder $\frac{r}{\delta}$ ein Minimum wird, wenn

$$s_1 = \frac{2}{3} s = \frac{2}{3} \,.\, 18 = 12,$$

also $s = 18 - 12 = 6$ gewählt wird; alsdann ist die Drahtstärke (δ) und der Durchmesser (d), z. B. für ein 36-drähtiges Eisenseil:

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{36} \cdot \frac{12}{6} \frac{N}{n}} = \frac{5{,}67}{2{,}6207} \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

$$\delta = 2{,}164 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};\ d = 8\delta = 17{,}3 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (62^a)$$

und der zugehörige Minimal-Scheibenhalbmesser:

$$r = \delta \,.\, \frac{10000}{12} = 833{,}3\,\delta$$

oder:

$$r = d \,.\, \frac{833{,}3}{8} = 104\,d;$$

annähernd:

$$r = 100\,d \ldots\ldots (61^a).$$

Nach dem Specialformeln (61^a) und (62^a) kann man also die Durchmesser eines 36-drähtigen Eisenseiles und der zugehörigen kleinsten Seilscheibe berechnen, und man wird dadurch für mittlere Verhältnisse günstigste Werthe erhalten, wenn hierbei die nachfolgend zu betrachtende Seilsenkung eine passende Größe erhält.

Um den Einfluß der Wahl von s kennen zu lernen, wollen wir für dasselbe Beispiel einmal noch $s_1 = 6$ annehmen.

Dann wird:

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{36} \frac{6}{12}} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = \frac{5{,}67}{4{,}16} \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

$$\delta = 1{,}363 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};\ d = 8\delta = 10{,}9 \sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

Digitized by Google

als die Seilstärke zwar bedeutend geringer, dagegen aber nach:

$$r = \delta \cdot \frac{10000}{6} = \frac{d \cdot 10000}{8 \cdot 6} = 208{,}3 \cdot d$$

r um so größer ausfallen. Im ersten Falle wäre z. B. für $\frac{N}{n} = 1$; $i = 36$: $s_1 = 12$:

$$d = 17{,}3^{mm} \text{ und } 2r = 3{,}46^{m},$$

im anderen Falle aber, bei $s_1 = 6$:

$$d = 10{,}9^{mm} \text{ und } 2r = 4{,}54^{m}.$$

Gehen wir mit der Spannung s weiter herab und nehmen wir z. B. $s_1 = 15$ und i wiederum $= 36$, so wird:

$$d = 8\delta = 8 \cdot 2{,}93 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 23{,}4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

und für $\frac{N}{n} = 1$:

$$d = 23{,}4^{mm};\ 2 \cdot r = d \cdot \frac{2 \cdot 10000}{8 \cdot 15} = 166{,}6\, d = 4{,}9^{m}.$$

Aus diesen einfachen Beispielen, worin man sich z. B. $\frac{N}{n} = \frac{50}{50} = 1$ denken kann, ersieht man, daß die Seilscheiben für Drahtseiltransmissionen ziemlich groß ausfallen, wenn man die entwickelten Constructionsregeln befolgen und genügende Festigkeit und Dauerhaftigkeit der Seile erzielen will.

In Folge dessen stellen sich für etwa vorgeschriebene Umdrehungszahlen der Wellen auch die Umfangsgeschwindigkeiten (v) der Seilscheiben und des Seiles mitunter ziemlich hoch. Will man dabei verhüten, daß das Seil in Folge der in demselben entstehenden Centrifugalkraft den Reibungsdruck am Umfange soweit vermindert, daß die vorgeschriebene Umfangskraft P nicht mehr übertragen wird oder daß zum Mindesten die übermäßigen Seilschwankungen und das dadurch hervorgerufene Schlagen vermieden werden, so darf man die Seilgeschwindigkeit ein gewisses Maß nicht überschreiten lassen. Es empfiehlt sich für diesen Punkt: Bei geringen Kräften $v < 6 \div 10^{m}$; bei mittleren Kräften $v < 15^{m}$ und bei größeren Kräften $v < 25 \div 30^{m}$. —

b) Die zweite Frage — „Welche Form nimmt das lose auf die Scheiben aufgelegte Seil zwischen denselben in Folge der eigenen Schwere außer und während der Arbeitsübertragung an? — beantwortet eine strenge Theorie auf analytischem Wege dahin: Betrachtet man das Seil als einen in allen gleichen Theilen der Länge gleich schweren und vollkommen biegsamen Körper, welcher mit seinen Enden an zwei verschiedenen Punkten des Raumes befestigt ist, so nimmt dasselbe in Folge seiner Schwere eine nach unten convex gekrümmte Gestalt an — wie eine aus gleich langen und gleich schweren Gliedern bestehende Kette — und man nennt diese Form deshalb Kettenlinie. Liegen die Aufhängepunkte außerdem in ein- und derselben Horizontalen, so besteht die Kettenlinie aus zwei gleichen Theilen, welche in der Mitte zwischen den Aufhängepunkten durch eine verticale Symetrieaxe von einander geschieden werden.

Die Drahtseile sind in Wirklichkeit nicht vollkommen biegsam und nehmen daher, frei aufgehängt, auch nicht genau die Form der Kettenlinie an. Dennoch

Digitized by Google

können wir für unseren Zweck auch die Seilcurve als Kettenlinie*) ansehen, da die Abweichungen bei den im Drathseiltriebe stets sehr flachen Curven (mit geringer Einsenkung) äußerst gering sind und da es sich beim Seiltriebe schließlich nur darum handelt, daß man zum Voraus beim Projectirung der Anlage berechnen kann, wie tief sich das Seil einsenkt — also den verticalen Unterschied zwischen Auflaufpunkt und tiefstem Punkt der Seilcurve — so geht man noch weiter und betrachtet die Seilcurve als die der Kettenlinie nahe verwandte Parabel.

Bei einem einfachen Drahtseiltriebe der Art Fig. 191, pag. 271 haben die zwischen den Tangential- oder Auflaufpunkten a u. b und c u. d gelegenen Seilstücke die Form der Seilcurve. Den verticalen Unterschied des höchsten und tiefsten Punktes einer solchen Seilcurve nennen wir die Pfeilhöhe oder tiefste Einsenkung desselben, allgemein: die Seilsenkung und bezeichnen sie mit h_1 im führenden, mit h_2 im geführten und mit h_0 in den ruhenden Seilstücken.

Zwischen bestimmten Punkten kann nämlich ein Seil (mit veränderlicher Länge) verschiedene Einsenkungen annehmen, und von der Größe dieser Einsenkung und dem Gewichte des Seiles hängt dann die Kraft ab, mit welcher die Seilenden in den Aufhängepunkten auf Zug beansprucht werden. Umgekehrt ist die Seilsenkung abhängig von der Anspannung des Seiles in den Endpunkten.

Wir denken uns nun das in Fig. 191 freihängende Seilstück ab herausgenommen und an den Enden a und b desselben Tangentialkräfte K angebracht, welche dem Seile eine Einsenkung = h gestatten, zerlegen die Kraft K in Horizontalcomponente H und Verticalcomponente V, so sehen wir, daß im

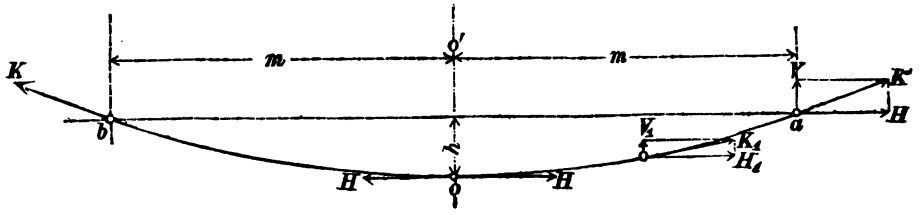


Fig. 193.

Scheitelpunkte o die V = Null ist, also auch K dort seinen kleinsten Werth K = H bekommt, während es nach den Endpunkten hin zunimmt und in denselben eine Größe V = dem halben Seilgewichte des ganzen Seilstückes aob hat, während H in allen Punkten der Seilcurve gleiche Intensität aufweist.

Bezeichnen wir den Horizontalabstand des Endpunktes a vom tiefsten Punkte o — hier also die halbe Entfernung ab — mit m, und ist p das Gewicht des Seiles per laufenden Meter, so ist die Kraft, mit welcher dasselbe in den End-

*) Da eine wissenschaftliche Ableitung der Gleichungen für die Kettenlinie weit außer dem Bereiche der für das Studium der „Unterrichtshefte" vorausgesetzten Vorkenntnisse liegt, so schließen wir unsere Betrachtung an eine von Prof. Reuleaux (Construction der Maschinentheile, 1862, pag. 646) speciell für den Drahtseiltrieb entwickelte Formel für die Seilspannung im Aufhängepunkte an und geben hier nur die weitere Ausführung derselben wieder, damit unsere Leser ersehen, welche Bedeutung und welchen Einfluß die einzelnen Größen haben, welche Voraussetzungen gemacht und welche Zahlwerthe für einzelne Größen eingeführt worden sind, sodaß, selbst ohne Kenntniß der Ableitung, dennoch Jeder die Formeln auch in abweichenden Fällen der Praxis richtig gebrauchen lernt.

Digitized by Google

punkten durch das Eigengewicht gespannt wird, wenn wir die Seilcurve als Parabel betrachten:

$$K = p\left(h + \frac{m^2}{2h}\right).$$

Die Größe $M = 2m$ ist in jedem Falle entweder direct durch die localen Verhältnisse der Anlage bestimmt oder innerhalb gewisser Grenzen frei zu wählen. Ebenso ist das laufende Seilgewicht bekannt, wenn man die Dimensionen des Seiles kennt; wir wollen aber sowohl p als auch K auf andere Weise ausdrücken: so nämlich, daß wir Zugspannung s pr. $\square^{mm}$ mit in die Formel bekommen. Nach Frml. (1), pag. 17 ist nämlich:

$$K = F \,.\, s,$$

worin F den maßgebenden Gesammtinhalt des Seilquerschnittes und s die der Seilspannung entsprechende Materialbeanspruchung bedeuten. — Die zu 1^m Drahtseil versponnene Länge der Einzeldrähte rechnet man zu $1{,}125^m$ (oder der schiefe Drahtquerschnitt sei $= 1{,}125$ mal der Normalschnitt), und somit ist das Gewicht von 1^m Drahtseil, wenn 1 Kubikmillimeter desselben $= \varepsilon$ wiegt:

$$p = F \,.\, 1{,}125 \,.\, 1000 \,.\, \varepsilon.$$

Wir erhalten demnach für:

$$\frac{K}{p} = \frac{F \,.\, s}{F \,.\, 1{,}125 \,.\, 1000 \,.\, \varepsilon}.$$

Das specif. Gewicht von Eisendraht ist nach Tab. I (pag 14 u. 15) $\gamma = 7{,}8$; also 1 Kubikdecimeter wiegt $7{,}8^k$ und 1 Kubikmillimeter $\varepsilon = 0{,}0000078^k$. Es ist also für Eisendraht:

$$\frac{K}{p} = \frac{s}{1{,}125 \,.\, 1000 \,.\, 0{,}0000078} = \frac{s}{0{,}00877},$$

und das muß gleich $\frac{K}{p}$ aus der Frml. $K = p\left(h + \frac{m^2}{2h}\right)$ sein:

$$s = 0{,}00877\left(h + \frac{m^2}{2h}\right).$$

Die horizontale Entfernung (2m) der Auflaufpunkte einer Seilcurve (Fig. 191) ist im Verhältniß zu der meist beträchtlichen Größe M des Rollenabstandes nicht viel verschieden, sodaß man (bei einem horizontalen Seiltriebe) setzen kann: $m = \frac{M}{2}$; alsdann heißt obige Formel:

$$s = 0{,}00877\left(h + \frac{M^2}{8h}\right) \ldots . \quad (64).$$

Mittelst dieser Formel kann man die in einem vorhandenen Seiltriebe herrschende Material-Zugspannung s pr. $\square^{mm}$ berechnen, wenn man die dem fraglichen Seilstücke zukommende Seilsenkung (h) und den Rollenabstand (M) in Metern gemessen und eingeführt hat. Sie gilt also sowohl für das führende und das geführte Seilstück im Bewegungszustande, als auch für das ruhende Seil, wenn man nur die betreffende Seilsenkung h_1, h_2, resp. h_0 einführt, und umgekehrt kann man nun hieraus für die bei Berechnung der Seilstärke nach Frml. 62 in dieselbe eingeführte Zugspannung (s), bezhtl. für die der Spannung t im geführten Seilstücke entsprechende Materialspannung (0,5 . s) zum Voraus die Seilsenkungen berechnen, welche diese betreffenden Seilstücke bekommen werden.

Digitized by Google

Diese Rechnungen sind deshalb von großer Wichtigkeit, weil man dadurch erfährt, ob der Seiltrieb mit Rücksicht auf die Terrainbeschaffenheit nach unseren Annahmen von M möglich ist oder nicht, und weil wir nur dann überzeugt sind, daß weder das Seil in Folge zu geringer Anspannung gleitet noch zu stark belastet ist, wenn dasselbe in einer solchen Länge aufgelegt wird, daß im Ruhezustande die berechneten Seilsenkungen h_0 wirklich eintreten.

Um nun h aus der Gleichung für s zu bestimmen, geben wir ihr, da es eine Gleichung 2. Grades (s. Arithmetik) wird, die Gestalt:

$$h^2 - \frac{s}{0{,}00877} \cdot h + \frac{M^2}{8} = 0,$$

indem wir selbe mit h multipliciren und nach Potenzen von h ordnen. Hieraus wird:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{0{,}00877} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{0{,}00877}\right)^2 - \frac{M^2}{8}}.$$

Von den beiden Wurzelwerthen ist nur derjenige mit dem Minus-Zeichen brauchbar, und dieser wird, wenn man sämmtliche Glieder der rechten Seite mit $\left(\frac{\sqrt{8}}{M}\right)$ multiplicirt und dividirt:

$$h = \frac{M}{\sqrt{8}}\left[\frac{\sqrt{8}}{0{,}01755} \cdot \frac{s}{M} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{8}}{0{,}01755} \cdot \frac{s}{M}\right)^2 - 1}\right].$$

$\frac{\sqrt{8}}{0{,}01755} = 161{,}16$, wofür man abgerundet setzt $= 160$; dann wird:

$$h = 0{,}3535 \,.\, M\left[\frac{160 \,.\, s}{M} - \sqrt{\left(\frac{160 \,.\, s}{M}\right)^2 - 1}\right] \ldots (65).$$

Diese Formel liefert die tiefste Einsenkung eines Eisendrahtseiles in Metern für einen Rollenabstand M (in Meter) und eine Materialzugspannung von s^k pr. $\square^{mm}$ Drahtquerschnitt des Seiles.

Damit wir zuerst eine Vorstellung von dem Einflusse der Größen M und s auf die Seilsenkung bekommen und die gemachte Beobachtung mit den Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Seilscheibenhalbmesser, Seilstärke und Materialspannung (Frml. 61 u. 62) zu einem übersichtlichen Urtheile, welches wir bei der Wahl der verschiedenen Größen für praktische Ausführungen nöthig haben, vereinigen können, wollen wir für zwei verschiedene Rollen- oder Seilscheibenentfernungen — $M = 20^m$ und $M = 200^m$ — der Reihe nach setzen: $s = 3^k$ und $s = 15^k$.

1) $M = 20^m$; $s = 3^k$ ($s_1 = 18 - 3 = 15^k$).

Hier wird nach Frml. (61 u. 62) δ groß und $\frac{r}{\delta}$ klein; wegen $s_1 = 15 > 12$ aber absolut r immer noch groß.

$$h = 0{,}3535\ M\ [24 - \sqrt{(24)^2 - 1}]$$
$$h = 0{,}3535 \,.\, 0{,}0208 \,.\, 20 = 0{,}147^m = 147^m$$

2) $M = 20^m$; $s = 15^k$ ($s_1 = 18 - 15 = 3$).

Hier fällt δ klein und $\frac{r}{\delta}$ groß aus.

$$h = 0{,}3535\ M\ [120 - \sqrt{(120)^2 - 1}]$$
$$h = 0{,}3535 \,.\, 0{,}0042 \,.\, 20 = 0{,}02989^m = 30^{mm}$$

Digitized by Google

3) $M = 200^m$; $s = 3^k$ ($s_1 = 15$).
$h = 0{,}3535\ M\ [2{,}4 - \sqrt{(2{,}4)^2 - 1}]$
$h = 0{,}3535 \cdot 0{,}21826 \cdot 200 = 15{,}431^m$.

4) $M = 200^m$; $s = 15$ ($s_1 = 3$)
$h = 0{,}3535\ M\ [12 - \sqrt{(12)^2 - 1}]$
$h = 0{,}3535 \cdot 0{,}0417 \cdot 200 = 2{,}948^m$.

Läßt man im Seildrahte nur kleine Zugspannungen zu, so erhält man zwar verhältnißmäßig kleine Rollen, aber bei großen Abständen sehr bedeutende Einsenkungen (Nr. 3), während bei kleinen Rollenabständen und stärkeren Anspannungen die Seilsenkungen (Nr. 2) oft so klein ausfallen, daß man das Seil über den Scheiben selbst — vielleicht unter Anwendung einer ähnlichen Spannvorrichtung wie bei Riemen (Fig. 187, pag. 254) — verspließen muß, da es zu kurz ist, um im geschlossenen Zustande aufgelegt werden zu können. Um bei großem Rollenstande (M) Tragrollen, welche sich eventuell in Folge zu großer Einsenkungen nöthig machen, zu vermeiden, giebt man nicht selten auch dem Seile eine größere Anspannung und dem entsprechend einen größeren Querschnitt als zur Erzielung der Reibung allein nöthig wäre. Besonders bei kleineren Kräften dürfte sich dieses Verfahren eignen. Es resultirt hieraus die Nothwendigkeit, daß man bei Projectirung eines Drahtseiltriebes alle Umstände reiflich erwägen muß.

Damit der Raum unter den Seilcurven, wenigstens während des Betriebes, auf möglichst große Höhe verfügbar bleibt, wird man natürlich stets, wenn es sonst die Drehrichtung zuläßt, das führende Seil mit der kleineren Einsenkung h_1 nach unten nehmen (Fig. 189 u. 191); das ist jedoch nur dann möglich, wenn $h_2 - h < 2r$, da anderen Falls die Seilstücke auf- oder aneinander schleifen würden.

Da in Frml. (64 u. 65) δ nicht vorkommt, so kann man, ehe noch die Seildimensionen selbst berechnet sind, schon über die Spannung aus Rücksicht für die Einsenkung entscheiden. Will man die Zugbeanspruchung eines vorhandenen Drahtseiltriebes mittelst der Frml. (64) untersuchen, so empfiehlt es sich, wenn man auf ein sicheres Resultat reflectirt, das laufende Gewicht (p) für den gegebenen Fall besonders zu ermitteln und damit diese Formel noch einmal numerisch zu entwickeln.

Frml. (65) liefert uns nun die Seilsenkung h_1 des führenden Seilstückes, wenn wir darin für s denselben Werth einführen wie denjenigen von $(18 - s_1) = (s)$ in Frml. (62) bei der Berechnung des Drahtdurchmessers (δ); die Einsenkung (h_2) des geführten Seilstückes erhalten wir daraus, wenn wir conform Frml. (60) eine Spannung s einführen, welche wegen $t = \frac{T}{2}$ halb so groß ist als die bei der Berechnung der Seilsenkung des führenden Stückes zu Grunde gelegte.

Hätte man nun, wie beim Riementrieb, hier auch vernachlässigbar kleine Einsenkungen, d. h. wäre das Seil so stark gespannt, daß der Einfluß des Seilgewichtes auf die Anspannung außer Acht gelassen werden könnte, so wäre ohne Weiteres der Poncelet'sche Satz anzuwenden, wonach die Spannung im ruhenden Zustande in beiden Seilstücken gleich ist dem arithmetischen Mittel aus den Betriebsspannungen des führenden und geführten Seilstückes, und würde die Seilsenkung (h_0) erhalten, wenn man wegen Frml. (60) $t_0 = 0{,}75\ T = 1{,}5\ t$ ein-

Digitized by Google

führte: $s_0 = 0{,}75 \cdot s$. In Wirklichkeit rührt aber bei ruhenden Seilen mit normaler Anspannung diese lediglich vom Seilgewichte her, da das Seil, wie zu Anfang erklärt wurde, lose auf den Scheiben liegt, und man muß daher die Ruhesenkung aus der unter dem Einflusse der verschiedenen Spannungen sich ergebenden constanten Seillänge bestimmen. Das führt aber zu sehr complicirten Rechnungen, und wir geben zum praktischen Gebrauche hier nur die für die mittleren Spannungen hinreichend genaue Annäherung:*)

$$h_0 = 1{,}56\, h_1 \quad \ldots \quad (66).$$

Schließlich ist noch die ganze Länge des Seiles in Berücksichtigung der bei neuen Seilen eintretenden Streckung:

$$L = 2\left[\pi \cdot r + M\left(1 + 2\frac{h_0^2}{M^2}\right)\right]^{**} \quad \ldots \quad (67).$$

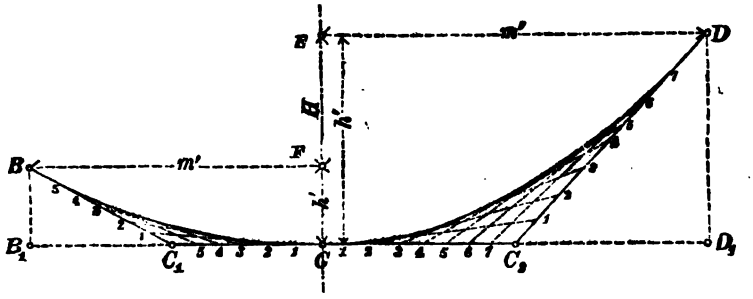


Fig. 194.

Nicht immer gestatten die Umstände, daß man zwei benachbarte Arbeits- resp. Tragrollen in gleicher Höhe über dem Horizonte verlegt; man erhält dann einen sogenannten schiefen Seiltrieb, bei welchem die Spannungen in den Auflaufpunkten verschieden sein werden, da die Seillängen von jedem der Auflaufpunkte bis zum gemeinschaftlichen Scheitel verschieden groß sind.

Wir geben für diesen Fall mit Beziehung auf Fig. 194, welche ein aus einem schiefen Seiltriebe herausgenommenes Seilstück darstellt, die zur Bestimmung des Scheitels nöthigen Coordinaten-Formeln***), mittelst deren man die betr. Größen aus denjenigen eines horizontalen Seiltriebes von demselben Rollenabstande M ermittelt.

---

*) Nach Prof. Grove wird der genaue Werth gefunden aus der Gleichung:

$$h_0^3 - A \cdot h^0 - B = 0,$$

in welcher die Coefficienten A und B — für den Fall, daß das Seil ein gewöhnliches Eisen-Drahtseil ist und eine für die Erzeugung der nöthigen Reibung gerade hinreichende Anspannung erhält, wo also nahezu $h_2 = 2h_1$ gesetzt werden kann — folgende Größen haben:

$$A = 2{,}5\, h_1^2 - 0{,}502\, \frac{m^4}{h_1 E} \text{ und } B = 0{,}669\, \frac{m^4}{E}$$

und die man entweder mittelst der Cardani'schen Formel oder auf trigonometrischem Wege auflöst.

$m = \frac{M}{2}$ ist der halbe Rollenstand in Meter, und der Elasticitätsmodulus E für Eisendraht ist pro □cm, also E = 2000000 einzuführen. (Vergl. „Deutsche Industrie-Zeitung" 1876, pag. 404.)

**) „Hütte" 1870, pag. 336.

***) Nach Reuleaux's „Constructeur" 1869, pag. 389.

Digitized by Google

Es bedeuten:

h u. M Seilsenkung und Rollenstand eines wagerechten Seiltriebes,

s zugehörige Spannung an den Auflaufpunkten des betrachteten Seilstückes,

h' u. h'' die kleinere und die größere Seilsenkung (FC und EC) bei einem schiefen Seiltriebe von gleichem (horizontalen) Rollenstande M (= $B_1 D_1$),

m' u. m'' die zugehörigen Horizontalabstände (CB_1 und CD_1) des Curvenscheitels von den Auflaufpunkten,

s' u. s'' die zugehörigen Spannungen an dem unteren und oberen Auflaufpunkte (bei B und D),

H den senkrechten Abstand (EF) der Auflaufpunkte eines Seilstückes,

dann ist:

$$h' = h\left[1 + \frac{1}{16}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right] \mp \frac{H}{2} \quad \ldots (68)$$

$$m' = \frac{M}{2}\left(1 \mp \frac{1}{4}\frac{H}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

$$s' = s - \frac{h - h'}{114};\ s'' = s + \frac{h'' - h}{114};\ s'' - s' = \frac{H}{114}.$$

In Frml. (68 u. 69) gelten die oberen Vorzeichen für die untere, die unteren für die obere Rolle.

m' negativ bedeutet, daß in solchem Falle der Parabelschnitt nicht zwischen die Seilscheiben, sondern seitwärts der unteren Scheibe fällt (s. Fig. 195).

Die Aufzeichnung der Seilcurve (als Parabel betrachtet) kann, nachdem man die Lage des Scheitelpunktes eines Seilstückes mit Bezug auf den bezgl. Auflaufpunkt berechnet hat, ohne Schwierigkeit erfolgen, indem man irgend eine Parabelconstruction darauf anwendet. Am einfachsten verfährt man hier durch Construction der die einzelnen Parabeläste einschließenden Tangenten, indem man die Horizontalen $B_1 C = m'$ in C_1 und $D_1 C = m''$ in C_2 halbirt, BC_1 und DC_2 zieht, dann jede der Linien CC_1 und BC_1 in dieselbe Anzahl gleicher Theile theilt, dieselben von C nach C_1 hin und von C_1 nach B hin fortlaufend nummerirt und die gleichen Nummern durch gerade Linien mit einander verbindet. Ebenso ist dann mit den Linien CC_2 und $C_2 D$ zu verfahren. —

Da bei einigermaßen starken Seilen das Gewicht sowohl des Seiles, als auch dasjenige der Scheiben, ziemlich groß ausfällt, und eines Theils die Berechnung der Axen, resp. Wellen, andern Theils die Ausmittelung der Betriebsverluste unter dem Einflusse dieser Gewichte oft geboten erscheint, so macht sich dann die Berechnung des Zapfendruckes der einzelnen Seilscheiben-Axen-Wellen nöthig. Derselbe setzt sich zusammen aus der verticalen Resultirenden der an einer Scheibe wirkenden Seilspannungen und dem Gewichte der Scheibe und Axe. Diese Kräfte sind nach Größe, Richtung und Angriffspunkt theils gegeben, theils zu calculiren, und die Bestimmung des Zapfendruckes erfolgt dann unter Anwendung der hierauf bezüglichen Regeln der Mechanik (oder Grapho-Statik).

Beispiele.

1. Aufgabe. Zwischen den Hauptstationen A, B und D (Fig. 195), welche zum Theil auf ebenem Terrain, zum Theil aber auf einer Höhe gelegen sind, ist eine Drahtseil-Transmission in der Weise anzulegen, daß 1) horizontal von A

Digitized by Google

nach B durch ein endloses Seil ohne Tragrollen N = 160 Pferdestärken (incl. Betriebswiderstände) übertragen werden; 2) in B giebt die Seilscheibenwelle 140 HP an eine dort befindliche Fabrikanlage ab, und 3) der Rest von 20 HP geht nach der höher als A und B, mit der Endstation D aber gleich hoch gelegenen Zwischenstation mit einer Doppel-Seilscheibe C. Sämmtliche Seilscheiben sollen in der Minute n = 80 Umdrehungen machen. Das Seil CD ist entweder a) durch Tragrollen zu stützen oder b) durch ein kurzes, stärker angespanntes Seil ohne Tragrollen zu ersetzen. Wir haben also drei verschiedene einfache Seiltriebe zu berechnen, und zwar für jeden einzelnen die Seilstärke, Seilscheibengröße, Seilgeschwindigkeit und tiefste Seilsenkung; letztere sowohl für den Zustand der Ruhe als auch für den Betriebzustand.

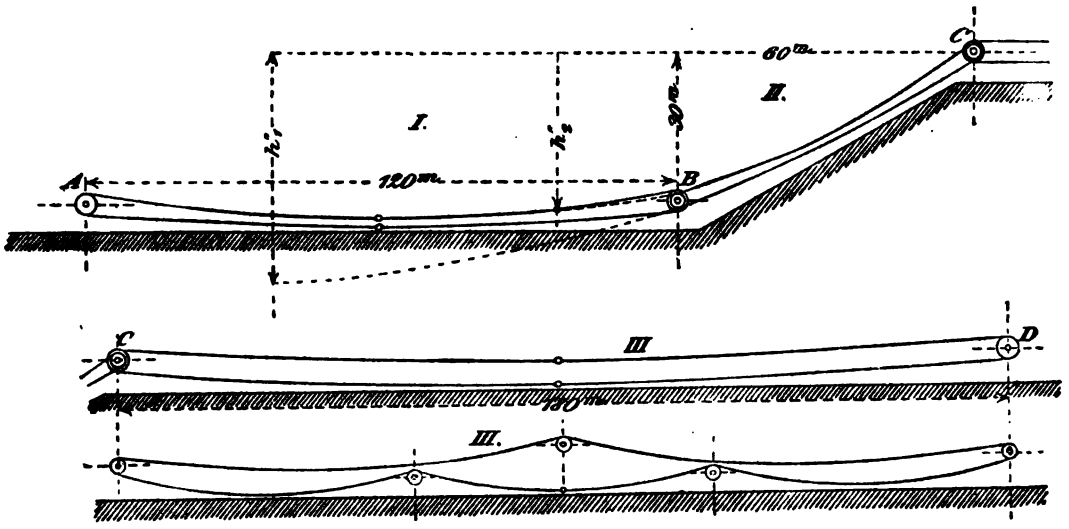


Fig. 195.

Auflösung 1). Der Horizontalabstand der Seilscheibenmittel beträgt zwischen A und B: M = 120m, und die Seilspannung pro □mm Drahtquerschnitt im führenden Seile werde so gewählt, daß wir Minimalscheiben erhalten. Gegeben sind also dann:

$$N = 160;\ n = 80;\ s_1 = 12;\ s = 18 - 12 = 6;$$

und wir nehmen an, daß das Seil aus i = 48 Drähten besteht.

Die Stärke δ des Eisendrahtes ist dann nach Frml. (62):

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{i}\,\frac{s_1}{s}\,\frac{N}{n}}$$

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{48} \cdot \frac{12}{6} \cdot \frac{160}{80}} = \frac{5{,}57}{\sqrt[3]{12}} = 2{,}477^{mm}.$$

Der Durchmesser d des das 48-drähtige Seil umschreibenden Kreises ist nach pag. 270: d = 10,25 δ, also die Seilstärke:

$$d = 10{,}25 \cdot 2{,}477 = 25{,}4^{mm}\ (= 1''\ \text{engl.}).$$

Das Verhältniß des Seilscheibenhalbmessers zur Seilstärke finden wir aus Frml. (61):

Digitized by Google

$$\frac{r}{\delta} = \frac{10000}{s_1} = 833{,}3;$$

demnach die Seilscheibengröße:

$$r = \frac{833{,}3 \,.\, d}{10{,}25} = \frac{833{,}3 \,.\, 25{,}4}{10{,}25} = 2065^{mm} \sim = 2^{m}.$$

und:

$$2r = 4^{m}.$$

Die Seilgeschwindigkeit beträgt alsdann bei 80 minutlichen Umdrehungen der 4^{m} großen Seilscheiben:

$$v = \frac{2r\pi \,.\, n}{60} = \frac{12{,}566 \,.\, 80}{60} = 16{,}75^{m} \text{ pr. secd.},$$

liegt also vollständig innerhalb der zulässigen Grenzen. —

Wollen wir die Drahtstärke mittelst der allgemeinen Frml. (56) aus der das Seil allein auf Zug beanspruchenden Kraft P_1 berechnen, so haben wir vorliegend zuerst:

$$P = 716200 \frac{N}{n \,.\, r} = 716200 \frac{160}{80 \,.\, 2000}$$

$$P = 716{,}2^{k}.$$

Damit das Seil aber diese Umfangskraft P gehörig übertrage, muß es im führenden Theile doppelt so stark gespannt sein; es ist also in Frml. (56) für die Tragkraft P_1 zu setzen die Spannung:

$$T = 2P = P_1:$$

$$\delta = 1{,}13 \sqrt{\frac{P_1}{i \,.\, s}} = 1{,}13 \sqrt{\frac{2P}{i \,.\, s}} = 1{,}13 \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{P}{i \,.\, s}}$$

$$\delta = 1{,}13 \,.\, 1{,}4142 \sqrt{\frac{P}{i \,.\, s}} = 1{,}6 \sqrt{\frac{P}{i \,.\, s}} = 1{,}6 \sqrt{\frac{716{,}2}{48 \,.\, 6}} = 2{,}5^{mm}.$$

Die tiefsten Einsenkungen der zwischen den Auflaufstellen der Seilscheiben in Gestalt der Seilbogen freihängenden Stücke des endlosen Seiles ermitteln wir nach Frml. (65) und haben darin für s die Zugspannung des betreffenden Seilstückes zu setzen. Im führenden Seile haben wir während des Betriebes die Gesammtspannung $T = 2P$ und dem entsprechend hier die Materialspannung pr. $\square^{mm}$ des Drahtquerschnittes nach der vorstehenden Annahme: $s = 6^{k}$;

$$h_1 = 0{,}3535\, M \left[\frac{160}{M} \,.\, s - \sqrt{\left(\frac{160}{M} \,.\, s\right)^2 - 1}\right]$$

$$h_1 = 0{,}3535 \,.\, 120 \,.\, [8 - \sqrt{63}] = 0{,}3535 \,.\, 0{,}0627 \,.\, 120$$

$$h_1 = 2{,}659 \sim = 2{,}660^{m}.$$

Im geführten*) Seile herrscht die Gesammtspannung $t = P = 0{,}5\, T$; also ist hier $s = 0{,}5 \,.\, 6 = 3$ und demnach die Seilsenkung:

$$h_2 = 0{,}3535 \,.\, 120\, [4 - \sqrt{15}] = 0{,}3535 \,.\, 0{,}127 \,.\, 120$$

$$h_2 = 5{,}386^{m}.$$

---

*) Grove geht aus von der allgemeinen Beziehung:

$$T = s \,.\, i \,.\, \delta^2 \frac{\pi}{4} = \frac{p \,.\, m^2}{2h}$$

und setzt für Eisendrahtseile $p = 0{,}7\, i \,.\, \delta^2$, wonach:

$$h = 0{,}446 \frac{m^2}{s}.$$

Digitized by Google

Die Senkung beider Seile im Ruhezustande, welche wir benützen, um das Seil in seiner richtigen Länge über den Rollen zu schließen, ist nach unserer Näherungsformel (66):

$$h_0 = 1{,}56\, h_1 = 1{,}56 \,.\, 2{,}66 = 4{,}150^{m}.$$

Um zu sehen, wie weit dieser Näherungswerth dem genauen nahe kommt, wollen wir letzteren hier mit berechnen.

Die Cardani'sche*) Formel zur Auflösung von Gleichungen dritten Grades in der Form

$$x^3 - Ax - B = 0$$

heißt für $x = h_0$:

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$A = 2{,}5\, h_1^{\,2} - 0{,}502\, \frac{m^4}{h_1 E} \text{ und } B = 0{,}669\, \frac{m^4}{E}$$

$$h_1 = 2{,}66;\ m = \frac{M}{2} = 60;\ E = 2000000 \text{ pr. } \square^{cm}.$$

Demnach:

$$A = 2{,}5 \,.\, \overline{2{,}66}^2 - \frac{0{,}502 \,.\, \overline{60}^4}{2{,}66 \,.\, 2000000}$$

$$A = 17{,}6875 - 1{,}223 = 16{,}4645.$$

$$B = 0{,}669 \,.\, \frac{12{,}96}{2} = 4{,}33512.$$

$$\left(\frac{A}{3}\right)^3 = 165{,}306 \text{ und } \left(\frac{B}{2}\right)^2 = 4{,}6983;\ \text{also: } \left(\frac{A}{3}\right)^3 > \left(\frac{B}{2}\right)^2.$$

In diesem Falle kann man die Cardani'sche Formel nicht brauchen, da die Wurzel aus einer negativen Zahl keinen reellen Werth liefert.

Wir benutzen also die trigonometrische**) Lösung und haben dazu zu bilden:

$$y = \sqrt{\frac{4}{3} A} \text{ und } \sin(3\varphi) = -4\, \frac{B}{y^3}$$

$$y = \sqrt{\frac{4 \,.\, 16{,}4645}{3}} = 4{,}685;$$

$$\sin(3\varphi) = -\frac{4 \,.\, 4{,}33512}{\overline{4{,}685}^3} = -\frac{17{,}34048}{102{,}932} = -0{,}16846.$$

$$\log \sin(3\varphi) = -\log 0{,}16846$$

$$\measuredangle(3\varphi) = -9^0\, 41'\, 54''$$

$$\measuredangle \varphi = -3^0\, 13'\, 58''.$$

Da der Winkel φ hier negativ ist, so giebt entweder nur die Wurzel $x_2 = y \,.\, \sin(60 - \varphi)$ oder $x_3 = -y \,.\, \sin(60 + \varphi) = h_0$ einen positiven Werth.

(s gilt hier pro $\square^{cm}$). Alsdann wird aber die Einsenkung des geführten Seiles bei 0,5 . s gerade:

$$h_2 = 2\, h_1.$$

Für unseren Fall wäre: $h_1 = 2{,}676^{m}$; $h_2 = 2 \,.\, 2{,}676 = 5{,}352^{m}$.

*) S. Weisbach: „Der Ingenieur", 1863, pag. 73.

**) Weisbach: „Der Ingenieur", 1863, pag. 74.

Digitized by Google

Wir addiren also zu φ^0 noch 60^0 und erhalten:

$$(60 + \varphi) = -63^0\,13'\,58''$$
$$\sin(60 + \varphi) = -0{,}892844$$

und:

$$h_0 = -4{,}685 \times -0{,}892844$$
$$h_0 = 4{,}183^m.$$

Wir fanden oben angenähert: $h_0 = 4{,}150^m$ und hätten demnach dort eine um 33^{mm} zu kleine Pfeilhöhe erhalten. Im Vergleich zu der beträchtlichen Länge des Rollenstandes fällt aber die Abweichung nur sehr unbedeutend aus, nämlich: $\frac{0{,}033}{120}$ oder $0{,}0275\,\%$ (pr. 100^m).

Die Differenz der Betriebssenkungen $(h_2 - h_1)$ ist hier:

$$h_2 - h_1 = 5{,}386 - 2{,}66 = 2{,}726,$$

also:

$$h_2 - h_1 < 2r;$$

wir können demnach eventuell das führende Seil nach unten nehmen, und es genügt dann für den Seiltrieb der 1. Abtheilung AB (Fig. 195) eine verfügbare Höhe von $r + h_1 = 2 + 2{,}66 = 4{,}66^m$ zwischen dem tiefsten Punkte des Seiles und dem Seilscheibenmittel. Kann man jedoch aus anderen Gründen das führende Seil nicht nach unten nehmen, so wird diese Höhe $= r + h_2 = 2 + 5{,}386 = 7{,}4^m$, also beinahe 3^m größer nothwendig.

Auflösung 2). Für den schiefen Drahtseiltrieb BC setzen wir — da ohnehin die zu übertragende Kraft im Vergleich zu der in der 1. Abtheilung enthaltenen wesentlich geringer ist und damit wir eine verhältnißmäßig größere Einsenkung erzielen — in den Drähten eine Spannung von nur $s = 2^k$ pr. $\square^{mm}$ voraus und rechnen die von der zulässigen Gesammt-Materialspannung (18^k) noch bleibenden 16^k auf die Biegungsspannung, sodaß wir dennoch nicht allzu große Scheiben erhalten. Es sei also:

$$N = 20;\ n = 80;\ s = 2;\ s_1 = 16;\ i = 36.$$

Dann ist die Drahtstärke:

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{36} \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{20}{80}} = \frac{5{,}67}{\sqrt[3]{18}} = 2{,}164^{mm},$$

und da bei einem 36-dräthigen Seile $d = 8\delta$, so ist der Durchmesser des Seiles:

$$d = 8 \,.\, 2{,}164 = 17{,}3^{mm}.$$

Der Halbmesser der zugehörigen Seilscheiben nach:

$$\frac{r}{d} = \frac{1250}{s_1} = \frac{1250}{16} = 78$$
$$r = 78 \,.\, 17{,}3 = 1{,}350^m \text{ und } 2r = 2{,}7^m.$$

Der Weg eines Punktes in dem zwischen B und C laufenden Seile beträgt hier also in der Secunde noch weniger als in der vorhergehenden Abtheilung, nämlich:

$$v = \frac{2r\pi \,.\, 80}{60} = \frac{8{,}4823 \,.\, 80}{60} = 11{,}31^m.$$

Digitized by Google

Die bezüglichen Seilsenkungen bestimmen wir zuerst nach den Regeln für eine wagerechte Transmission von der Scheibenentfernung M = 60m, gleich der Horizontalprojection des wirklichen Rollenstandes BC und rechnen sie dann für die verticale Höhe H = 30m um.

$$h_1 = 0{,}3535 \,.\, 60\,[5{,}33 - \sqrt{28{,}4089 - 1}] = 0{,}3535 \,.\, 0{,}0947 \,.\, 60$$
$$h_1 = 2{,}010^{m}.$$
$$h_2 = 0{,}3535 \,.\, 60\,[2{,}66 - \sqrt{7{,}0756 - 1}] = 0{,}3535 \,.\, 0{,}1952 \,.\, 60$$
$$h_2 = 4{,}40^{m}.$$

Genau ist die Pfeilhöhe der ruhenden Seile eines wagerechten Seiltriebes bei den Coefficienten:

$$A = 9{,}99885 \sim = 10 \text{ und } B = 0{,}27095 \sim = 0{,}271,$$

und für die trigonometrische Lösung:

$$y = \sqrt{\frac{4 \,.\, 10}{3}} = 3{,}65 \text{ und } \sin(3\varphi) = -\frac{4 \,.\, 0{,}271}{48{,}627} = -\,0{,}0222921$$
$$3\varphi = 1^{0}\,16'\,38{,}5'' \text{ und } \varphi = 0^{0}\,25'\,32{,}8''$$
$$(60 + \varphi) = 60^{0}\,25'\,32{,}8''$$
$$\sin(60 + \varphi) = -\,0{,}869717$$
$$h_0 = -\,3{,}65\,(-\,0{,}8697) = 3{,}174^{m}.$$

Nach unserer Näherungsformel hätten wir bekommen:

$$h_0 = 1{,}56 \,.\, 2{,}01 = 3{,}136^{m},$$

also 38mm zu wenig. Diese Annäherung ist immer noch ziemlich günstig, wenn man bedenkt, daß Frml. (66) einen für oft sehr wesentlich auseinander gehende Verhältnisse noch passenden Mittelwerth darstellt, und sie ist auch für die Praxis meistens vollkommen genügend, da man ohnedies neue Seile wegen der eintretenden Verlängerung anfangs etwas kürzer schließen muß.

Wir bezeichnen nun beim schiefen Seiltriebe die Seilsenkungen des laufenden Seiles, von dem Auflaufpunkte an der unteren Scheibe B gemessen, mit h_1' und h_2', dieselben von der oberen Rolle C aus gemessen mit h_1'' und h_2'', entsprechend auch die Ruhesenkungen mit h_0' und h_0''; ferner die Horizontalabstände der Parabelscheitel von den bezgl. Auflaufpunkten und für die bezgln. Seilstücke mit m_1' und m_2', m_1'' und m_2'', m_0' und m_0'' und erhalten nach Frml. (68 und 69) für unseren Fall:

$$h_1' = h_1\left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{H^2}{h_1^{\,2}}\right) - \frac{H}{2} = 2{,}01\left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{900}{4{,}04}\right) - 15$$
$$= 2{,}01 \,.\, 14{,}92 - 15 = 30 - 15 = 15^{m}.$$
$$h_1'' = H + h_1' = 30 + 15 = 45^{m}.$$
$$h_2' = 4{,}14\left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{900}{4{,}14^{2}}\right) - 15 = 4{,}14 \,.\, 4{,}28 - 15$$
$$= 17{,}72 - 15 = 2{,}72^{m}.$$
$$h_2'' = 17{,}72 + 15 = 32{,}72^{m}.$$
$$h_0' = 3{,}17\left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{900}{3{,}17^{2}}\right) - 15 = 3{,}17 \,.\, 6{,}6 - 15$$
$$= 20{,}9 - 15 = 5{,}9^{m}.$$
$$h_0'' = 20{,}9 + 15 = 35{,}9^{m}.$$

Digitized by Google

Betrachtet man die vorstehend gefundenen Verticalmaße als Ordinaten oder Verticalprojectionen der Parabelscheitel, gemessen von den bezgln. Auflaufpunkten, so stellen die folgenden Horizontalmaße die Abscissen oder Horizontalprojectionen der Scheitelpunkte dar, gemessen von denselben Punkten. Es ist:

$$m_1' = \frac{M}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{H}{h_1}\right) = 30\left(1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{30}{2{,}01}\right)$$
$$= 30\,(1 - 3{,}73) = -\,81{,}9^{m}.$$
$$m_1'' = 30\,(1 + 3{,}73) = 141{,}9^{m}.$$
$$m_2' = 30\left(1 - \frac{30}{4\,.\,4{,}14}\right) = 30\,(1 - 1{,}812) = -\,24{,}36^{m}.$$
$$m_2'' = 30\,(1 + 1{,}812) = 84{,}36^{m}.$$
$$m_0' = 30\left(1 - \frac{30}{4\,.\,3{,}17}\right) = 30\,(1 - 2{,}366) = -\,40{,}98^{m}.$$
$$m_0'' = 30\,(1 + 2{,}336) = 100{,}98^{m}.$$

Der Umstand, daß die Abscissen m_1', m_2' und m_0' negativ geworden sind, zeigt uns, daß die Scheitel der Seilcurven außerhalb der Transmissions-Abtheilung BC, seitwärts von der unteren Rolle, zu liegen kommen, also in Wirklichkeit durch die Seilstücke zwischen B und C gar nicht erreicht werden.

Auflösung 3.) Wir gehen nun über zur 3. und letzten Abtheilung unserer Drahtseiltransmission und denken uns zuerst

a) das führende Seil durch eine Tragrolle in der Mitte zwischen D und C unterstützt, und ebenso das geführte durch zwei über die Länge $M = 180^{m}$ gleich vertheilte. Setzen wir ferner voraus, daß in dem Seile dieselbe Spannung herrscht wie in der Abtheilung 2), daß also überhaupt ein Seil von gleicher Stärke wie dort und ebenso Seilscheiben von $2{,}7^{m}$ Durchmesser verwendet werden sollen, so bekommen wir zwischen den einzelnen Rollen Seilcurven mit folgenden Pfeilhöhen. Im führenden Seile ist:

$$h_1 = 0{,}3535\,.\,90\,[3{,}55 - \sqrt{12{,}6025 - 1}]$$
$$h_1 = 0{,}3535\,.\,0{,}1438\,.\,90 = 4{,}575^{m}.$$

Für das geführte Seil haben wir hier außerdem denselben Rollenstand $\frac{180}{3} = 60^{m}$ wie unter 2), und wir bekommen demnach wie dort:

$$h_2 = 4{,}14^{m}.$$

Der Durchmesser der das führende Seilstück tragenden (Trag-) Rolle wird, damit das Seil auch hier keine stärkere Biegungsspannung als $s_1 = 16^{k}$ pr. $\square^{mm}$ — wie in den Arbeitsrollen bei C und D — erleidet, ebenso groß gemacht wie diese, nämlich $2r_1 = 2{,}7^{m}$.

Dagegen können wir eventuell für das geführte Seil, der Spannung $t = 0{,}5\,T$ entsprechend, kleinere Rollen verwenden, und zwar ist nach Frml. (63^{b}):

$$r_2 \geq \frac{10000}{9 + 0{,}5\,.\,s_1}\,.\,\delta = \frac{21640}{9 + 0{,}5\,.\,17} = 1237^{m}$$
$$2r_2 \sim = 2{,}4^{m}.$$

Bei der niedrigen Spannung $s = 2^{k}$ fällt jedoch der Unterschied sehr gering aus, und man wird in solchem Falle nicht besondere Modelle neu anfertigen, sondern, wenn für r_2 keine passenden vorhanden, lieber diejenigen der Arbeitsrollen verwenden.

Digitized by Google

b) Es soll nun vorausgesetzt werden, daß man aus irgend einem Grunde zwischen C und D (Fig. 195) keine Tragrollen anbringen kann, daß also die Seile eine Spannweite von 180^{m} einnehmen sollen. Unter diesen Umständen würden wir bei einer Spannung von $s = 2^{k}$ pr. $\square^{mm}$ des Querschnittes im führenden Seile circa 20^{m} und im geführten 40^{m} Einsenkung erhalten. Abgesehen davon, daß ein solcher Seiltrieb entweder nur über einem Abgrunde, einem Thale oder zwischen zwei besonders hohen Scheibenthürmen möglich ist und daß er ein sehr langes Seil erfordert, dürfte sich in Folge der bedeutenden Schlaffheit der Betrieb auch nicht sehr vorteilhaft gestalten, und da ohnehin durch die beträchtliche Seillänge viel Seilgewicht nothwendig wird, so macht man — namentlich bei geringeren Kräften, kleiner verfügbarer Höhe und großen Spannweiten — das Seil kürzer als für $T = 2P$ und $t = P$ nothwendig ist, spannt also das Seil straff an, giebt ihm in Folge dessen und damit die Materialbeanspruchung im führenden Seile nicht größer werde als bei einem gewöhnlichen schlaffen Seiltriebe einen größeren Querschnitt und erhält dadurch — zwar etwas größere Rollen, aber — mitunter bedeutend kleinere Senkungen im geführten Seile; man erhält also einen Drahtseiltrieb, welcher nicht nur in Folge des Seilgewichtes allein, sondern conform einem Riementriebe mit auf Grund einer künstlichen Anspannung wirkt.

Einen solchen kurzen, straffen Drahtseiltrieb wollen wir nun an Stelle des unter a) ermittelten normalen, schlaffen Drahtseiltriebes mit Tragrollen setzen und dazu noch die weitere Bedingung stellen, daß nun auch die Materialbeanspruchung im führenden Seile größer, nämlich $s = 12^{k}$ pr. $\square^{mm}$ genommen werden soll. Ein 36-drähtiges Normalseil würde dann aus Drähten zu spinnen sein, deren Stärke beträgt:

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{36} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{20}{80}} = \frac{5{,}67}{\sqrt[3]{288}} = \frac{5{,}67}{6{,}604}$$

$$\delta = 0{,}86^{mm},$$

und das Seil selbst bekommt einen Durchmesser:

$$d = 8\,\delta = 8 \,.\, 0{,}86 = 6{,}88 \sim = 7^{mm}.$$

In Folge der Seilkürzung vergrößert sich die Gesammtspannnng T zu einer Spannung T', und wir wollen sagen, sie sei allgemein $T' = \mu T$. Mit Bezug auf nebenstehende Fig. 196 ist dann:

$$T' = \mu T = 2\mu t = P + t'.$$

Da ferner $P = t$ ist, so hat man auch:

$$T' = t + t'$$

und:

$$2\mu t = t + t' \text{ oder: } t' = t\,(2\mu - 1).$$

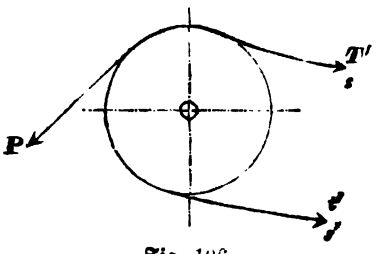


Fig. 196.

Da die Seilquerschnitte im führenden und im geführten Seile dieselbe Größe haben, so verhalten sich offenbar die Gesammt-Spannungen wie diejenigen pro Flächeneinheit also:

$$T' : t' = s \,.\, s',$$

Digitized by Google

und es wird:

$$\frac{t'}{T'} = \frac{2\mu - 1}{2\mu} = \frac{s'}{s},$$

also:

$$s' = s \cdot \frac{2\mu - 1}{2\mu}.$$

Entsprechend einer μ-mal größeren Tragkraft bekommen wir, da die Beanspruchung ($s = 12$) dieselbe bleiben soll, eine Drahtstärke δ, welche nach Frml. (62) $\sqrt[3]{\mu}$ mal so groß ist als δ; beim schlaffen Seiltriebe also, wenn wir z. B. $\mu = 4$ setzen:

$$\delta' = \delta\sqrt[3]{\mu} = 0{,}86 \cdot \sqrt[3]{4} = 0{,}86 \cdot 1{,}587$$

$$\delta' = 1{,}36^{mm} \text{ und } d = 8\delta' = 11^{mm}.$$

Den Seilscheiben hat man für $s = 12$ und $s_1 = 6$ dann einen Halbmesser von:

$$r = \frac{1250}{6} \cdot 11 = 2291^{mm}$$

oder rund: $r + 2{,}300^{m}$ und $2r = 4{,}6^{m}$ zu geben.

Die Seilgeschwindigkeit stellt sich nun freilich etwas höher, nämlich:

$$v = \frac{2r\pi \cdot n}{60} = \frac{14{,}45 \cdot 80}{60} = 19{,}3^{m} \text{ pr. sec.}$$

Die Seilsenkungen fallen jetzt trotz der großen Spannweite überraschend klein aus:

$$h_1 = 0{,}3535 \cdot 180\left[\frac{160 \cdot 12}{180} = \sqrt{112{,}6356}\right]$$

$$= 0{,}3535 \cdot 0{,}047 \cdot 180 = 2{,}988 \sim = 3^{m}.$$

Die Spannung (s') im geführten Seilstücke finden wir nach obiger Formel bei $\mu = 4\,s$ und $= 12$ zu:

$$s' = s \cdot \frac{2\mu - 1}{2\mu} = 12 \cdot \frac{2 \cdot 4 - 1}{2 \cdot 4} = \frac{7}{8} \cdot 12 = 10{,}5^{k};$$

sie ist hier also nicht halb so groß wie im führenden Seile, sondern verhältnißmäßig viel größer, weshalb nun auch die Einsenkung im geführten Seile verhältnißmäßig kleiner wird:

$$h_2 = 0{,}3535 \cdot 180\left[\frac{160 \cdot 10{,}5}{180} - \sqrt{86{,}0489}\right]$$

$$= 0{,}3535 \cdot 0{,}054 \cdot 180 = 3{,}436 \sim = 3{,}44^{m},$$

also $0{,}7^{m}$ kleiner als beim schlaffen Seile mit 2 Tragrollen.

Endlich soll auch für diesen Fall, den straffen Seiltrieb, noch die Einsenkung h_0 der ruhenden Seile berechnet werden. Unser Näherungsformel (66), sowie die von Prof. Grove ausgeführte Lösung können in der oben angeführten Gestalt und Weise nur bei einem schlaffen Seiltriebe — wo $t = 0{,}5T$ ist — verwendet werden. Haben nun die Seilspannungen im führenden und im geführten Seilstücke eines arbeitenden Seiles ein anderes beliebiges Verhältniß, so muß man die Ruhesenkung h_0 direct aus der Seillänge des arbeitenden Seiles bestimmen. Reuleaux*)

*) $h_0 = \sqrt{\frac{h_2^2 + h_1^2}{2}}$. (Vergl. „Constructeur" 1869 pag. 383.)

Digitized by Google

giebt daher richtiger eine Näherungsformel, welche auch diesem Vorkommen — daß h_2 sehr wesentlich verschieden ist von $2 . h_1$ — Rechnung trägt, und danach erhalten wir:

$$h_0 = \sqrt{\frac{3{,}44^2 + 3^2}{2}} = 3{,}22^m.$$

Je mehr sich die Spannung im geführten Seile derjenigen im führenden nähert, je weniger also h_2 von h_1 abweicht, desto näher wird auch die Ruhesenkung h_0 dem arithmetischen Mittel aus den Betriebssenkungen h_1 und h_2 sein, und es erscheint deshalb der hier gefundene Näherungswerth von h_0 als der Wirklichkeit nahezu entsprechend. Um uns jedoch von dem Zutreffen unserer Annahme zu überzeugen und um ein Beispiel zu liefern, wie man die von Grove speciell für den Fall des schlaffen Seiles ausgeführte Methode für das straffe Seil verwendbar macht, wollen wir zum Schlusse die genaue Berechnung von h_0 noch durchnehmen.

Wir schließen an an den allgemeinen Ausdruck*):

$$\frac{4}{3}\left(\frac{h_0}{m}\right)^2 - \frac{2 . \mathfrak{S}_0}{E} = \frac{2}{3}\,\frac{h_1^2 + h_2^2}{m^2} - \frac{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2}{E}$$

und setzen für die specifischen Spannungen die betreffenden Werthe aus der Frml. $h = 0{,}446\,\frac{m^2}{s}$ ein:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{h_0}{m}\right)^2 - \frac{2 . 0{,}446\,\frac{m^2}{h_0}}{E} = \frac{2}{3} . \frac{h_1^2 + h_2^2}{m^2} - \frac{0{,}446\,\frac{m^2}{h_1} + 0{,}446\,\frac{m^2}{h_2}}{E}.$$

Die ganze Gleichung mit $\left(\frac{3}{4}\,m^2 h_0\right)$ multiplicirt, giebt:

$$h_0^3 - \frac{0{,}669\,m^4}{E} = h_0 . \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} - 0{,}3345 . \frac{m^2 h_0}{E}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right).$$

Geordnet:

$$h_0^3 - \left[\frac{h_1^2 + h_2^2}{2} - 0{,}3345 . \frac{m^4}{E}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\right] h_0 - 0{,}669\,\frac{m^4}{E} = 0.$$

Setzen wir darin einmal $h_2 = 2 . h_1$, so kommen wir auf den Ausdruck:

$$h_0^3 - \left(2{,}5\,h_1^2 - 0{,}502\,\frac{m^4}{h_1 E}\right) h_0 - 0{,}669\,\frac{m^4}{E} = 0,$$

welcher also nur zu brauchen ist, sobald $t = 0{,}5\,T$.

Unsere oben gefundene cubische Gleichung weicht nur in den Coefficienten zu h_0 von der letzten Specialformel ab, und wir können sie wie diese entweder mit der Cordani'schen Formel oder trigonometrisch auflösen. Im vorliegenden Zahlenbeispiele liefert die erstere Methode auch reelle Werthe, und es soll deshalb hier nach derselben verfahren werden. Es wird:

$$A = \left[\frac{h_1^2 + h_2^2}{2} - 0{,}3345 . \frac{m^4}{E}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\right]$$

$$A = \frac{9 + 11{,}8336}{2} - \frac{0{,}3345 . 90^4}{2000000}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3{,}44}\right)$$

$$A = 10{,}44685 - \frac{0{,}3345 . 65{,}61 . 0{,}624}{2} = 3{,}6138.$$

*) „Deutsche Industrie-Zeitung" 1876, pag. 404.

Digitized by Google

$$B = 0{,}669\,\frac{m^1}{E}$$

$$= 0{,}669\,.\,\frac{65{,}61}{2} = 21{,}9465.$$

$$\frac{B}{2} = 10{,}97325 \text{ und } \left(\frac{B}{2}\right)^2 = 120{,}412$$

$$\frac{A}{3} = 1{,}2046 \text{ und } \left(\frac{A}{3}\right)^3 = 1{,}74795.$$

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

$$h_0 = \sqrt[3]{10{,}97325 + \sqrt{120{,}412 - 1{,}74795}} + \sqrt[3]{10{,}97325 - \sqrt{120{,}412 - 1{,}74795}}$$

$$h_0 = \sqrt[3]{10{,}97325 + 10{,}8933} + \sqrt[3]{10{,}97325 - 10{,}8933}$$

$$h_0 = 2{,}79036 + 0{,}43077 = \mathbf{3{,}22713^m}.$$

Die Reuleaux'sche Näherungsformel liefert im vorliegenden Beispiele also einen nur um $0{,}87^{mm}$ differirenden Werth, und wir können sie daher zur Ermittelung der Ruhesenkung bei straffen Seiltrieben ohne Bedenken anwenden.

Legen wir nun zwischen den Stationen C und D (Fig. 195) den straffen Seiltrieb in der vorstehend ermittelten Weise an, so bekommen wir trotz der großen Spannweite nur eine ganz geringe Höhe für die Scheiben-Axen und Wellen; denn, da $h_2 - h_1 = 3{,}44 - 3 = 0{,}44$ viel kleiner ist als $2r = 4{,}6$, so können wir eventuell das führende Seilstück nach unten nehmen, und die Seilscheibenmitten brauchen, wenn sonst kein Hinderniß da ist, nur $2{,}3 + 3 = 5{,}3$ Meter hoch über dem horizontalen Grunde verlegt zu werden.

3. Construction, Verhältnisse und Ausführung der Seilscheiben für Drahtseil-Transmissionen.

Die Grundlage, den Ausgangspunkt für die rationelle Construction der Drahtseil-Scheiben bilden die Größe derselben und die Stärke des Drahtseiles. Letztere hängt ab von der Größe der zu übertragenden Kraft, und den Halbmesser der Scheiben setzten wir in Beziehung zur Beanspruchung der Seildrähte — in der Weise nämlich, daß wir bei hoher specifischer Zugbelastung des Seiles verhältnißmäßig große Scheiben erhalten, und umgekehrt.

Jedenfalls sind die Durchmesser der Seilscheiben aber möglichst groß zu machen, damit nicht in Folge des zu starken Biegens hoher Effectverlust entstehe, die Structur des Drahtmateriales und — durch gegenseitiges Abschleifen — die Drähte im Querschnitt verringert werden.

Eine Folge davon, daß wir die Seilstärke nicht ausschließlich proportional der Umfangskraft machen und nicht ein constantes Verhältniß zwischen Seilstärke und Scheibengröße gelten lassen, sondern vielmehr dieses Verhältniß von der specifischen Inanspruchnahme des Seiles abhängig machen, wird nun die sein, daß wir für ein- und dieselbe Seilstärke verschieden große Scheiben erhalten, und wir müßten streng genommen wie bei den Riemenscheiben, wo sich für ein- und denselben Durchmesser verschiedene Breiten nöthig machen, auch hier verschieden starke

Digitized by Google

Modelle von Seilscheiben derselben Größe anfertigen. Wie man sich aber dort in gewissen Grenzen mit „Abdämmen" und „Abdrehen" des breiteren Kranzes hilft, so kann man hier, wenn von Haus aus die Kränze im Modelle stark genug gemacht worden sind, für jeden einzelnen Fall besondere Kernkasten anfertigen, so daß man immer eine zur Seilstärke passende Rille oder Spur erhält.

Gleichwohl empfiehlt es sich im Seiltransmissionsbau dennoch verschieden starke Modelle zu verwenden, da nämlich außerdem die Scheiben theils als Arbeitsscheiben (auf „Wellen" montirt), theils als Tragscheiben (auf „Axen" montirt) dienen und demzufolge eine ganz wesentlich verschiedene Inanspruchnahme erleiden. In ähnlichem Verhältniß stehen etwa beim Riementriebe Fest- und Losscheiben zu einander.

Die Seilscheiben zu Förderungen sind immer nur Tragscheiben und ihre Construction unterliegt überhaupt noch einigen speciellen Rücksichten, so daß man Transmissions- und Förderscheiben nicht ohne Weiteres vertauschen darf.

Das Ganze einer Seilscheibe zerfällt, wie auch bei den Riemenscheiben, in die drei verschiedenen Theile: Kranz, Armsystem und Nabe, und es sind auch die zwei letzten Theile in ihrer Form und Construction ganz übereinstimmend mit den entsprechenden der Riemenscheiben. Der Kranz macht davon eine Ausnahme, weil hier das Zugorgan anders beschaffen ist als ein Riemen, und wir beginnen nun damit, an der Hand der Figuren auf Bl. LXXIII, zunächst die verschiedenen Constructionen

a) des Kranzes

der Seilscheiben zu besprechen. Fig 1ª, Bl. LXXIII stellt das Kranz-Profil der Scheibe Fig. 1 in wirklicher Größe dar. In Bezug auf Construction und praktische Ausführung nimmt der Kranz der Seilscheiben ganz besonderes Interesse in Anspruch, da es nächst der Größe der Scheiben von einer richtigen Profilirung und vorteilhaften Ausstattung desselben abhängt, ob das Seil geschont oder zeitig unbrauchbar wird. Zunächst erscheint es deshalb geboten, daß man den Grund der Seilrille nach einem Kreisbogen (concav) krümmt, welcher möglichst nahe dem umschreibenden Kreise des Seiles gleichkommt, damit nämlich das Seil einerseits, bei zu enger Rille, nicht klemmt und sich äußerlich rasch abnutzt, andrerseits aber, in Folge zu schwach gekrümmten Rillengrundes, im Querschnitt nicht zu stark deformirt, breitgedrückt wird. Im letzteren Falle wird nämlich das Seil äußerlich deshalb stark angegriffen, weil der nöthige Reibungsdruck sich auf eine zu kleine Seiloberfläche verteilt und diese daher stärker abgenutzt wird; zugleich aber kann der Seilquerschnitt bei starker Seilspannung verdrückt werden, sodaß auch dabei die Drähte sich aneinander reiben und verschleißen.

Wir glauben daher bei Transmissions-Seilscheiben — bei Förderscheiben macht man aus anderen Ursachen die Rillen weiter — den richtigen Weg einzuschlagen, wenn wir den Radius ϱ des Seilrillengrundes $1 + 1{,}5^{mm}$ größer nehmen als den Seilhalbmesser $\left(\frac{d}{2}\right)$, also setzen:

$$\varrho = 1 + 0{,}5\,d + 1{,}5 + 0{,}5\,d \ldots (70).$$

Bei Fig. 2ª und Fig. 3ª d. Bl. ist derselbe größer angenommen, weil dort der Rilleugrund nicht starres Gußeisen, sondern mit Leder ausgefüttert ist und

Digitized by Google

weil sich in diesem weicheren Stoffe das harte Seil ohnedies etwas eindrückt und nicht so leicht abschleift.

An den kreisbogenförmigen Rillengrund schließen sich (Fig. 1ª) nach außen divergirende gerade Linien an, welche schließlich in noch stärker ausweichende (convexe) Kreisbogen übergehen, sodaß ein Abschlagen des schwankenden oder nicht genau in der Rollenebene auflaufenden Seiles vermieden wird.

Den Halbmesser (r) der Seilscheiben rechnen wir stets von Mitte Drehaxe bis Mitte Seil und bemessen die Tiefe der Seilrille (a) — von Mitte Seil bis an die äußersten Punkte des Kranzes — im Allgemeinen zu:

$$a = 17 + 0{,}7d \quad \ldots \quad (71).$$

Dann construiren wir ein Trapez (mnop); dessen parallele Seiten sind die Sehne des Rillengrundes (mp) und $no = a$.

Die Bodenstärke (s) des Kranzes machen wir:

$$s = 10 + 0{,}5\,d \quad \ldots \quad (72),$$

nehmen s und dazu ungefähr 0,2 din den Zirkel und schlagen, indem wir in der Mittelebene der Scheibe einsetzen, durch den äußeren Punkt von s einen Kreisbogen, legen daran zwei Tangenten m'n' und p'o', welche an der Peripherie des Kranzes ungefähr um $n'n = oo' = 0{,}5s$ von den Eckpunkten des Trapezes abstehen. Schließlich werden die Wände der Seilrille etwas nach auswärts geschweift und erhalten in den äußeren Theilen eine Stärke, 0,5 s.

Nach innen schließen sich an den Kranzboden die Arme an, welche im vorliegenden Falle kreuzförmigen Querschnitt haben, und wir haben zur Vermehrung der Bruchfestigkeit in der Scheibenebene noch eine ringsumlaufene Rippe von der Breite b und der Höhe 0,7 s angenommen. Die totale Höhe des Kranzes ist nun:

$$a' = 27 + 1{,}7\,d \quad \ldots \quad (73).$$

Bezüglich der Herstellung solcher Scheibenkränze bemerken wir, daß man im Modelle dieselben, wie alle solche Radkränze, erst aus einzelnen, in Form von Ringsectoren geschnittenen und gehobelten Pfosten mit Berücksichtigung eines gehörigen Fugen- und Faserwechsels verleimt und dann nach der äußeren Gestalt des Profiles abdreht. Die Rille selbst wird im Modelle nicht ausgeführt — außer bei getheilten Modellen — sondern man dreht vielmehr eine ringsumlaufende Kernmarke von der Breite n'o' und entsprechender Höhe an und setzt in die Form Kerne, als Sectoren getheilt, ein, welche dann beim Gusse das Innere des Profiles bilden und in dem von der Kernmarke ausgesparten Raume ihre Auflage finden. Am fertigen Gußstücke beseitigt man schließlich die Gußnähte, welche zwischen den Kernfugen entstanden sind und dreht nur das Innere des Kranzes glatt aus.

Für flache oder Band-Seile erhält der Seilscheibenkranz ein ⊔-förmiges Profil.

b) Die Arme der Seilschreiben.

Dieselben sind bei Fig. 1, Bl. LXXIII gerade, mit kreuzförmigem Querschnitte, bei Fig. 2 elliptisch und geschweift und bei Fig. 3 als schmiedeiserne Rundstäbe besonders eingegossen. Alle drei Arten kommen in der Praxis vor, und speciell die geschweiften mit elliptischem Querschnitt empfehlen sich für kleinere und leichte Scheiben, während die dritte Art vorzüglich bei sehr großen Seilscheiben Verwendung findet.

Digitized by Google

Je nachdem die Scheibe als Arbeits- oder als Tragscheibe auftritt, sind die Arme entweder auf Biegung oder nur auf Druck beansprucht, und sie müssen außer in dieser Richtung genügende Festigkeit auch gegen seitliche Schwankungen und Drücke gehörige Stabilität gewähren; in dieser Beziehung sind gerade der Kreuzquerschnitt und die Anordnung in Fig. 3 vorzüglich.

Die Anzahl der Arme bestimmen wir so, daß sich für große Scheiben, die ja bei Seiltransmissionen häufig sind, beinahe eine constante Kranzlänge zwischen zwei Armen ergiebt; wir nehmen also hier keine Rücksicht auf die Seilstärke, sondern überlassen das dann den Querschnittsdimensionen der Arme. Es sei:

$$A = 3 + 0{,}003\,r \quad \ldots \quad (74).$$

Dies und ein constantes Verhältniß zwischen Höhe (h) und Breite (b) der Hauptrippe der Arme vorausgesetzt, erhält man bei kreuzförmigen Querschnitte für die Armhöhe an der Nabe analog wie bei den Riemenscheiben:

$$h = 7{,}5 \sqrt[3]{\frac{d\,r}{A}} \quad \ldots \quad (75)$$

und giebt derselben am Kranze eine Verjüngung auf $0{,}7\,h$.

Die Breite der Hauptrippe ist angenommen zu $b = 0{,}17\,h$ und die der Nebenrippe zu $c = 0{,}12\,h$; beide sind für die ganze Länge des Armes constant, und die Höhe der Nebenrippe gestaltet man, auf Erfordern einer größeren oder geringeren Stabilität, nach der Nabe hin zunehmend und gehörig in dieselbe verlaufend.

Fig. 1^b stellt den mittleren Normalschnitt xy (in Fig. 1) in halber Größe dar. Dort ist natürlich die Höhe der Hauptrippe nur $\frac{h + 0{,}7\,h}{2} = 0{,}85\,h$. — Dieselbe Figur zeigt, was schon früher bei Lagern und Lagerböcken hervorgehoben wurde, daß man den Rippenquerschnitt immer so zu profiliren hat, daß die in Richtung des Aushebens aus der Form sich erstreckenden Theile — hier also die Nebenrippe — des leichteren Aushebens wegen — nach außen verjüngt sein muß, während man, da die Verjüngung hier nicht nöthig ist und nur unnöthig das Modell vertheuert, die normal zur Aushebungsrichtung gelegene Rippe im Querschnitt gleich stark macht. — An Kranz und Nabe sind die Arme gehörig durch Kreisbogen anzuschließen.

Da die Querschnittsdimensionen der Seilscheibe im Verhältniß zur Größe dieser immer schwach ausfallen, so muß man stets gewärtigen, daß Gußspannungen zurückbleiben oder einen Bruch verursachen. Deshalb darf man hier die Materialsparung nicht zu weit treiben und muß namentlich bei geraden Gußarmen mindestens die Nabe in einem oder, bei sehr großen Scheiben, in zwei Axial-Schnitten theilen, falls nicht die Rücksichtnahmen auf Herstellung und Transport es nothwendig machen, die ganze Scheibe zu theilen (s. Fig. 3, Bl. LXXIII).

c) Die Nabe.

ist bei Seilscheiben, eben zur Erzielung einer größeren Stabilität, verhältnimäßig lang zu machen. Wir bestimmen deren Länge nach:

$$L = 0{,}17\,r + 5\,d \quad \ldots \quad (76).$$

Die Wandstärke der Nabe sei an den Endflächen:

$$w = 20 + 0{,}15\,(b + h) \quad \ldots \quad (77),$$

Digitized by Google

und wir verstehen unter d den Durchmesser der betr. Axe oder Welle. — Im Inneren ist die Nabe auf die Länge von 0,5L und in einer Stärke von 0,2w ausgespart; die Binderinge der Nabe sind nach denselben Regeln bestimmt wie bei den Riemenscheiben (Frml. 52), und auch die Keile unterliegen, sofern es Torsionskeile sind, also zu Arbeitsscheiben gehören, denselben Anforderungen wie bei Riemenscheiben und können wie diese nach pag. 260 berechnet werden. Für Tragscheiben fallen sie ohnehin in Folge des kleineren (d) etwas schwächer aus.

Endlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man auch den Axen der Tragrollen eine der Stabilität entsprechende Länge (L) ertheilen muß, und daß man zur Reducirung der Reibung die Zapfen derselben minimal schwach und lieber etwas lang macht. Von Mitte zu Mitte Zapfen messe die Tragaxe mindestens:

$$L = 150 + 0{,}5r \quad \ldots \quad (78).$$

Bei Förder-Seilscheiben gestattet man den Axen nicht selten eine gewisse Längsverschiebung in den Lagern, indem man die Zapfen länger macht als die Lager oder beide Theile mit einem der erforderlichen auf eine gewisse Umdrehungszahl kommenden Verschiebung entsprechenden Schraubengewinde versieht. Diese Anordnungen sind dadurch veranlaßt, daß in Folge der Breite des Seilkorbes (Trommel) und der senkrechten Schachtleitung das Seil während einer Förderung in verschiedenen Richtungen zur Mittelebene der Seilscheibe aufläuft und in Folge dessen bei geringer Entfernung zwischen Seilkorb und feststehender Scheibe leicht an den Rändern des Scheibenkranzes streifen würde.

Fig. 2, Bl. LXXIII. Den Verhältnißwerth (Frml. 71) für die Rillentiefe haben wir solcher Art festgestellt, daß er bei schwachen Seilen verhältnißmäßig größer ausfällt als bei starken, da nämlich zu vermuthen steht, daß schwache Seile leichter schwanken und schlagen als starke, demnach jene in höherem Grade gegen Abschlagen gesichert werden müssen. Wo man nun überzeugt ist, daß dieser Umstand trotz der geringen Seilstärke nicht eintritt, wo vielleicht gar das Seil straff gespannt ist (s. pag. 289), kann man mit der Rillentiefe (a) bis auf 1,5d oder 1,3d herabgehen und ist vielleicht sogar dazu gezwungen, weil das Seil eventuell zu kurz ist, um geschlossen über hohe Ränder eingelegt werden zu können.

In dieser Weise ist die Seilrille der vorliegenden Scheibe ausgführt. Die Construction des Kranzes beruht übrigens ganz auf ähnlichen Grundlagen wie im vorhergehenden Beispiele; da jedoch der Rillengrund mit einem Lederstreifen belegt ist, so haben wir die Krümmung des Grundes etwas flacher gewählt und die Stärke des Kranzbodens um 3^{mm} — so viel als etwa die Lederstärke beträgt — größer genommen als s.

Es könnte auch hier nicht schaden, wenn der Kranz an der der Nabe zugekehrten Seite noch durch eine Rippe verstärkt würde; wir haben nur gerade hier eine sehr leichte Scheibe vorausgesetzt und eines organischen Anschlusses an das Armprofil wegen davon abgesehen.

Nach der Idee des Verfassers kann der Lederbelag sehr einfach auf die gezeichnete Art befestigt werden. Der Grund der Seilrille wird nach einem flachen Bogen und in einer Breite gleich $d + 3^{mm}$ ausgedreht; zwischen je zwei Armen befindet sich an der inneren Kranzseite ein kastenförmiger Durchlaß, welcher in der Scheibenebene nach außen keilförmig zugespitzt ist. Der Lederstreifen wird nun in die Rille eingelegt und bei jedem Durchlaß eine Oese gebildet und mit Holzkeil

Digitized by Google

und Keilplatte, Fig. 197 darin festgemacht. Die Berührungsflächen von Keil und Keilplatte werden, damit ein Herausfallen möglichst vermieden werde, mit Leim bestrichen, sodaß diese beiden Körper einen einzigen Keil bilden. Den Anfang des Bandes steckt man zuerst in einen Durchlaß, läßt ihn ein Stück nach innen hervortreten und macht ihn da provisorisch mit einem Keil fest. Ist man mit dem Belegen an diesem Durchlaß wieder angekommen, so steckt man auch das Ende des Streifens durch, bringt die Keile ein und verbindet schließlich Anfang mit Ende. Gebrauchte Lederriemen lassen sich hierzu recht gut verwenden, und sollte der Belag einmal defect geworden sein, so kann er ohne große Schwierigkeit erneuert werden. —

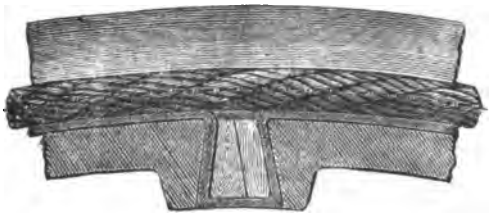


Fig. 197.

Was nun weiter die Arme betrifft, so haben wir — um ein leichtes System zu erhalten und um die Nabe ungetheilt ausführen zu können — dieselben im Querschnitt elliptisch gemacht und im Profile, da sie sehr lang sind, doppelt geschweift. Jeder Arm besteht seiner Länge nach aus zwei ziemlich gleich langen Sechstel-Bogen; wir haben also die Länge r halbirt und über jeder Hälfte als Basis ein gleichseitiges Dreieck construirt, sodaß die Spitzen derselben die Krümmungsmittelpunkte der Mittellinie eines Armes bilden. — Die Höhe des Armquerschnittes an der Nabe wird gewöhnlich hinreichend groß, wenn man sie

$$h_0 = 0{,}8\,h$$

macht und also h nach Frml. (75), pag. 295 für Kreuzquerschnitt bestimmt. Fig. 2, Bl. LXXIII zeigt den mittleren Armquerschnitt xy in $^1/_2$ wirkl. Größe und läßt erkennen, daß auch hier — wie bei den Riemenscheiben — die kleine Halbaxe gleich der halben großen angenommen wurde.

Solche Arme ertheilen der Scheibe keine große Stabilität nnd dürfen deshalb bei sehr unruhigem Gange nicht wohl angewendet werden; jedenfalls ist es aber nöthig, in der Nähe der Nabe, wo die Gefahr eines Seitenbruches am größten ist, Versteifungsrippen anzuordnen. —

Fig. 3, Bl. LXXIII bietet gegenüber den vorher besprochenen Constructionen einige wesentliche Abweichungen dar. Der Kranz derselben ist mit zwei nebeneinander liegenden Rillen von gleicher Form und Beschaffenheit versehen; die Scheibe ist also eine sog. Doppelscheibe und ist als solche entweder nur Tragscheibe oder theilweise auch Uebertrag- oder Arbeitsscheibe, je nachdem die Axe derselben eine reine Tragaxe (s. pag. 296) ist oder einen Theil der durch das eine Seil eingeführten Arbeit abgiebt. Solche Doppelscheiben würden z. B. angebracht werden können bei den Stationen B und C, Fig. 195, und es würde dann in C nur eine Uebertragung zwischen den beiden Seilen durch den Kranz stattfinden, während in B 20 Pferdestärken durch Arme, Nabe und Welle abgehen und nur der Rest von 140 HP bei B auf das zwischen A und B laufende Seil übergeht.

Wir sehen, daß auch hier der Rillengrund mit Leder ausgefüttert ist; die schwalbenschwanzförmige Aussparung ist aber beträchtlich größer als bei Fig. 2,

Digitized by Google

und sie wird mit hochkantig gestellten, nach dem Profil der Aussparung geschnittenen Lederscheiben besetzt. — Anstatt Leder hat man auch Dauben von Weiden- oder Pappelholz oder auch Guttaperchastreifen angewendet; das bedingt jedoch, daß man in der Seite des Kranzes Oeffnungen ausläßt, durch welche diese Gegenstände eingebracht werden können und welche nachträglich wieder auszusetzen und zu schließen sind.

Besser ist dann jedenfalls das von Prof. Fink angewendete Verfahren. Derselbe belegt nämlich den Rillengrund, d. h. die Aussparung in demselben, mit — wahrscheinlich getheertem — Bindfaden, welcher in so viel Windungen um die Scheibe gewickelt wird, als zur Ausfülluug der Aussparung nöthig ist. Durch den Druck des Seiles preßt sich derselbe dann zu einer festen Masse zusammen.

Sowohl die Seitenflächen der Aussparung, Fig. 3ª, als auch die inneren Seiten-Begrenzungen der Rillen sind unter unter Winkeln von 15° gegen die Mittelebene geneigt, und es entsteht deshalb hier am äußeren Umfange des Kranzes eine etwas weitere Rollenöffnung als bei Fig. 1 und 2; sie wird ungefähr = 1,5a. Auch den Boden macht man verhältnißmäßig etwas stärker (1,1s), damit man nicht zu viel Arme anordnen muß. Uebrigens muß man darauf sehen, daß die Seiten- und Zwischenwände am Kranze nicht zu schwach ausfallen, damit sie nicht ausbrechen oder ausgesprengt werden.

Die Anzahl der schmiedeeisernen Rundeisen-Arme muß nun ungefähr doppelt so groß genommen werden als bei completter Außführung in Gußeisen, also etwa:

$$A' = 6 + 0{,}007\,r \quad \ldots \quad (79).$$

Die Arme werden mit ihren am Kranze parallel zur Scheibenebene gebogenen Enden am besten abwechselnd in die zwei Seilebenen verlegt und in an der inneren Kranzseite angeordneten Hülsen eingegossen.

Die Stärke der Rundeisenstäbe sei:

$$\Delta = 2\sqrt[3]{\frac{dr}{A'}} \quad \ldots \quad (80)$$

oder ungefähr $^1/_4$ der Armhöhe (h) bei gußeisernen Armen mit Kreuzquerschnitt.

Selbstverständlich muß die Nabe einer solchen Seilscheibe, wenigstens an den Endflächen, gehörig groß und stark ausgeführt werden und ist, selbst wenn sie nicht getheilt gegossen wird, durch schmiedeiserne Ringe zu binden. — Das Einformen und Vergießen solcher Scheiben mit schmiedeeisernen Rundstabarmen erfordert ganz besondere Sorgfalt und wird von H. v. Reiche in seiner „Maschinenfabrikation" (pag. 122 Bd. II) ausführlich beschrieben, worauf wir hierfür sich Interessirende verweisen.

Da die Seilscheibe Fig 3, Bl. LXXIII einen Durchmesser von 4 Meter hat, so ist es unmöglich, dieselbe per Eisenbahn zu befördern; sofern dieser Fall vorliegt, muß man sie dann in zwei Hälften ausführen und am Orte zusammenstellen, was auch wieder am einfachsten mittelst „warm aufgezogener schmiedeiserner Ringe" (s. pag. 164 Bd. I) geschieht. Fig. 3ª d. Bl. stellt die Kranzverbindung in Ansicht und im Grundriß in $^1/_5$ wirkl. Größe dar. Die kleinen punktirten Kreise im Grundriß sollen andeuten, daß man, um im Falle einer Lockerung das Herabfallen des (etwas schräg aufgezogenen) Ringes zu verhindern, kleine Schräubchen zum Theil in den Ring, zum Teil in die gußeisernen ovalen Ansätze einschraubt. —

Digitized by Google

Schließlich sei noch bemerkt, daß man bei sehr großen und starken Seilscheiben das Armsystem als ein Gitterwerk aus Flach-, Winkel, U-, T-, und Doppel-T-Eisen construirt, wie es z. B. bei großen Seiltrommeln ebenfalls geschieht, und wenn man geeignete Biegmaschinen hat, so können auch bei Bandseilscheiben sogar die Kränze aus ⌐- oder ⊢- Eisen hergestellt werden: die Eigenschaft der größeren Festigkeit und der hierauf folgenden geringeren Schwere solcher Gegenstände, sowie überhaupt die größere Sicherheit gegen Bruch dürften auch hier dem Walzeisen weiteren Eingang verschaffen.

C. Direct eingreifende Räderwerke.

— Zahnräder. —

1) Allgemeine Bemerkungen über die Radzähne und deren Verhältnisse.

Die Zahnräder bestehen aus Scheiben oder Ringen, welche an ihren Umfängen mit eigenthümlich geformten Erhöhungen — Zähnen — versehen sind, deren Abstände (Theilung) — auf den Umfängen der Grundkörper, d. i. im sogen. Theilkreise (Verhältnißkreis), gemessen — bei zwei zusammenarbeitenden Rädern gleich groß sind.

Bringt man nun zwei solche Räder zu einander in eine derartige Beziehung, daß Erhöhungen des einen Rades zwischen solche des anderen zu liegen kommen, und dreht man dabei das eine Rad um seine als feststehend zu betrachtende geometrische Axe um, so schieben ein, zwei oder mehr Zähne dieses Rades, welche mit einer gleichen Anzahl Zähnen des anderen Rades in Berührung — Eingriff — sind, letztere vorwärts und ertheilen damit dem getriebenen Rade ebenfalls eine Drehung um seine geometrische Axe.

Die Drehaxen der Zahnräder können alle möglichen Lagen (pag. 170) (relativ) zu einander einnehmen. Von dieser Axenlage hängt die specielle Form der Scheiben ab, sowie auch die Form und Stellung der Zähne. Fallen die Axen in eine gemeinschaftliche gerade Linie, so haben die Scheiben ganz allgemein prismatische, bei Kreisscheibenrädern im Besonderen, cylindrische Gestalt, die Zähne sind keilförmig und stehen an der Endfläche (nahe dem Umfange) der Scheiben, axial gerichtet: d. s. Mitnehmer- und Klauenkupplungen. Liegen die Axen in einer Ebene und sind sie parallel zu einander, so sind die Scheiben prismatisch (cylindrisch), die Zähne stehen auf dem Umfange, sind prismatisch geformt und liegen mit ihren Prismenaxen parallel zur Axe des Rades, sodaß die gerade abgeschnittenen Endflächen radial und die Ebenen parallel zur Radebene zu liegen kommen: d. s. Stirn- (Stern-) oder Kammräder. Schneiden sich die Axen, so sind die Scheiben von (kreis-) kegelförmiger Gestalt, die Zähne pyramidal, nach dem Schnittpunkte der Wellen convergent zulaufend und stehen auf dem Umfange der Scheiben: d. s. Winkel- oder Kegelräder*). Endlich für gekreuzte Axen

*) In älteren Mühlwerken und in Uhren, sowie beim Mangelrade findet man für solche Axenlage (gewöhnlich mit 90° Axenwinkel) auch cylindrische Räder, deren Zähne in Richtung der Axe an der Endfläche stehen und nennt diese dann Kronräder, die Zähne Triebstöcke. — Hierher gehören auch die sogen. Planräder, d. s. Kegelräder, bei denen das eine Rad ($2\beta =$) 180° Spitzenwinkel hat. (Fig 158, pag. 200).

Digitized by Google

erhält man Scheiben (Zonen) von hyperboloidischer Form, an deren Umflächen die windschiefen und nach dem Kreuzungspunkte C, Fig. 156 der Axen hin verjüngten Zähne angeordnet sind: d. s. Hyperbelräder.

Außerdem giebt es noch für kreuzende, schneidende und parallelle Axenlage direct eingreifende Räder mit cylindrischer (oder kegelförmiger) Grundform und schraubengangartigen Zähnen: d. s. die Schrauben- und Schneckenräder. —

Die Bewegungsform (pag. 175) kann bei Zahnrädern entweder übereinstimmend oder verändert sein. Fast immer (ausgenommen etwaige Bewegungsmechanismen) construirt man die Räder in der Weise, daß die Form der Bewegung bei zwei eingreifenden Rädern dieselbe ist, und zwar so, daß das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten in jedem Augenblicke dieselbe Größe hat, daß also die Umfänge zweier Verhältnißkreise eines Räderpaares gleiche Geschwindigkeit haben. Diese Voraussetzung bildet die Grundlage für die Profilirung der Normalschnitte der Zähne. Soll nämlich die genannte Bedingung erfüllt werden, so müssen je zwei auf einander wirkende Zähne normal zu ihrer Axenrichtung abhängig von einander gestaltet werden, und wir werden uns speciell im nachfolgenden Abschnitte 2) — „Construction der Zahnprofile" — mit den betreffenden Regeln und Methoden zu beschäftigen haben.

Die Bewegungsgröße, das Umsetzungsverhältniß zweier Zahnräder, beeinflußt in gewisser Beziehung die Profilform der Zähne, und diese Abhängigkeit setzt der Wahl des Umsetzungsverhältnisses eine Grenze, sodaß man für gewöhnlich bei Zahnrädern φ zwischen 1 und $6 \div 8$ (resp. zwischen 1 und $^1/_6 \div {}^1/_8$) zu nehmen hat. Werden höhere Uebersetzungen verlangt, so muß man dieselben auf mehrere Räderpaare vertheilen, also Vorgelege einschalten. Eingreifende Räder mit übereinstimmender Winkelgeschwindigkeit ($\varphi = 1$) bekommen gleiche Zähnezahlen, gleiche Halbmesser und können congruente Zähne erhalten. — Die Zähne eines Rades sind unter einander congruent.

Laut pag. 176 können sich die zwei Räder eines einfachen Räderwerkes überhaupt entweder in demselben oder in entgegengesetztem Sinne drehen. Bei Zahnrädern, speciell bei Stirn- und Kegelrädern, macht man hiervon Gebrauch und erhält dem entsprechend Räder mit innerem (Fig. 143[a] und 144[a]) resp. äußerem Eingriff (Fig. 143[b] und Fig. 144[b]). Sollen die Räder eines Räderpaares dieselbe Drehrichtung haben, so bedingt dies, daß ein Rad ein Hohlrad wird und da sie für sich besondere und kostspielige Modelle nöthig machen, gleichzeitig aber eine Beschränkung in der Anordnung und Lagerung der Wellen damit verbunden ist, so bedient man sich nur in einzelnen besonderen Fällen — bei Wasserrädern, Plan-Drehbänken, Windetrommeln, Göpelwerken u. dgl. — der Räder mit innerem Eingriff und hilft sich, wo es irgend angeht, bei Transmissionen z. B., meistens durch Anwendung von Transporteuren (Fig. 151, pag. 185). —

Nicht immer werden die Zahnräder als complette Räder oder Scheiben — bestehend aus Kranz, Armsystem und Nabe — ausgeführt, sondern mitunter fertigt man nur einen, eventuell aus mehreren Theilen (Sectoren) zusammengesetzten Zahnkranz und befestigt diesen an einem anderen auf der betr. Axe oder Welle befindlichen Gegenstande (Wasserrad, Schwungrad, Schöpfrad, Planscheibe, Windetrommel ꝛc.).

Digitized by Google

Auch nehmen die Axen zweier in Eingriff stehenden Räder nicht immer eine feste, unveränderliche Lage im Raume oder zu einander ein. Es giebt Räder, welche außer der Drehung um ihre Axe sich auch noch mit ihrer Axe um die Axe des eingreifenden Rades drehen u. dgl. m.

Räder mit sogen. Evolventen-Verzahnung (s. d.) können auch in gewissen durch die Zahnhöhen bedingten Grenzen radial einander genähert resp. von einander entfernt werden. —

Da je zwei auf einander wirkende Zähne sich theilweis gleitend an einander bewegen, so findet bei Arbeitsübertragung durch Zahn-Räderwerke außer der Zapfenreibung auch Zahnreibung statt, und diese veranlaßt eine Abnutzung der Zähne an den Berührungsflächen. Damit aber in Folge dieser Abnutzung das Rad nicht unverhältnißmäßig rasch untauglich werde, muß man einestheil darauf sehen, daß sich zwei Zähne in möglichst vielen Punkten (einer geraden Linie bei Stirn-, Kegel- und Hyperbelrädern) berühren, und anderntheils muß man die Zähne womöglich immer so profiliren, daß der Zahndruck, welcher die Abnutzung bedingt, eine wenig variable und geringe Größe hat. Räder, deren Zähne sich, wie die bei eben genannten, in einer längeren Linie berühren, nennt man deshalb besonders Kraträder, weil man sie anwendet, um größere Kräfte zu übertragen. —

Die Zahnräder werden meistens aus Gußeisen gefertigt — nur in besonderen Fällen aus Messing, Schmiedeisen, Gußstahl oder Phosphorbronze. In älteren Zeiten baute man die Räder ganz aus Holz (ähnlich den Wasserrädern); gegenwärtig benützt man zwar auch noch die Vortheile, welche hölzerne Zähne für den Betrieb darbieten, macht aber die eigentlichen Räder aus Gußeisen und setzt die Holzzähne (Kämme) besonders ein. —

Nachdem wir im vorliegenden Kapitel unter „Allgemeines" bereits kennen gelernt haben, wie die Räderwerke nach verschiedenen Gesichtspunkten eingetheilt werden, und nachdem wir uns des Weiteren über die geometrischen Zusammenhang der Räderwerke im Allgemeinen verbreitet haben, besteht vorliegend die

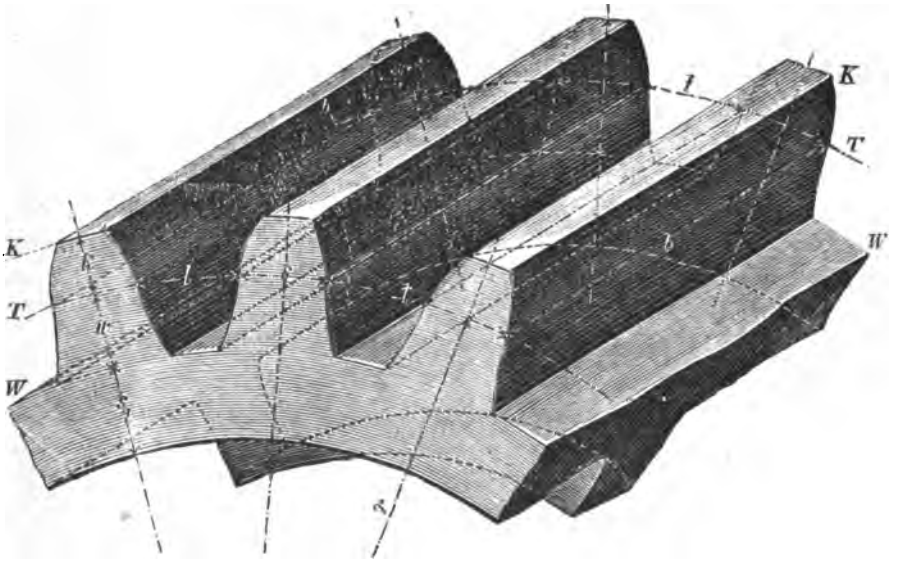


Fig. 198.

Digitized by Google

darin, das Wesentliche über die Construction und Berechnung der Zahnräder zu entwickeln. Den Zahnrädern eigenthümlich ist vorwiegend die Beschaffenheit des die Zähne enthaltenden Kranzes, und so wollen wir unsere Betrachtung zunächst auf diesen Theil der Zahnräder beschränken. Auch wollen wir uns in unseren nächsten Untersuchungen der Einfachheit wegen nur auf Stirnräder beziehen und später erst die specielle Anwendung der gefundenen Regeln und Verfahrungsweisen auf Kegel- und Hyperbelräder erläutern.

Vorstehende Fig. 198 stellt ein Stück eines typischen Stirnrad-Zahnkranzes in isometrischer Projection dar. Die Zähne sind prismatisch — haben also congruente Querschnitte — und liegen mit ihren Axen unter einander parallel und parallel zur Radaxe; die Endflächen derselben sind durch zwei zur Axe normale und zu einander parallele Ebenen begrenzt und erhalten die Zahnprofile, deren Symetrie-Axen (Mittellinien) radial gerichtet sind.

In radialer Richtung bilden zwei zum Theilkreis (T) concentrisch gelegene Cylinderflächen die Zahn-Begrenzungen, und man bezeichnet hier die über dem Theilkreise gelegene als den „Scheitel" der Zähne und die axiale Projection dieser Cylinderfläche als „Kopfkreis" (K).

Der Cylinder durch die untere Zahnbegrenzung heißt die „Sohle" oder der „Radboden" und dessen axiale Projection der „Wurzel-" oder „Fußkreis" (W). Bei Rädern mit innerer Verzahnung (Eingriff) liegt der Kopfkreis innen und der Fußkreis außen. Die zwei noch übrigen Seitenbegrenzungen der Zähne bilden die „Zahnflanken" und enthalten die Punkte, in denen die Zähne mit dergleichen des eingreifenden Rades in Berührung treten; die axialen Projectionen dieser Flanken werden gebildet von den „Zahn-Curven", und diese sind es, welche nach bestimmten Gesetzen geformt werden müssen, damit die Räder einander die Bewegung nach verlangter Bewegungsform gehörig mittheilen.

Die Dimensionen der Zähne benennt man folgenderweise: Die „Zahn-Stärke" oder „Dicke" (s) ist die Dimension des Zahn-Profiles im Theilkreis und wird in Bogenlänge gemessen; die „Zahnlücke" (l) ist die zwischen zwei Zähnen gelegene freie Teilkreis-Bogenlänge; die Summe beider Dimensionen giebt die „Theilung" (t). Die radiale Entfernung (k) zwischen Theilkreis und Kopfkreis (K) ist die „Kopfhöhe" des Zahnes und die zwischen Theilkreis und Fußkreis (W) gelegene radiale Dimension (w) ist die „Wurzelhöhe"; beide zusammen machen die „Zahnhöhe" (h) aus. Der Radius des Theilkreises oder, wie man auch sagt, der „mechanische Halbmesser" sei = r, dann ist derjenige des Kopfkreises = (r + k) und derjenige des Radbodens = (r — w). Endlich bezeichnet man die parallel zur Axe gemessene Zahndimension als die „Breite" (b) des Zahnes.

Diese Zahndimensionen bringt man allgemein in gegenseitige Abhängigkeit, und zwar in der Weise, daß man, von der durch das Rad zu übertragende Umfangskraft ausgehend, die Zahnstärke, resp. die Theilung berechnet und die übrigen Größen im Verhältniß zur Theilung bemißt. So erhält man, wenn man dabei außerdem noch specielle Herstellungs- und Betriebsrücksichten in Rechnung zieht, rationelle Radverhältnisse, und die Gesammtheit solcherart calculirter Räder einer Anlage befriedigt nicht nur den an richtige Verhältnisse gewöhnten praktischen Sinn, sondern macht auch den Eindruck der systematischen Uebereinstimmung.

Digitized by Google

Die Zähne eines Rades sind unter einander congruent; die Zähne von Rädern, welche mit einander arbeiten, in einander eingreifen sollen, müssen gleiche Theilung und von einander abhängige Zahnprofile erhalten; auch die übrigen Hauptdimensionen der Zähne zusammenarbeitender Räder macht man dann gewöhnlich gleich, wenn die Räder, resp. die Zähne beider, aus demselben Materiale bestehen. Ist Letzteres nicht der Fall, so giebt man den Zähnen eine der Festigkeit der betr. Stoffe entsprechende größere oder geringere Dicke, während die radialen Dimensionen auch hier übereinstimmend und die Zahnbreite nur bei sog. Doppelrädern und bei Eisen-Zahnrädern, welche mit einem Holz-Kammrade zusammenarbeiten, größer als die des eingreifenden Rades genommen werden.

Zwei Räder mit gleicher Theilung, deren Zahnprofile nur aus Rücksicht für das Zusammenarbeiten dieser beiden Räder construirt sind, nennt man „Einzelräder" oder „Paarräder"; construirt man aber mehrere Räder von derselben Theilung in ihren Zahnprofilen so, daß sie alle unter einander und mit einander in richtigen Eingriff gebracht werden können, so nennt man diese Räder „Satzräder" und die Gesammtheit derselben, welche zu einer gewissen Theilung gehört, einen „Räderſatz". —

Im weiteren ziehen wir nur solche Räder in Betracht, welche in einem Paare übereinstimmende Bewegungsform ergeben, und für diese ist das Uebersetzungsverhältniß allgemein gleich dem Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten beider Räder, und die Umfangsgeschwindigkeiten beider Räder sind gleich groß. Das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten von zwei ineinander eingreifenden Rädern ist dann ferner in jedem Augenblicke constant und die Uebersetzungszahl wird ausgedrückt durch:

$$\varphi = \frac{w_1}{w} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{n_1}{n} \quad \ldots \quad (6),$$

wie pag. 182 gefunden wurde.

Außerdem ist für jedes Rad einzeln die Theilung mal der Zähnezahl gleich dem Umfange des Theilkreises oder:

$$r = \frac{z\,t}{2\,\pi} \quad \ldots \quad (81).$$

Anmerkung. Beim Aufzeichnen der Räder und speciell bei der Construction der Zahnprofile, welche nur in wirklicher Größe genau und richtig ausgeführt werden kann, muß man, um daß Maß der Theilung als Bogenlänge richtig zu bekommen, stets den Theilkreis-Halbmesser genau auftragen und danach den Theilkreis ganz oder wenigstens zur Hälfte oder einem Viertel verzeichnen. Alsdann theilt man diesen nach Maßgabe der Zähnezahl (z) möglichst genau (mit einem Haar- oder Federzirkel) in gleiche Theile und enthält in diesen die Bogenlänge der Theilung.

Große Räder, von welchen man nicht die Hälfte oder ein Viertel auf das Reißbrett bringen kann, müssen in der Weise verzahnt werden, daß man nach der Formel

$$r' = t \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\left(\frac{180}{z}\right)} \quad \ldots \quad (82)$$

*)

den Halbmesser r' eines Kreises berechnet, auf welchem die Theilung (t) als Sehne (im Zirkel) aufgetragen werden kann. Bei sehr großen Rädern giebt es überdies

*) „Hütte" 1869, pag. 346.

Digitized by Google

keinen merklichen Fehler, wenn man die Theilung als Sehne direct auf dem Theilkreise aufträgt, da der Unterschied zwischen Sehne und Bogenlänge dann nicht bedeutend ist. Jedenfalls ist es aber, wenn ein guter Gang der Räder erzielt werden soll, von großer Wichtigkeit, daß man in dieser Beziehung sowohl im Büreau als auch in der Werkstatt möglichst genau arbeite.

Zum Auftragen der Theilung bedient man sich auch vortheilhaft des Reuleaux'schen Peripherie-Maßstabes.*) — Schließlich ist noch zu merken, daß nach Frml. (81) wegen π der Halbmesser des Rades stets irrational wird, und nimmt man für die Theilung eine abgerundete Anzahl Einheiten des Normalmaßes, so bekommt doch der Halbmesser immer einen unbequemen Decimalbruch. Will man das vermeiden, so muß man mit der sogen. Stichzahl $\left(\frac{t}{\pi}\right)$ arbeiten, d. h. man muß die Theilung (t) nach abgerundeten Bruchtheilen oder Vielfachen von π wählen.

Es sei z. B. für ein 20-zähniges Rad die Theilung rund 10^{mm}, so ist nach Frml. (81) der Halbmesser:

$$r = \frac{z\,t}{2\pi} = \frac{20 \,.\, 10}{2 \,.\, 3{,}14159\ldots} = 31{,}831^{mm}.$$

Nehmen wir aber anstatt 10^{mm} Theilung eine solche von $t = 3 \,.\, \pi = 9{,}42477^{mm}$, so wird:

$$r = \frac{z}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right) = \frac{20}{2} \,.\, \frac{3\,\pi}{\pi} = 10 \,.\, 3 = 30^{mm}.$$

Beide Methoden haben ihre Unbequemlichkeit; jedenfalls sollte man aber in einer Fabrik consequent die eine oder andere Methode festhalten und die Rädermodelle entweder nur in abgerundeten Normalmaßen oder nur nach Bruchtheilen und Vielfachen von π abstufen. —

Die Breite b der Zähne macht man für gewöhnliche Verhältnisse gleich der zweifachen Theilung, also:

$$b = 2 \,.\, t \quad \ldots \quad (83).$$

Sie richtet sich im Allgemeinen nach der zu übertragenden Kraft und nach der Abnutzung, soll also verhältnismäßig um so größer genommen werden, je kleiner das Rad im Vergleich zur Theilung und je größer die absolute Geschwindigkeit ist. Unter solchen Umständen geht man dann mit der Breite der Zähne wohl bis:

$$b = 3\,t \div 4\,t.$$

Ist einerseits die Theilung (t) aus dem Kraftmomente M ($= P \,.\, r$) mit Rücksicht auf das Breitenverhältniß $\left(\frac{b}{t}\right)$ berechnet und andererseits der Halbmesser (r) auf Grund des geometrischen Zusammenhanges gegeben, so ergiebt sich nach Frml. (81) die Zähnezahl, wobei man jedoch zu berücksichtigen hat, daß bei einem vollständigen Rade die Zähnezahl stets eine ganze Zahl, daß also t in $u = 2\,r\,\pi$ ohne Rest enthalten sein muß, indem Bruchtheile von Zähnen selbstredend nicht vorkommen dürfen. Verzahnte Winkel oder Zahnsectoren und Zahnstangen, welche nur als Theile von Rädern anzusehen sind, unterliegen dieser Bedingung insofern nicht, als derer Kranz keinen geschlossenen Ring bildet; trotzdem muß auch hier t für alle Zähne dieselbe Größe haben, und wird man Bruchtheile von Zähnen auch an den Enden zu vermeiden suchen.

*) Dieselben sind zu beziehen von Bock & Handrich in Dresden.

Digitized by Google

Sehr häufig ist nun entweder der Halbmesser eines Rades oder die Zähnezahl frei zu wählen. Eine große Zähnezahl ist jederzeit für den Betrieb und die Erhaltung der Zähne vortheilhaft; man wird aber aus Rücksicht für die mit der Größe des Rades wachsenden Kosten die Zähnezahl resp. den Radhalbmesser nicht unnöthig groß machen, indem sich dadurch nicht nur das Gewicht der Räder vergrößert, sondern eventuell die ganze Maschine oder Anlage größere Dimensionen annimmt. Eine gute Grundlage für die Wahl von z bildet in dieser Beziehung die Voraussetzung, daß womöglich immer zwei oder drei Zahnpaare gleichzeitig im Eingriff sein sollen, so daß sich nicht nur der Zahndruck auf zwei resp. drei Zähne vertheilt — und dadurch die Gefahr eines Bruches eher verhindert wird — sondern, daß auch der „Gang" oder Eingriff der Räder gut und sanft erfolgt.

Einen anderen, jenem verwandten, Ausgangspunkt bilden die Minimal-Zähnezahlen der Räder. Bei einem Räderwerke wo $\varphi \lessgtr 1$, hat man jederzeit ein kleines und ein großes Rad. Theilt man nun die Räder überhaupt rücksichtlich ihrer Verwendung zu verschiedenen Zwecken, in verschiedenen Maschinen, ein in sogen. Krahnräder und Triebwerkräder — erstere sind solche mit verhältnißmäßig geringer Drehungsgeschwindigkeit, meist mit Uebersetzungen in's Langsame ($\varphi < 1$) und an Maschinen verwendet, welche vorwiegend durch animalische Motoren (Menschen und Tiere) bewegt werden, und letztere sind solche mit größerer Umfangsgeschwindigkeit ($v > 0{,}5^m$), Uebersetzungen meist größer als Eins und in Maschinen uud Anlagen vorkommend, welche durch Elementarkraft (Wasser, Wärme, Wind) bewegt werden — so hat man als Minimal-Zähnezahlen zu betrachten:

bei Krahnrädern $z^{min.} = 7 \div 11$,
„ Triebwerkrädern $z^{min.} = 25 \div 40$.

Hat man mit Bezug auf diese Grenzwerthe die Zähnezahl für das kleinste Rad gewählt, so sind aus dem geometrischen Zusammenhange der Zähnezahlen der übrigen eingreifenden Räder ꝛc. abzuleiten. Die hier gemachten Angaben sind aber nur als Anhaltspunkte zu betrachten, und es bleibt im Wesentlichen dem Ermessen des Constructeurs überlassen, eine den speziellen Verhältnissen entsprechende Wahl zu treffen. —

Die Höhe der Zähne wollen wir für gewöhnlich

$$h = 0{,}7 \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

machen und die Kopfhöhe speciell:

$$k = 0{,}325 \cdot t - 0{,}5 \quad \ldots \quad (85);$$

dann bleibt für die Wurzelhöhe:

$$w = 0{,}5 + 0{,}375\, t \quad \ldots \quad (86),$$

und da bei zwei eingreifenden Rädern die Theilkreise einander in der Centrale berühren, so bleibt zwischen Scheitel eines Zahnes und dem Radboden des eingreifenden Rades in radialer Richtung ein Zwischenraum von:

$$w - k = \sigma = 1 + 0{,}05\, t.$$

Praktische Rücksichten verlangen, daß man auch in der Richtung des Theilkreises einen entsprechenden Zwischenraum zwischen den unwirksamen Zahnflanken eines Zahnpaares herstelle, daß man also stets die Zahnlücke eines Rades größer mache als die Zahnstärke des eingreifenden Rades.

Digitized by Google

Dieser Zwischenraum im Theilkreise sei allgemein:

$$\sigma' = 1 + 0{,}03\,t;$$

dann wird bei Zähnen aus demselben Materiale die übereinstimmende Zahnstärke, im Theilkreis gemessen:

$$s = 0{,}485\,t - 0{,}5 \quad \ldots \quad (87)$$

und die Zahnlücke:

$$l = 0{,}5 + 0{,}515\,t \quad \ldots \quad (88).$$

Die Stärke von Zähnen eines Eisenrades, welches mit einem Holzkammrade zusammenarbeitet, mache man:

$$s_e = 0{,}4\,t \quad \ldots \quad (89).$$

Bei Eingriff von Holz- und Eisenzähnen kann man verhältnißmäßig den Zwischenraum σ' etwas geringer nehmen, weil hier die Holzzähne glatt bearbeitet sind und auch die Eisenzähne, wenn sie gegossen nicht sehr gut ausfallen, „egalisiert", d. i. behauen und gefeilt werden müssen. Da wir jedoch σ' schon für Räder aus gleichem Stoffe sehr gering bemessen haben — indem wir eine sehr sorgfältige Ausführung im Modelle und im Gusse voraussetzen — so wollen wir diesen Verhältnißwerth auch hier beibehalten. Dann bleibt aber für die Stärke des Holzkammes:

$$s_h = 0{,}57\,.\,t - 1 \quad \ldots \quad (90).$$

Schließlich wollen wir gleich an dieser Stelle die Stärke des Kranzes mit angeben. Wir haben sie calculirt zu:

$$s_1 = 4 + 0{,}8\,\frac{t^2}{b} \quad \ldots \quad (91),$$

machen sie also umgekehrt proportional der Zahnbreite, damit — für den Fall, daß diese einmal größer oder kleiner als (2 t) genommen werden sollte — die Kranzstärke nicht unverhältnißmäßig groß, resp. zu schwach, ausfällt. —

Wir gehen nun über zu der eigentlichen Construction der Radzähne und betrachten weiter:

2) Construction der Zahnprofile:

a) Allgemeine Verzahnung.

a und b, Fig. 199, seien zwei in einem unveränderlichen Abstande (e) drehbar und parallel zu einander gelagerte Axen, welche relativ mit solcher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung umgedreht werden, daß die Winkelgeschwindigkeit derselben ein constantes Verhältniß $\left(\frac{w_1}{w} = \varphi\right)$ bilden.

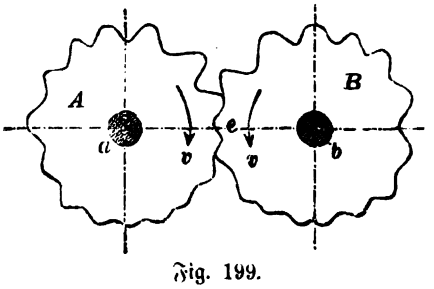


Fig. 199.

Befestigt man nun auf der Axe a eine prismatische Scheibe A von Holz oder Metall, deren Umfang mit Erhöhungen und Vertiefungen versehen ist, und auf der Axe b eine Scheibe B aus einem plastischen Stoffe, so werden sich die Erhöhungen der Scheibe A in die Scheibe B eindrücken, und es wird auch diese am Umfange Erhöhungen und Vertiefungen bekommen, deren Formen,

Digitized by Google

in Richtung der Axe gesehen, einzeln als Umhüllungsflächen derjenigen von A erscheinen. Würde man dann die Scheibe B in einen harten Zustand überführen oder z. B. in Holz oder Eisen nachbilden, so hätte man ein sog. Räderpaar, mittelst dessen man zwischen a und b mechanische Arbeit übertragen könnte.

Wenn die Erhöhungen unter einander verschieden gestaltet sind, müssen die Verhältnißkreise (mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit), welche man sich durch dieselben gelegt denkt, gleiche Halbmesser haben, da je einer Erhöhung und Vertiefung auf A eine Vertiefung und eine Erhöhung auf B der Form nach entspricht; das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten wäre dann = 1. Wollte man also die Scheiben A und B verschieden groß wählen, so verlangt dies, daß die Erhöhungen und Vertiefungen auf A bezüglich unter einander gleich groß, gleich geformt und gleich weit von einander abstehend sein müßten. Die Profilform bei A an sich kann in gewissen Grenzen ganz beliebig sein; diejenige von B ist dann aber durch jene bedingt.

So könnte man also, wenn es sonst praktisch ausführbar und rationell wäre, sehr leicht zu einem fertigen Rade ein anderes formen, welches mit dem gegebenen richtig eingreift; zur Herstellung der Zähne sogen. Schneckenräder (für gekreuzte Axen) bedient man sich in der That eines entsprechenden praktischen Verfahrens. — Wir gewinnen hierbei die Ueberzeugung, daß die Form der Zahnprofile im Allgemeinen beliebig sein kann und daß es deshalb unendlich viele verschiedene Formen giebt, welche, als Zahnformen verwendet, einen richtigen Eingriff der Räder ermöglichen. Wir sehen gleichzeitig aber ein, daß nicht alle Zahnformen, welche eine geometrisch richtige, den gemachten Voraussetzungen entsprechende Bewegungsübertragung bewirken, auch praktisch, bezüglich der Herstellung, Festigkeit und Abnutzung, vortheilhafte Zähne bilden, und wir überlassen es den weiteren Betrachtungen, unser Urtheil in dieser Beziehung auszubilden.

Zunächst wollen wir die Aufgabe lösen, zu dem gegebenen Zahnprofile eines nach Größe des Halbmessers und der Theilung bekannten Rades das Profil der Zähne eines anderen Rades, von dem man ebenfalls den Theilkreishalbmesser kennen muß, zu construiren. Daß diese Aufgabe überhaupt vorkommen kann, lehrt uns die vorstehende Betrachtung: denn, da die Zahnform im Allgemeinen beliebig ist, so kann man dieselbe für ein Rad annehmen und diejenige für das eingreifende Rad daraus mit Bezug auf die Bedingungen des richtigen Eingriffes ableiten. Diese Aufgabe liegt in der Praxis besonders dann vor, wenn man zu einem vorhandenen Zahnrade, zu welchem man die ursprüngliche Constructionszeichnung nicht erlangen kann, ein eingreifendes zu construiren hat. —

In nachstehender Fig. 200 sei gegeben der Theilkreis eines Stirnrades und aSb der Normalschnitt durch einen (prismatischen) Zahn dieses Rades. T_1 sei ferner der durch die Größe seines Radius bekannte Theilkreis eines für den Eingriff mit dem erstgenannten Rade (T) zu construirenden Rades und S der in der Centrale der beiden Radmittel gelegene Berührungspunkt der Theilkreise. Es ist für das Rad von T_1 eine Zahncurve zu ermitteln, welche bei gegenseitiger Einwirkung mit der gegebenen Curve aSb des Rades T eine übereinstimmende Bewegungsform ($w_1 : w$ = constant) der beiden Räder herbeiführt.

Anmerkung. Der ganze Umriß eines Zahnprofiles besteht nach Fig. 198 aus vier einzelnen Linien: zwei concentrischen Kreisen (an Scheitel und Sohle)

Digitized by Google

und zwei symetrisch gelegenen — bei Stirnrädern ebenen — Seitencurven (an den Flanken). Erstere kommen bei der Construction der Zahnprofile nicht

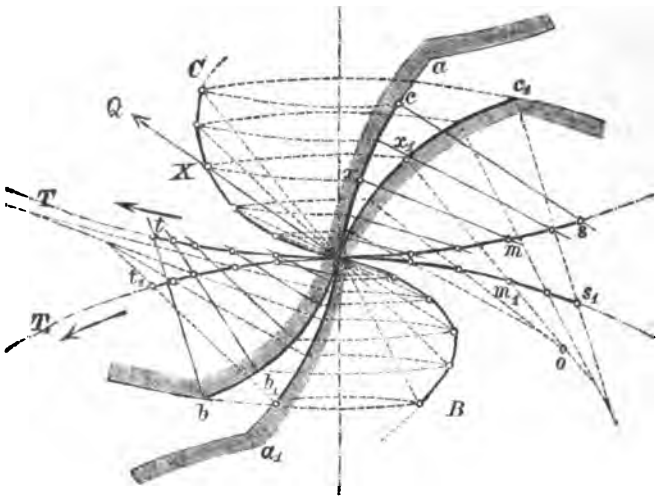


Fig. 200.

weiter in Betracht, sie bilden nur die Begrenzungen der zu ermittelnden Zahncurven; von den beiden Zahnflanken hat man zunächst auch nur je eine nöthig, da die den Zahn an der gegenüberliegenden Seite begrenzende Flanke am einfachsten jener symetrisch gestaltet wird. Man giebt einem Zahne aber deshalb zwei richtige Zahnflanken, damit sich das betr. Rad übereinstimmend entweder nach der einen oder anderen Richtung umdrehen kann.

Es ist am einfachsten und für die erste Beurtheilung der erhaltenen Zahncurven bequem, wenn man, einer bestimmten Drehrichtung der beiden Räder entsprechend, die bei dieser angenommenen Drehrichtung zu Berührung kommenden Flanken durch die Theilungspunkte des Theilkreises legt, die Theilung selbst aber stets vom Berührungspunkte S (Fig. 200) der Theilkreise, d. i. vom Durchschnittspunkte der Centrale mit den Theilkreisen an, aufträgt. —

Zu einem Verfahren, obige Aufgabe allgemein zu lösen, gelangen wir, indem wir uns die Seite 178 für den Begriff „Verhältnißkreise" gegebene Erklärung vergegenwärtigen. Dort heißt es: „Zwei Kreise, welche dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben, nennen wir Verhältnißkreise." Von solchen Verhältnißkreisen müssen wir ausgehen, weil ihre Punkte dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben: eine Eigenthümlichkeit, die wir eben bei den einander berührenden Verhältnißkreisen (Theilkreisen) unserer Räderwerke voraussetzen, sofern zwei Räder übereinstimmende Bewegungsform, d. h. wenn deren Winkelgeschwindigkeiten in jedem Augenblicke ein und dasselbe Verhältniß (φ) haben sollen.

Nach den Ausführungen von pag. 178, 179 u. s. f. erhält man für zwei um die festen Mittelpunkte C und C_1, Fig. 147 (pag. 179) drehende Räder ein paar Verhältnißkreise, wenn man durch den (Aehnlichkeits-) Punkt S, der die Centrale im umgekehrten Verhältniß zu den bezügl. Winkelgeschwindigkeiten theilt, eine gerade Linie (BB_1) legt und auf diese, da sie eine gemein-

Digitized by Google

schaftliche Tangente an die Verhältnißkreise bildet, von den Mittelpunkten aus Lothe fällt; letztere sind dann die Halbmesser der verlangten Verhältnißkreise und haben dasselbe Verhältniß zueinander wie die Theilkreisradien, verhalten sich aber umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten.

Dasselbe gilt nun für alle Verhältnißkreispaare; denn wie, unter welchen Winkeln zur Centrale man auch die gemeinschaftliche Tangente durch S legen mag, immer schließen Centrale Tangente und zugehörige Lothradien (Normalen) zwei einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke ein, welchen sämmtlich das Paar ($CS : CS_1 = r : r_1$) homologer Seiten gemeinsam ist.

Der Peripheriepunkt B des Kreises um C hat hiernach dieselbe Geschwindigkeit wie der Peripheriepunkt B_1 des Kreises um C_1 und für einen Augenblick stellt die Richtung der gemeinschaftlichen Tangente B_1B die Richtung der Bewegung dieser Punkte dar. Verbindet man also B mit B_1 durch eine steife gerade Linie, — wie es z. B. bei geschränkten Riemen der Fall ist — so bewegen sich alle Punkte dieser Linie in Richtung B_1B mit derselben Geschwindigkeit, einer Geschwindigkeit nämlich, welche dieselbe Größe hat wie die Peripherien der beiden Verhältnißkreise von CB und C_1B_1. Ein Gleiches findet statt, wenn sich zwei Zähne mit ihren nach stetigen Curven gekrümmten Flanken innerhalb der gemeinschaftlichen Tangente an die Verhältnißkreise berühren. Der Berührungspunkt zweier Curven — von denen die eine auch eine gerade Linie sein kann — ist gleichzeitig der Berührungspunkt einer gemeinschaftlichen Tangente an diese Curven. Im vorliegenden Falle muß, damit die Curven central aufeinander einwirken und die Zähne nicht klemmen, diese Tangente rechtwinklig auf der Tangente BB_1 an die Verhältnißkreise stehen, und letztere bildet demnach eine Normale für beide Zahncurven in ihrem Berührungspunkte.

In jeder weiteren Stellung der Räder, für jede weitere Berührung zweier Curvenpunkte kann die Lage der Tangente BB_1 zur Centrale CC_1 (Fig. 147) eine andere sein, sie kann aber auch, wie z. B. bei Rädern mit Evolventenverzahnung (s. d.), dieselbe sein; immer muß aber die Linie BB_1, damit sie Tangente an zwei Verhältnißkreise bilde, durch den Aehnlichkeitspunkt der Centrale d. i. durch den Berührungspunkt der Theilkreise gehen. Dieselbe Linie BB_1 giebt, da sie die Richtung der Normalen an die einander berührenden Curvenelemente darstellt, in jedem Augenblicke die Richtung des Zahndruckes an, und die stetige Vereinigung sämmtlicher Lagen der Berührungspunkte zweier Zahncurven bildet die sogen. Eingriffslinie.

Hieraus geht nun hervor: Zwei auf einander wirkenden Zahnprofile ertheilen den bezgl. eingreifenden Rädern eine übereinstimmende Bewegungsform, ergeben einen geometrisch richtigen Eingriff unter der Bedingung, daß die Richtung der gemeinschaftlichen Normale der Zahncurven im Berührungspunkte jederzeit durch den Berührungspunkt der Theilkreise geht.

Der Bedingung dieses allgemeinen Gesetzes über die Bildung der Zahnprofile kann man auf unendlich verschiedene Weise genügen. Am einfachsten ist es jedenfalls, wenn man für die Zahnprofile solche Curven verwendet, deren Bildungsgesetze, Eigenschaften und analytische Formeln außer-

Digitized by Google

dem einfach und bekannt sind, und welche sich auf Grund dieses Gesetzes zu Zahnformen eignen; d. s. vor Allem die sogen. cyklischen Curven. Ehe wir jedoch die specielle Verzahnung mit cyklischen Curven durchgehen, wollen wir zu unserer Aufgabe pag. 307 zurückkehren und ein allgemeines Verfahren lehren, zu welchem das obige Gesetz direct den Anhalt bietet.

Wenn nach demselben die gemeinschaftliche Normale, welche man im Berührungspunkte zweier auf einander einwirkenden Zahncurven zu diesen — d. h. zur gemeinschaftlichen Tangente der Curven im Berührungspunkte — errichtet, jederzeit, in jeder Stellung, ihrer Richtung nach durch den Berührungspunkt der Theilkreise gehen soll, so ist offenbar dieser Punkt (S, Fig. 200) selbst ein Berührungspunkt und demnach ein Punkt der aufzusuchenden Curve.

Um nun für einen beliebigen anderen Punkt (x) der gegebenen Zahncurve (aSb) einen entsprechenden Punkt (x_1) der zu suchenden Curve (a_1Sc_1) zu finden, welcher mit ersterem (x) in irgend einer Stellung der Räder in Berührung tritt, ermitteln wir zu dem Curvenelemente in x die betr. Normale. Ist z. B. die Curve aS oder ein in x gelegener Theil derselben ein Kreisbogen, so erhält man die Richtung der zugehörigen Normale, indem man den Curvenpunkt x mit dem Centrum des betr. Kreisbogens durch eine gerade Linie verbindet. Diese Richtung sei hier xm und m der Punkt, in welchem dieselbe den Theilkreis (T) des betr. Rades schneidet. Man denkt sich nun die Räder (T und T_1) mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit der Theilkreise in Richtung der Pfeile soweit um ihre Axe gedreht, daß der Punkt m nach S zu liegen kommt; alsdann befindet sich x in X, und dieser Punkt X wird gefunden, wenn man vom Radmittelpunkte des T aus durch x einen Kreisbogen schlägt und von S aus die Länge SX = mx abschneidet. SX ist in dieser Stellung dann die Normale sowohl für das Curvenelement x des Profiles aSb, als auch für einen Punkt der gesuchten Curve, welcher in X mit x zusammentrifft. Will man nun diesen Punkt, welchen wir uns jetzt im Berührungspunkte X liegend denken, in die Lage zurückführen, welche er der gezeichneten Lage von aSb entsprechend einnehmen muß, so braucht man nur die Theilkreise um ihre Mittelpunkte so viel wieder rückwärts zu drehen, als vorher bei der Kreisbewegung von m nach S vorwärts geschah. Dabei bewegt sich der Punkt S auf T^1 nach m_1, und es ist $\widehat{Sm_1} = \widehat{Sm}$; der Punkt X beschreibt bei dieser Drehung einen zu T_1 concentrischen Kreisbogen und befindet sich schließlich auf diesem in einer geradlinigen Entfernung von m_1, welche ist. $m_1x_1 = SX = mx$. Man lege also vom Mittelpunkte des T_1 aus durch X einen Kreisbogen und schneide darauf von m_1 aus mit $mx = m_1x_1$ den Punkt x_1 an, so ist dieser Punkt x_1 ein Punkt der zu T_1 gesuchten Zahncurve (a_1Sc_1), welcher mit dem Punkte x der gegebenen Curve (aSb) — nämlich, wenn sich beide Punkte in X befinden — in Berührung tritt, und m_1x_1 ist die Richtuug der Normale für das Curvenelement x in $_1$.

Sucht man auf gleiche Weise für andere beliebig angenommene Punkte der Curve aSb die zugehörigen der zu ermittelnden Curve für T_1, so erhält man eine Reihe von Punkten, welche stetig zu der Curve a_1Sc_1 verbunden werden, und welche man aus Kreisbogen in der Weise zusammenstellen kann, daß man je zwei benachbarte Normalen bis zu ihrem Durchschnittspunkte (o)

Digitized by Google

verlängert und diesen als Mittelpunkt für einen das Curvenstück ersetzenden Kreisbogen betrachtet. —

Discussion. Die relative (in Bezug auf die Centrale der Radaxenmittel) Lage der Punkte X, in welchen je zwei correspondirende Zahncurvenpunkte (x u. x_1) wirklich zusammenfallen, hängt hiernach von dem Profile eines Zahnes und dem Theilkreishalbmesser ab. Dieselbe kann einzeln, ohne Rücksicht für das eingreifende Rad, aus einem Zahnradprofile auf die angegebene Weise abgeleitet werden, und die relative Lage von entsprechenden Punkten eines eingreifenden Zahnprofiles muß, wenn der Eingriff richtig sein soll, mit jenen zusammenfallen.

Verbindet man auch diese relativen Lagen (X) der Berührungspunkte unter einander durch eine ununterbrochene Linie, so stellt dieselbe die sog. „Eingrifflinie" der Zahnprofile dar, welche den Theilkreis im Schnittpunkte desselben mit der Zahncurve durchschneidet. Die Eingrifflinien zweier richtig zusammenarbeitenden Zahnprofile müssen sich gegenseitig decken, und zwar in einer Länge CSB (Fig. 200), welche durch die Kopfkreise der beiden Zähne begrenzt wird. Diesen durch die Kopfkreise zweier Zähne begrenzten Theil der Eingriffslinien innerhalb dessen sich diese decken müssen, nennt man die „Eingriffstrecke" (CSB, Fig. 200).

Eine gerade Linie (SX) vom Berührungspunkte (S) der Theilkreise nach einem Punkte X der Eingriffslinie giebt die Richtung des Zahndruckes für die Zahnstellung an, wo sich die Zahnprofile in diesem Punkte X berühren; nach dieser Richtung in Bezug auf die Centrale beurtheilt man die Tauglichkeit eines Zahnprofiles rücksichtlich der Abnutzung der Zähne.

Ferner erhellt aus vorliegender Untersuchung, daß je einer Zahnberührung eine Berührung der Theilkreise entspricht; so z. B. fallen die gleichweit (in resp. Bogenlängen gemessen) vom Centralen-Schnittpunkte S entfernten Theilkreispunkte m und m_1 zusammen, wenn Punkt x und x_1 in X sich vereinigen.

Die Theilkreisbögen, welche während einer Drehung (mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit) der Theilkreise von der in Fig. 200 gezeichneten Lage, der sogen. „mittleren Zahnberührung", wo sich zwei in den Theilkreisen gelegene Zahncurvenpunkte berühren, bis zur Berührung zweier anderen Zahncurvenpunkte durch die Centrale gehen, sind die zu den während dieser Drehung zur Einwirkung gelangenden Zahncurventheilen gehörigen „Wälzungsbögen". Dem Profilstücke Sx entspricht der Wälzungsbogen Sm und dem Profilstücke Sx_1 der Wälzungsbogen Sm_1. — Wir bezeichnen ferner das ganze beim Eingriff zweier Zähne zur Einwirkung gelangende Stück eines Zahnprofiles als das „Eingriffprofil" und die während dieser Einwirkung durch den Centralen-Schnittpunkt (S) gehenden Theilkreisbögen als „Eingriffbögen". So erhält man auf dem Zahne aSb das Eingriffprofil cSb, und diesem entspricht der Eingriffbogen sSt; am Zahne a_1Sc_1 kommt das Eingriffprofil b_1Sc_1 zur Einwirkung, und dazu gehört der Eingriffbogen s_1St_1. Die Eingriffbögen zweier zusammenarbeitenden Eingriffprofile sind gleich lang.

Das Verhältniß zwischen Eingriffbogen und Theilung der Zähne giebt die „Eingriffdauer" an; dieselbe muß, wenn überhaupt eine continuirliche Bewegungsübertragung zwischen zwei Rädern stattfinden soll, mindestens = Eins sein, d. h. der zu einem wirksamen Zahnprofile (Eingriffprofil) gehörige Eingriffbogen muß größer sein als die Zahntheilung. —

Digitized by Google

Die Aufgabe, zu einem Rade mit bekanntem Zahnprofile das Zahnprofil eines seinem Theilkreise nach bestimmten eingreifenden Rades zu ermitteln, ist durch das vorstehend beschriebene Verfahren*) allgemein gelöst worden, und wir haben dabei zugleich eine Art „Zahn-Diagramm" erhalten, welches uns nach mehreren Richtungen hin Aufschluß giebt über die Art und Weise, in welcher der Eingriff, die gegenseitige Einwirkung der Zähne bei zwei Rädern erfolgt. Nachdem wir vorstehend in der Ableitung des allgemeinen Zahnformgesetzes auch die Bedingungen kennen gelernt haben, welche durch die Zahncurven erfüllt werden müssen, wenn diese eine Bewegungsübertragung mit übereinstimmender Bewegungsform in den Rädern bewirken sollen, so können wir nun zu

b) Specielle Verzahnung mit cyklischen Curven

übergehen.

I. Die cyklischen Linien.

„Cykloïde" heißt griechisch die „Radlinie", und diesen Namen verdankt sie ihrer Entstehung bei der rollenden Bewegung eines Wagenrades. Eine Cykloïde im engeren Sinne des Wortes — eine sogen. gestreckte Cykloïde — erhält man nämlich, wenn man die Bahn verfolgt und fixirt, welche z. B. ein Nagel im Reifen eines Wagenrades beschreibt, während sich der Wagen geradlinig auf ebener Bahn fortbewegt. Zur Bildung einer vollständigen Cykloïde gehört die einmalige ganze Umdrehung des Rades, und die beiden Endpunkte der Cykloïde liegen in der Bahn — Basis der Cykloïde — auf welcher das Rad rollt; eine Normale im Halbirungspunkte der Basis auf dieselbe bildet eine Symetrieaxe für die Cykloïde. Der Begriff der Cykloïde ist aber weit allgemeiner, als durch das genannte Beispiel verdeutlicht wird, und man versteht unter „cyklischen Curven" überhaupt diejenigen Linien, welche einzeln von Punkten eines Strahles eines von zwei in einer Ebene gelegenen, mit ihren Peripherien sich aneinander rollend (ohne Gleiten) bewegenden Kreisen in Bezug auf das andere Rad erzeugt werden.

Da die Bahn eines solchen Strahlpunktes nur das Erzeugniß der relativen Bewegung beider Kreise ist, so kann man immer einen der Kreise als feststehend, ruhend betrachten und nennt diesen dann den „Grundkreis", den anderen, welcher sich auf dem Grundkreise rollend oder wälzend bewegt, aber den „Rollkreis" oder auch Wälzungs-, Rad- oder Erzeugungskreis.

Liegt der erzeugende Strahlpunkt, dessen Bahn man verfolgt, in der Peripherie des Rollkreises selbst, so entsteht die sogen. „gemeine Cykloïde"; liegt er innerhalb des Radius, zwischen Centrum und Peripherie, so erhält man eine „verkürzte", und liegt er außerhalb der Kreisfläche, eine „verlängerte" Cykloïde

Man erhält ferner verschiedene Arten der gemeinen, resp. verlängerten oder verkürzten Cykloïde für verschiedene Lagen und Verhältnisse der beiden Kreise. Wird die Richtung des Radius desjenigen Kreises, der an der Innenseite seiner Peripherie von dem anderen Kreise berührt wird, als negativ bezeichnet, die Richtung des

*) Außer diesem durch das Gesetz übereinstimmender Bewegungsübertragung direct vorgezeichneten Verfahren giebt es noch andere Methoden der allgemeinen Verzahnung, von denen wir das von Poncelet — eine Abkürzung des vorstehenden — und die von Reuleaux („Construction der Maschinenthle." 1862, pag. 296 und „Constructeur" 1869, pag. 411) erwähnen.

Digitized by Google

Letzteren also als positiv, so können mit gleichzeitiger Rücksicht auf das Größenverhältniß der Radien beider Kreise folgende fünf verschiedenen und besonderen Fälle vorkommen:

α) Grundkreisradius und Rollkreisradius sind beide positiv, d. h. der Rollkreis rollt sich an der Außenseite des Grundkreises — d. i. auf demselben — ab: Es entsteht die „Aufradlinie" oder „Epicykloide".

β) Der Halbmesser des Grundkreises ist (plus oder minus) unendlich groß und der Rollkreisradius endlich und positiv: Es entsteht die „gestreckte Cykloide" oder „Cykloide" „Radlinie" im engeren Sinne.

γ) Der Grundkreisradius ist negativ und der Rollkreisradius positiv — wobei außerdem zufolge unserer Erklärung des negativen Radius jener größer sein muß als dieser: Man erhält die sogen. „Inradlinie" oder „Hypocykloide".

δ) Ist der Halbmesser des Grundkreises positiv endlich und derjenige des Rollkreises positiv oder negativ unendlich, so bekommt man eine „Fadenlinie" oder „Evolvente".

ε) Wenn schließlich der Grundkreis einen positiven, der Rollkreis aber einen negativ endlichen Halbmesser hat — wobei außerdem dieser größer sein muß als jener — so entsteht die „Umradlinie" oder „Pericykloide".

Sämmtliche fünf Arten von cyklischen Linien sind in den Fig. 1—5, Bl. LXXIV dargestellt, und wir erläutern in Folgendem kurz die Construction derselben mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung zu Zahncurven.

α) Fig. 1, Bl. LXXIV. Bogen ADB ist ein Theil des Grundkreises vom Halbmesser (+ R), ApcP der Rollkreis vom Halbmesser (+ r), APCP'B die vom Punkte A des Rollkreises während Abrollens desselben auf ADB beschriebene vollständige Epicykloide mit den Endpunkten A und B und dem Scheitel C.

Diese drei Punkte der Epicykloide haben folgende Lage zu einander: B liegt mit A auf der Peripherie des Grundkreises und ist von A um die Bogenlänge $ADB = 2r\pi$ entfernt; C liegt radial über dem den Wälzungsbogen (Basis) ADB halbirenden Punkte D und ist von diesem geradlinig um den Durchmesser $CD = 2r$ entfernt.

1. Verfahren. Soll nun ein anderer beliebiger Punkt P der Curve gefunden werden, so zeichnet man den Rollkreis in einer Stellung FPG tangirend an den Grundkreis, trägt die Länge des Wälzungsbogens AF vom Fußpunkte F aus entgegengesetzt zur Wälzungsrichtung auf der Peripherie des Rollkreises ab und erhält damit den Punkt P der Epicykloide.

Allgemein gilt für die cyklischen Linien: Die Verbindungslinie des Curvenpunktes P mit dem Fußpunkte F (Berührungspunkt der beiden Kreise) giebt die Richtung der Normale für diesen Punkt und die Verbindungslinie des Curvenpunktes P mit dem dem Fußpunkte F gegenüber gelegenen Peripheriepunkte G des Rollkreises die Richtung der Tangente für die Curve in dem fraglichen Punkte.

Nach dem allgemeinen Zahnform-Gesetze (pag. 309) muß die gemeinschaftliche Normale im Berührungspunkte der Zahnprofile durch den Berührungspunkt der Theilkreise gehen. Benutzen wir also die cyklischen Curven in der Weise als Zahncurven, daß wir die Theilkreise oder zwei andere Verhältnißkreise als Grundkreise

Digitized by Google

behandeln, so erhalten wir bei gegenseitiger Einwirkung der nach cyklischen Linien gebildeten Zahnprofile eine übereinstimmende Bewegungsform der betr. Räder.

Zieht man ferner von dem Peripheriepunkte Z des Rollkreises, welcher dem Curvenpunkte P diametral gegenüber liegt, eine gerade Linie nach dem Mittelpunkte des Grundkreises, so schneidet diese Richtung die Normale (PF) des betreffenden Curvenpunktes (P) im Krümmungsmittelpunkte (M) des zu diesem Punkte gehörigen Curvenelementes.

2. Verfahren. Wie wir vorstehend einen beliebigen Punkt (P) der Epicykloide aufsuchten, indem wir die Lage des erzeugenden Rollkreis-Punktes für eine Stellung der sich relativ zu einander bewegenden Kreise durch Aufzeichnung ermittelten, so können wir nun das Verfahren mehrfach wiederholen und durch stetige Vereinigung der gefundenen Curvenpunkte die Radlinie selbst darstellen.

Das Uebertragen von Bogenlängen zwischen Kreisen verschiedener Krümmung hat immerhin einige Schwierigkeiten und ist zeitraubend, wenn es genau ausgeführt werden soll. Man specialisirt das 1. Verfahren deshalb lieber dahin, daß man von vornherein den halben Umfang des Rollkreises in eine Anzahl gleicher Theile theilt und in ebenso viele Theile auch den halben Bogen ADB, dessen Sehne (AB) oder Centriwinkel man aus dem Radius (R) und der bekannten Bogenlänge ($ADB = 2r\pi$) berechnen kann.

Anmerkung. Zur Bildung von Zahnprofilen braucht man in der Regel nur ein kurzes Endstück der cyklischen Linie, und deshalb wird man dann nicht den ganzen Umfang des Rollkreises eintheilen, sondern hier nimmt man, indem man sich eines gut spitzen Haar- oder Federzirkels bedient, ein kurzes Stück Linie in den Zirkel und trägt es nacheinander auf dem Rollkreise und gleichviel mal auf dem Grundkreise auf. Wenn man diese Theilstücke im Verhältniß zum Unterschied der Grund- und Rollkreisradien klein genug nimmt, so begeht man, trotzdem man eigentlich anstatt der Bogenlängen die zugehörigen Sehnen aufträgt, auf die in Betracht kommenden Längen keinen merklichen Fehler.

Sind also in Fig. 1, Bl. LXXIV die bezüglichen Theilpunkte A, 1, 2, 3, 4 . . ., so legt man durch diejenigen der Grundkreisperipherie Radien und verlängert diese um mehr als r oder 2r über den Umfang des Grundkreises, legt vom Mittelpunkte dieses aus durch die Theilpunkte und das Centrum des Rollkreises concentrische Kreise und verzeichnet die Rollkreise selbst, indem man dort mit dem festen Zirkelschenkel einsetzt, wo die verlängerten Grundkreisstrahlen den Kreis durch 0 schneiden. Die Schnittpunkte der concentrischen Kreise mit den Rollkreisen in den bezhtl. mit jenen übereinstimmend nummerirten Fußpunkten sind Punkte der verlangten Radlinie. — Dieses Verfahren eignet sich besonders zur Construction der Epi-, Hypo- und gestreckten Cykloiden dann, wenn dieselben in ihrer vollständigen Länge zu verzeichnen sind, und es empfiehlt sich auch, den Rollkreis von A bis c in eine gerade Anzahl Theile zu theilen, damit man gleichzeitig immer die Gegenpunkte mit erhält.

Indem man durch die Theilpunkte des Rollkreises zum Grundkreise concentrische Kreise legt, überträgt man einfach die auf dem Rollkreise in seiner Anfangsstellung 0 enthaltene Theilung an die Rollkreise in den bez. anderen Stellungen. Dasselbe erreicht man auch durch Uebertragen der zu dem abgewickelten Rollkreisbogen gehörigen Sehne. Anstatt also z. B. den Kreisbogen pP zu ziehen, nimmt man die Sehne Ap in den Zirkel und trägt sie von F aus nuch P ab.

Digitized by Google

Ueberdies kann man für ein zu beiden Seiten der betr. Normale gelegenes Curvenstück auch einen Kreisbogen setzen, dessen Mittelpunkt (M) im Durchschnitt zweier benachbarten Normalen liegt. Diese Krümmungsmittelpunkte liefern, stetig verbunden, eine neue Linie, welche man die zur Cykloïde gehörige „Evolute" nennt.

3. Verfahren. Wie man conform Fig. 1 (links) nicht nöthig hat, in den Theilpunkten des Grundkreises die ganzen Rollkreise tangirend zu verzeichnen, so genügt eventuell die Construction eines Peripheriepunktes aus Normale und Tangente. Es sei der Rollkreis in DC gezeichnet und p' ein Theilpunkt der in gleiche Theile (entsprechend der Theilung des Grundkreises) getheilten Peripherie desselben. Zieht man von p' aus nach den Endpunkten des Durchmessers DC die Geraden p'C und p'D, so sind dies Tangente und Normale eines Curvenpunktes P', in welchem sich der erzeugende Rollkreispunkt A befindet, nachdem der Rollkreis sich von A bis F' bewegt, also eine Länge DCp' = AFDF' abgewickelt hat. Errichtet man nun über dem Durchmesser F'G', welcher durch den zum Curvenpunktr P' gehörigen Fußpunkt F' geht, ein rechtwinkliges Dreieck F'P'G' mit den spitzen Winkeln G'F'P' = CDp' und F'G'P' = DCp', — indem man mit der Zirkelöffnung Dp' von F' aus und mit Cp' von G' aus zwei einander schneidende Kreisbögen schlägt — so liegt in der Spitze P' des rechten Winkels ein Punkt der verlangten Cykloïde.

Diese Construction ist insofern vortheilhaft, als man nicht so viele Linien — auch Cp' und Dp' brauchen nicht gezogen zu werden — und immer deutliche Schnitte erhält, zugleich aber stets die Normalen, deren Durchschnitte man beim Zusammenstellen der Curve aus Kreisbögen braucht.

4. Verfahren. Schließlich führen wir noch ein dem vorigen ähnliches Constructionsverfahren an, welches namentlich bei Aufzeichnung von Cykloïden-Verzahnungen mit Vortheil verwendet wird. Es sei Punkt x (Fig. 1, rechts) ein Theilpunkt des Rollkreises und y derjenige des Grundkreises, in welchen x zu liegen kommt, wenn sich der Rollkreis von B aus (nach links) auf dem Grundkreise rollend bewegt, also den Bogen Bx = By abgewickelt hat. Nimmt man nun Bx in den Zirkel und schlägt man von y aus damit einen Kreisbogen und ebenso von B aus mit der Entfernung xy, so liefert der Durchschnitt beider Kreisbögen einen entsprechenden Punkt X der Radlinie und in Xy die zugehörige Normale. —

β) Fig. 2, Bl. LXXIV veranschaulicht die Construction einer gestreckten Cykloïde ACB, für welche also der Grundkreisbogen in eine gerade Linie ADB (= $2r\pi$) übergegangen ist, und wir haben damit die Construction von Theilen einer verlängerten (links) und einer verkürzten (rechts) Cykloïde verbunden. Das oben unter 3) genannte Verfahren liefert in diesem Falle sehr rasch und bequem die gemeine Cykloïde, da die Radien des Grundkreises hier zu einander parallel werden. Es sind Normalen zu AB, in den Theilpunkten errichtet, und man findet z. B. die Lage des Punktes p, wenn der Rollkreis eine Länge DCp = ADF abgerollt hat, indem man FP parallel Dp zieht und normal zu FP die Tangente PG durch den Gegenpunkt G von F. —

Im festen Abstande OA' = r' von O befindet sich nun anderweit ein erzeugender Punkt A', und dieser beschreibt die verlängerte Cykloïde A'C', während sich der Rollkreis cOA, mit welchem wir uns A' fest verbunden denken, auf AD

Digitized by Google

abrollt. Ein Punkt B_1 (rechts), welcher im Radius r des Rollkreises — um r_1 vom Mittelpunkte desselben entfernt — liegt, beschreibt, da $r_1 < r$, während derselben Bewegung die verkürzte Cykloïde $B_1 C_1$. Beide Curven sind nach einem dem unter Nummer 2) pag. 314 erklärten analogen Verfahren construirt worden, können aber ebenfalls auf andere Weise ermittelt werden.

γ) Fig. 3, Bl. LXXIV. Hier ist der Grundkreishalbmesser gleich — R und der Rollkreisradius gleich + r: der Umfang des Rollkreises ist also gleich $2r\pi$ und die zu einer completten Hypocykloïde ACB gehörige Bogenlänge (Basis) des Grundkreises ADB $= 2r\pi$. Es lassen sich auch hier sämmtliche bei Fig. 1 angeführten Constructionsverfahren anwenden; wir haben die Hypocykloïde speciell nach demjenigen unter 4) entwickelt. Wenn sich z. B. der Kreis um O auf ADB soweit abgerollt hat, daß der Punkt p in der Rollkreisperipherie nach F im Umfange des Grundkreises gekommen ist, so hat der erzeugende Punkt A den Hypocykloïdenbogen AP beschrieben, und es liegt dieser Curvenpunkt P vom Anfangspunkte A aus geradlinig so weit entfernt wie der Theilpunkt p des Rollkreises von dem gleichbenannten Theilpunkte F des Grundkreises, und es ist außerdem der Abstand des Curvenpunktes P von dem zugehörigen Fußpunkte F gleich der Sehne Ap, welche den betreffenden Theilpunkt des Rollkreises mit dem Erzeugspunkte in seiner Anfangsstellung verbindet. —

Die Cykloïden, welche wir bisher betrachteten, waren nicht nur stets krummlinig gestaltet, sondern außerdem noch so gelegen, daß sie der zugehörigen Basis stets die hohle oder concave Seite zukehren. Die Hypocykloïde wird aber unter Umständen eine gerade Linie oder eine krumme Linie, welche ihrer Basis die erhabene oder convexe Seite zukehrt.

Fig. 3ª, Bl. LXXIV. — Construction nach dem 1. Verfahren. — In dem speciellen Falle, wo der Halbmesser des Rollkreises gleich ist dem halben Radius des Grundkreises, wird die von einem Punkte des Rollkreises bei dessen Bewegung im Grundkreise beschriebene hypocykloïdische Bahn eine gerade Linie (ACB), welche mit dem Durchmesser des Grundkreises zusammenfällt. Auch diese cykloïdische Form wird bei Verzahnung der Räderwerke benützt und liefert die sogen. „Geradflanken-Verzahnung", resp. „Cykloïden-Verzahnung mit radialen Zahnwurzeln". — Auch als Bewegungsmechanismus*) — nämlich als Geradführung — ist eine geeignete materielle Ausführung dieser geometrischen Erscheinung zu benutzen. Hat sich z. B. der Rollkreis von A bis F rollend bewegt und bildet sein Durchmesser CF einen Winkel α mit der ursprünglichen Richtung CA, so hat ein mit A anfangs zusammenfallender Punkt der Rollkreis-Peripherie radial in der Richtung AB den Weg AP zurückgelegt, und das ist der sogen. Sinus versus des Winkels α.

Fig. 3ᵇ, Bl. LXXIV. — Construction nach dem 4. Verfahren. — Ist einmal bei zwei sich an der Innenseite berührenden Kreisen der Durchmesser des Rollkreises größer als der Halbmesser des Grundkreises, so entsteht zwar eine krummlinige Hypocykloïde, dieselbe ist aber, von ihrer zugehörigen Basis (Wälzungsbogen) aus gesehen, convex gekrümmt und liefert als Zahncurve keine praktisch brauchbare Profilform.

*) Redtenbacher, „Maschinenbau" 1862, Fig. 19, Taf. XXI.

Digitized by Google

Das Zahnmaterial, welches durch die nach der Zahncurve gebildete Flanke begrenzt wird, liegt nämlich stets auf der Seite nach dem zur Curve gehörigen Wälzungsbogen des Grundkreises, würde also bei Fig. 3^b eine hohle Fläche bilden, etwa so, als ob bei Fig. 200, pag. 308 die Curve aS links von der Centrale zu liegen käme.

Die Verwendbarkeit der Hypocykloïden als Zahncurven ist also an die Bedingung geknüpft, daß

$$2r \leqq R,$$

und es bildet somit das in Fig. 3^a gezeichnete Beispiel in dieser Beziehung den Grenzfall. —

d) Fig. 4, Bl. LXXIV. Eine Curve, welche für die Bildung von geometrisch richtigen und pratisch vortheilhaften Zahnprofilen mit Vorzug zu verwenden ist, entsteht, wenn man von einem Kreise einen fortwährend geradlinig gespannten Faden abwickelt, durch die Bahn, welche der Endpunkt dieses Fadens in der Ebene des Kreises beschreibt; diese Curve nennt man eine „Fadenlinie" oder „Evolvente", und der Grundkreis bildet die Evolute desselben.

Die Evolvente (ABPCDE) ist auch eine cyklische Curve, und zwar entstanden durch Abrollen eines Kreises mit unendlich großem Radius — also einer geraden Linie FP, Fig. 4 — an dem Umfange eines (Grund-) Kreises AQF vom Halbmesser $QF = +R$. Die Verbindungslinie eines Curvenpunktes P mit dem zugehörigen Fußpunkte F bildet auch hier die Normale PF für den Curvenpunkt — diese fällt speciell in den Umfang des Rollkreises — und der Fußpunkt ist zugleich Krümmungsmittelpunkt für das betr. Curvenelement. Die Normale hat stets eine Länge gleich dem auf dem Grundkreise abgewickelten Wälzungsbogen, und es läßt sich deshalb die Evolvente sehr leicht aus Kreisbögen zusammenstellen. — Bei Verzahnung von Rädern mit Evolventenbögen sind die Grundkreise derselben ein paar Verhältniskreise der Räder, deren Halbmesser in gewissen Grenzen absolut beliebig gewählt werden können, relativ aber wieder ein Verhältniß gleich der Uebersetzungszahl (φ) bilden müssen. —

Die Construction der Evolvente erkennt man sofort aus ihrer Bildung und wird analog dem 1. Verfahren pag. 313 ausgeführt. Man trägt nämlich von dem Anfangspunkte A der Curve aus und nach der Seite hin, nach welcher die Evolvente verlaufen soll, gleichlange Bogenstücke auf dem Grundkreise auf, zieht darin — rechtwinklig zu den Radien in den betreffenden Grundkreispunkten — Tangenten an den Grundkreis und schneidet auf denselben vom Tangentialpunkte aus eine dem betreffenden Wälzungsbogen gleiche Länge ab. Die Endpunkte dieser Tangenten stetig durch eine Curve mit einander verbunden, liefern die Evolvente. Die Länge der Theilbögen am Grundkreise muß man im Verhältniß zum Grundkreisradius klein genug wählen, damit die erhaltenen Curvenpunkte nicht zu weit von einander abstehen. —

e) Fig. 5, Bl. LXXIV. Endlich ist noch der Fall möglich, daß der Grundkreisradius $+R$ und der Rollkreisradius $-r$ wird, was außerdem verlangt, daß absolut $r > R$ ist. Unter diesen Voraussetzungen erhält man eine „Umradlinie" oder „Pericykloïde". Sie hat sämmtliche Eigenschaften der übrigen Cykloïden und wird, falls sich ihre Construction zum Zwecke von Verzahnungen

Digitized by Google

wirklich nöthig machen sollte, am einfachsten nach dem 1. Verfahren entwickelt, wie es auch unsererseits in Fig. 5 geschehen ist. —

Haben wir vorstehend die Bildung, Eigenschaften, Eintheilung und Construction die cyklischen Linien kennen gelernt, so benutzen wir die noch übrigen Figuren auf Bl. LXXIV, um daran zu zeigen, wie man zunächst geometrisch und auf die einfachste Weise jene Linien als Zahnformen verwendet.

Fig. 6, Bl. LXXIV stellt eine Triebstock-Verzahnung dar, wie solche z. B. bei den sogen. Mangelrädern noch vorkommt. Dieselbe wird abgeleitet aus einer „Punktverzahnung", welche folgendermaßen entsteht: T und T_1 sind Stücke von zwei in einer Ebene gelegenen und sich äußerlich berührenden Theilkreisen; S ist der Berührungspunkt derselben und zugleich Durchschnitt mit der Centrale. Auf T sind von S aus in gleichen Abständen von einander die Theilpunkte a aufgetragen, sodaß jede Bogenlänge zwischen zwei benachbarten Punkten a die „Theilung" darstellt. Ganz gleiche Längen sind auch auf T_1 von S aus abgetragen, sodaß, wenn man die Theilkreise mit übereinstimmender Umfangsgeschwindigkeit nach entgegengesetzten Richtungen um ihre bezüglichen Axen dreht, immer je zwei Theilpunkte auf T und T_1 in S zusammenfallen.

Betrachtet man nun den Theilkreis T als Rollkreis und T_1 als Grundkreis, so beschreiben bei dieser Drehung die Punkte a relativ zu T_1 epicykloïdische Bögen, deren Anfangspunkte in den bezgl. Theilpunkten von T_1 liegen. Denkt man sich also die Theilkreise in Pappe ausgeschnitten und in den Theilpunkten a von T schwache Stifte eingeschlagen, in denjenigen von T_1 aber Drähte, in Form der Epicykloïden b gebogen, eingesetzt, so kann man, wenn die Scheiben in gehöriger Lage zu einander in ihren Mittelpunkten um Stifte drehbar befestigt werden, durch Umdrehung der Scheibe T die Scheibe T_1 in übereinstimmender Drehung versetzen und hat somit ein Modell, welches die Bewegungsübertragung zwischen zwei Zahnrädern mit übereinstimmender Bewegungsform $\left(\frac{w_1}{w} = \varphi\right)$ anschaulich macht.

Will man diesen Mechanismus zur Uebertragung von Kräften geeignet machen, so führt man die Scheiben in Holz oder Eisen aus, setzt bei a anstatt der Stifte cylindrische Zapfen „Triebstöcke" von einer der Kraft entsprechenden Stärke ein und formt die Scheibe T_1 wie ein Zahnrad, so nämlich, daß man aequidistant (gleichweit abstehend) zu den Epicykloïden-Bögen b die Zahnflanken $a_1 b_1$ bildet. Dies geschieht übereinstimmend nach beiden Drehrichtungen, und man erhält somit symetrisch geformte Zahnprofile, welche man am Radboden entsprechend den Triebstöcken kreisförmig abrundet. Bei der praktischen Ausführung macht man die Zähne etwas schwächer und die Wurzelabrundungen etwas größer, damit an den bei Drehung nach einer bestimmten Richtung nicht zur Wirkung kommenden Flanken etwas Spielraum zwischen Triebstock und Zahnflanke bleibt und ein Klemmen vermieden wird. — In der Weise, wie es die rechte Seite der Fig. 6 verdeutlicht, hat der Verfasser selbst noch eiserne Triebstock-Räder ausgeführt, und zwar bildeten dieselben einen Ersatz für die in älteren Mühlwerken vorkommenden hölzernen Stöckelräder.

Wir haben, da es sich nur um geometrische Construction handelt, die epicykloïdischen Zähne (Fig. 6) in ihrer ganzen durch den geometrischen Zusammenhang bedingten Größe ausgeführt und dieselben nicht, wie es Fig. 198, pag. 301

Digitized by Google

zeigt, am Kopfe cylindrisch abgeschnitten. Sollte dies dennoch geschehen, so dürfte der die Zahnköpfe begrenzende Kreis nicht unter den Punkt s der in der Position a' enthaltenen Berührung fallen, denn in der gezeichneten Stellung hört die Einwirkung von a gerade auf, und es muß, damit das Triebstockrad das eingreifende Zahnrad unausgesetzt fortschieben kann, der nachfolgende Triebstock a' in demselben Augenblicke seine Einwirkung auf die Flanke $a_2 s$ beginnen. Das heißt mit anderen Worten: Es muß das Eingriffsprofil ($a_2 S$) an dem epicykloïdal-aequidistanten Zahne so lang sein, daß der zugehörige Wälzungsbogen $Sa' = Sb'$ mindestens gleich ist der Zahntheilung der betreffenden Räder. In Wirklichkeit wird man das Eingriffsprofil stets noch etwas größer zu erhalten suchen, damit keine Störung im Betriebe vorkommt.

Daß die Bewegungsübertragung bei Rädern mit Punkt- resp. Triebstockverzahnung wirklich in übereinstimmender Form vor sich geht, daß also die gemeinschaftliche Normale der aufeinander einwirkenden Curven im Berührungspunkte jeder Zeit durch den Berührungspunkt der Theilkreise gehen muß, erhält daraus, daß der Theilkreis T, dessen Punkt a' z. B. die Epicykloide b' durch Abrollen erzeugte, selbst Rollkreis ist. In der Stellung a' ist S Fußpunkt — Berührungspunkt des Rollkreises mit dem Grundkreise — für den Curvenpunkt a', und da eine Normale an die Curve in a' durch den Fußpunkt S gehen muß, so ist der Bedingung des Zahnformgesetzes hier genügt, indem S zugleich Berührungspunkt der Theilkreise ist.

Dasselbe gilt dann auch von der Triebstock-Verzahnung, denn die Berührung beider Zahnprofile liegt, da diejenigen von T_1 aequidistant zu den Epicikloïdenbögen b gebildet wurden und diejenigen von T Kreise sind, auch dann noch in der gemeinschaftlichen Normale, welche z. B. bei der Berührung von a' mit b' die Punkte a' und S geradlinig verbindet.

Hinsichtlich der Abnutzung sind die Triebstockräder sehr unvortheilhaft, da — abgesehen von der ungleichen Abnutzung der Cykloïden-Zähne, wovon wir uns nachher überzeugen werden — namentlich die Triebstöcke sich an den Theilen der Cylinderflächen, welche mit den Zähnen des Rades in Berührung treten, äußerst rasch abnützen und deformiren. Die Berührungspunkte der Triebstöcke sind aber, wie man aus dem Eingriff Fig. 6 ersieht, auf eine sehr kleine Fläche des Cylinders concentrirt, und daher findet dort ein starkes Schleifen statt.

Allgemeine Bemerkungen. Die eigenthümliche Art und Weise, wie die Zähne zweier eingreifenden Räder gegenseitig auf einander einwirken, gründet sich auf die Centralbewegung. Die Bewegung eines Punktes A, Fig. 201, in der Bahn eines Kreisbogens ist nämlich eine zusammgesetzte Bewegung, welche man sich aus zwei Einzelbewegungen entstanden denken kann. Wirkt nämlich auf den Punkt A eine Tangentialkraft t ein, in Folge deren der Punkt sich in gewisser Zeit von A nach B bewegen würde, und unterliegt er gleichzeitig der centralen Einwirkung von c, welche ihn in derselben Zeit von A nach D treiben würde, so beschreibt der Punkt A in Wirklichkeit einen mittleren, aus t und c resultirenden Weg, nämlich von A nach C. So lange die Wirkungen der Tangential- und Centralkraft ihrem Verhältnisse nach constant dieselben sind, bewegt sich der Punkt in einem Kreisbogen, und dessen Krümmung bestimmt sich eben aus dem Verhältniß von t zu c.

Digitized by Google

Ist nun z. B. A der Berührungspunkt eines Zahnprofiles, welches auf eines dergl. des eingreifenden Rades einwirkt, so äußert sich der Antheil t von r (Fig. 201) als die Bewegung, welche auf Fortschiebung des eingreifenden Zahnes wirkt, der Antheil c aber veranlaßt das gegenseitige Gleiten der einander berührenden Zähne. Dieses Gleiten ist aber noch mit einem Rollen verbunden, indem jeden Augenblick je zwei andere Punkte der Zahncurven in Berührung treten; der Antheil der rollenden und wälzenden Bewegung zweier Zähne an einander wird aber um so größer sein, je mehr Punkte der Zahnprofile während des Eingreifens zweier Zähne zur Berührung kommen, je größer also die Eingriffprofile sind. —

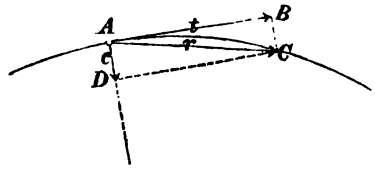


Fig. 201.

Wir fanden in der gegenwärtigen Discussion, daß sich die Triebstöcke wegen ihres kurzen Eingriffprofiles sehr stark abnutzen und wollen nun untersuchen, wie sich die Abnutzung der Epicykloïdal-Zähne gestaltet.

Daß bei diesen die Stärke der Abnutzung verhältnißmäßig geringer ist als bei den Triebstöcken, geht daraus hervor, daß sich während der gegenseitigen Einwirkung zweier Zähne der Eingriff auf die Länge des Profiles $a_1 b_1$ vertheilt.

Dahingegen ist der Zahndruck in den einzelnen Positionen des Eingriffs zweier Zähne variabel. Die Richtung des Zahndruckes fällt mit der Richtung der gemeinschaftlichen Normale NN', Fig. 6, Bl. LXXIV, zusammen. Im Berührungspunkte s drückt also der Triebstock a' auf den eingreifenden Zahn mit einer Kraft Q, welche folgendermaßen aus der Umfangskraft P des Theilkreises zu berechnen ist.

Fällt man vom Mittelpunkte (O) des treibenden Rades (T) ein Loth auf die Druckrichtung NN', so bildet diese Linie OW einen Winkel α mit der Centrale. Ist nun im Theilkreise, am Hebelarme r, die Kraft P wirksam — so daß $Pr = M$ das durch das Rad T zu übertragende Moment darstellt — so ist in Richtung NN' diese Kraft:

$$Q = P \frac{r}{\varrho} = \frac{M}{\varrho};$$

ϱ ist aber aus dem Dreieck SOW:

$$\varrho = r \cdot \cos \alpha,$$

folglich:

$$Q = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{M}{r \cdot \cos \alpha}.$$

Während sich nun der Triebstock a' nach S hin bewegt, nimmt der Winkel α fortwährend ab, der Cosinus desselben also zu, bis er in S, wo $\alpha = 0$, gleich „Eins" geworden ist.

Es ist also der Druck auf den Cykloïdenzahn größer, wenn die Berührung in Punkten nach dem Zahnkopfe hin stattfindet, und somit wird auch der Verschleiß am Kopfe größer, sodaß die Zähne nach einer gewissen Abnutzung vollständig deformirt sind und eine übereinstimmende Bewegungsübertragung nicht mehr möglich ist. —

Digitized by Google

Fig. 7, Bl. LXXIV. Die Punktverzahnung und die daraus abgeleitete Triebstockverzahnung ist eigentlich noch keine vollständige Cykloïden-Verzahnung, da nur das eine Rad wirkliche Zähne im Sinne der Fig. 198 erhält, und diese sind bei der Triebstockverzahnung nicht einmal nach wirklichen Cykloïden geformt, sondern nur Aequidistanten derselben.

Vollständiger ist schon die in Fig. 7 dargestellte „Geradflanken-Verzahnung", indem hier jedes der beiden Räder — wenn auch nur auf einer Seite des Theilkreises — wirkliche Zähne hat, deren Profile nach cykl. Linien geformt sind. Geradflanken-Verzahnung nennt man diese Art deshalb, weil die Zahnprofile des einen Rades an den Flanken geradlinig radial begrenzt sind. Hierdurch ist aber die Wahl des Rollkreishalbmessers schon bedingt: Für dieses Rad muß nämlich der Rollkreis, welcher die geradlinig-radiale (Hypo-) Cykloïde erzeugen soll, einen Halbmesser

$$\varrho = \frac{r}{2}$$

haben. Sollen aber zwei Zähne mit cykl. Profilen gehörig auf einander einwirken, so müssen diejenigen Eingriffprofile derselben, welche bei der Bewegungsübertragung in gegenseitige Berührung treten, durch Rollen eines und desselben Rollkreises auf den zu den betreffenden Eingriffprofilen gehörigen Wälzungsbögen der bezüglichen Theilkreise erzeugt sein.

Denken wir uns nämlich zuerst die zwei Theilkreise T und T_1 der Räder so aneinander gelegt, daß sie sich im Punkte S berühren — wobei die Berührung mit dem größeren Kreise T_1, da es Räder mit innerem Eingriff sind, an dessen Innenseite stattfindet — und legen wir in dieser Berührung S den Rollkreis τ tangirend so an, daß sein Mittelpunkt o in die den Kreisen T und T_1 gemeinschaftliche Centrale fällt, so beschreibt der Punkt S, während man sämmtliche drei Kreise mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit entgegengesetzt den Pfeilen um ihre als fest gedachten Mittelpunkte umdreht, relativ zu den Theilkreisen T und T_1 die hypocykloïdischen Bahnen $a_1 s$ und $b_1 s$. Während diese Curven entstanden, gingen durch den Punkt S die drei gleichlangen Bögen $Sb_1 = Sa_1 = Ss$, und s ist der Berührungspunkt der beiden Hypocykloïden $a_1 d_1$ und $b_1 c_1$. Eine gerade Linie von dem gemeinschaftlichen Curvenpunkte s nach dem zugehörigen Fußpunkte S des Rollkreises stellt sonach die gemeinschaftliche Normale im Berührungspunkte der Zahnprofile dar und geht, dem allgemeinen Zahnformgesetze entsprechend, durch den Berührungspunkt der Theilkreise.

Wie aber in der Stellung $a_1 b_1$ der erzeugende Rollkreispunkt s den Berührungspunkt der Zahnprofile enthält, so ist es in allen Zwischenstellungen der Fall, und es bildet demnach der Rollkreisbogen Ss die Eingriffstrecke für die Eingriffprofile $a_1 s$ und $b_1 s$, oder allgemein ist der Rollkreisumfang die Eingrifflinie für die Zahnprofile Sc und Sd. Nach dem, was wir bei der allgemeinen Verzahnung (pag. 306) kennen gelernt haben, müssen aber die Eingrifflinien zweier richtig zusammen arbeitenden Zähne einander decken, und das begründet andererseits die Bedingung, daß die in Berührung tretenden Theile der Eingriffprofile zweier zusammenarbeitenden Cykloïdenzähne mit einem und demselben Rollkreise erzeugt werden müssen.

Digitized by Google

Bei den in Fig. 7 gewählten Verhältnissen würde für continuirliche Bewegungsübertragung genügen, daß die Eingriffprofile die resp. Größen $a_1 s$ und $b_1 s$ haben und daß die Eingriffstrecke Ss gleich der Theilung (t) ist, weil die zu den Eingriffprofilen $a_1 S$ und $b_1 S$ gehörigen Wälzungsbögen $a_1 S = b_1 S =$ einer Zahntheilung (t) sind. Da aber die Eingriffprofile die größeren Längen $a_1 d_1$ resp. $b_1 c_1$ haben, so dauert die Einwirkung zweier Zähne auch länger als eine Theilung.

Die Verzahnung selbst wird auf dieselbe Weise ausgeführt, wie im vorhergehenden Beispiele gezeigt wurde. Man trägt die constante Theilung $t = Sa_1 = Sb_1 = a_1 a_2 = b_1 b_2 = Sa' = Sb'$ u. s. f. in möglichst genau gleichen Bogenlängen auf den beiden Theilkreisen auf, entwickelt nach einem der früher gezeigten Verfahren die betreffenden Hypocykloïden Sd und Sc im Berührungspunkte S der Theilkreise und überträgt dieselben, indem man für die erhaltenen Curven möglichst gut deckende Kreisbögen ermittelt, in relativ gehöriger Stellung an die übrigen Theilpunkte. Schließlich vollendet man die Zähne, indem man, entsprechend der Zahnstärke s (Frml. 87, pag. 306) auf den Theilkreisen die Bogenlängen Sf und Sg u. s. f. anträgt und in den erhaltenen Punkten symetrisch zu den bereits gezeichneten Zahnprofilen die gegenüberliegenden Seiten der Profile bildet.

Auch die vorliegende Fig. 7, Bl. LXXIV ist rein geometrisch behandelt. Es sind deshalb radial und tangential keine Zwischenräume zwischen den Zähnen angenommen worden: es ist die Zahnstärke gleich der halben Theilung und die Höhe des Kopfes (Sc) gleich der Höhe der eingreifenden Wurzel (Sd) gemacht worden. Die Zahnköpfe des Rades T_1 sind wie vorhin in ihrer ganzen Höhe, wie sie durch die Profile gegeben ist, ausgeführt. Wenn dagegen Räder mit Geradflankenverzahnung in der Praxis ausgeführt werden — sei es mit innerem oder mit äußerem Eingriff — so giebt man die durch die Zahnverhältnisse pag. 305 bedingten Zwischenräume, benutzt von dem ganzen theoretischen Zahnprofile nur ein geeignetes Stück, verlängert die Geradflankenzähne um $^1/_{10}$ oder $^1/_{12}$ der Theilung über T hinaus und giebt auf diese Höhe den Zähnen abgerundete Kanten.

Der Zahndruck äußert sich hier in ganz ähnlicher Weise wie bei den Triebstockverzahnungen und veranlaßt, daß sich die Zähne des Rades T_1 nach den Enden hin, diejenigen des Rades T aber nach den Wurzeln stärker abnützen. — Da die geradflankigen Zähne am Radboden stets schwächer ausfallen als im Theilkreise, so muß man bei der Berechnung der Theilung hierauf Rücksicht nehmen und eventuell die Geradflanken-Zähne (im Theilkreis) stärker machen als die des eingreifenden Rades. —

Man verwendet die Geradflanken-Verzahnung mitunter bei Rädern mit hölzernen Zähnen, weil es hier rücksichtlich der Herstellung von Vortheil ist, wenn man nur ebene Zahnflanken zu bilden hat, besonders da der Ersatz für gebrochene Zähne dann leicht und möglichst richtig von jedem Holzarbeiter oder Maschinenwärter ausgeführt werden kann. —

Fig. 8, Bl. LXXIV. Wie wir an den beiden zuletzt behandelten Beispielen die Verwendbarkeit und Verwendung der Epi- und Hypocykloïden als Zahnprofile gezeigt haben, so soll nun das vorliegende dazu dienen, die Bildung, Anordnung und Wirkungsweise der Evolventen-Zähne zu verdeutlichen.

Es seien O und O_1 die Mittelpunkte von zwei in einer Ebene gelegenen Stirnrädern, T und T_1 deren Theilkreise mit den Radien r und r_1, und es sei S

Digitized by Google

der Punkt der Centrale OO_1, in welchem sich die Theilkreise berühren. Legt man nun durch den Berührungspunkt S der beiden Theilkreise eine gerade Linie FF_1, so schneidet dieselbe die Centrale unter einem Winkel β, und fällt man von den Radmittelpunkten O und O_1 aus Senkrechte auf die Linie FF_1, so sind diese Linien ϱ und ϱ_1 Radien zweier Verhältnißkreise der Räder; d. h. die Radien derselben stehen in demselben Verhältnisse zueinander wie die Theilkreisradien, verhalten sich also umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der Räder.

Denken wir uns nun an Stelle der Verhältnißkreise ein paar cylindrische Scheiben von den Halbmessern ϱ und ϱ_1, die sich in O und O_1 um feste Axen drehen können; an die Umfänge derselben werde ein Band — z. B. eine schwache Stahlfeder — so befestigt, daß dasselbe die Scheibe O bei F tangential verläßt und bei F_1 auf die Scheibe O_1 wieder tangential aufläuft, so muß, wenn die Strecke FF_1 eine gerade Linie bildet, dieselbe durch den Berührungspunkt S der Theilkreise gehen.

Machen wir nun in der Ablaufstelle F ein Loch durch das Band und stecken wir durch dasselbe in die Scheibe O einen unelastischen geradlinigen Draht, so wird derselbe, wenn wir die Scheiben bei fortwährender Anspannung des Bandes in Richtung der Pfeile umdrehen, die gekrümmte Form ab annehmen. Wenn bei dieser Drehung das Loch S an der Auflaufstelle von O_1 — in F_1 — angekommen ist, stecken wir dort einen solchen Draht in die Scheibe O_1 und drehen rückwärts, so krümmt sich rückwärts dieser Draht in der Form $a_1 b_1$. Die Drähte ab und $a_1 b_1$ stellen nun zwei Curven dar, zu denen das geradlinig-tangentiale Band in je zwei zusammenfallenden Punkten derselben die gemeinschaftliche Normale bildet. Da die Formen ab und $a_1 b_1$ von einem und demselben Punkte S des Bandes, und zwar ganz auf dieselbe Weise erzeugt werden, so enthält dieser Punkt die jedesmalige Berührung der Curven, und da die den jedesmaligen Berührungspunkt enthaltende Linie, welche zugleich gemeinschaftliche Normale an die Curven im Berührungspunkte ist, stets durch den Berührungspunkt der Theilkreise geht, so bewirken die Drähte bei gegenseitiger Einwirkung zwischen den Scheiben eine Uebertragung der Drehbewegung mit übereinstimmender Bewegungsform.

Man kann also auf die angegebene Weise Curven bilden und diese als Zahnprofile benutzen. Ihrer Entstehung nach sind die Curven ab und $a_1 b_1$ Evolventen (s. Fig. 4, Bl. LXXIV), und die Grundkreise derselben sind zwei Verhältnißkreise der zu verzahnenden Räder. Hieraus geht hervor:

Man erhält für zwei eingreifende Räder richtig zusammenarbeitende nach Evolventen gebildete Zahnprofile, wenn man zwei zusammengehörige Verhältnißkreise der Räder als Evoluten oder Grundkreise der Evolventenbögen behandelt und auf diesen die Construction der Zahncurven vornimmt.

Bei zwei gegebenen Theilkreisen hängt also die specielle Gestalt des Evolventen-Zahnprofils blos von den Grundkreishalbmessern ϱ und ϱ_1 und ursprünglich von dem Winkel β der gemeinschaftlichen Tangente für die Verhältnißkreise mit der Centrale ab, und wie man bei den Cykloïden-Verzahnungen die Rollkreise innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählen kann, so geschieht dies hier mit der Richtung der erzeugenden Tangente.

Da hier die Richtung der gemeinschaftlichen Normale an die Zahncurven im

Digitized by Google

Berührungspunkte constant die Richtung der gemeinschaftlichen Tangente an die Verhältnißkreise hat und diese Linie gleichzeitig die Berührungspunkte der Zahncurven während einer gegenseitigen Einwirkung derselben enthält, so stellt diese Linie (FF_1) sowohl die Eingrifflinie der Evolventenprofile, als auch die constante Richtung des Zahndruckes dar. Der Hebelarm dieses Druckes ist der Halbmesser (ϱ resp. ϱ_1) des Grundkreises, welcher ebenfalls seine Größe nicht ändert. Ist aber der Zahndruck für alle Zahnberührungen von derselben Größe, so findet auch eine gleichförmige Abnützung der Zähne innerhalb der betr. Eingriffprofile statt; die Begrenzung des Eingriffprofiles des abgenützten Evolventenzahnes ist eine zur ursprünglichen Form aequidistante Linie, und die abgeschliffenen Zähne führen immer noch eine übereinstimmende Bewegungsübertragung herbei.

Dazu kommt noch eine andere Eigenthümlichkeit, die für Walzenräder namentlich von Vortheil ist. Man kann nämlich die beiden Räder nach Maßgabe der Zahnlänge auseinander rücken, ohne daß der Eingriff dadurch anders als in seiner Dauer geändert werde. Der Grund hiervon liegt einfach darin, daß die Evolventen-Zahnprofile eines Rades nur von der Größe des Grundkreises abhängen und die Grundkreise bei einander genäherten oder von einander entfernten Rädern immer noch den Charakter von Verhältnißkreisen für diese Räder bewahren. Auch dann geht die gemeinschaftliche Normale im Berührungspunkte der Curven noch immer durch einen Punkt der Centrale, welcher diese im Verhältniß der Theilkreisradien theilt, trotzdem zwei andere Curvenpunkte zur Deckung gelangen. Dagegen wird die Eingriffdauer zweier Zähne durch das Auseinanderrücken verkürzt, und deshalb muß man solchen Rädern verhältnißmäßig lange Zähne geben.

Bei Cykloïdenrädern müssen dagegen die Axen der Räder stets so gelagert werden, daß sich die Theilkreise derselben unausgesetzt berühren, weil hier mit einem Punkte eines Zahnes nur ein ganz bestimmter Punkt des eingreifenden Zahnes in Berührung treten darf, und nur dann, wenn sich zwei so zusammen gehörige Punkte berühren, die gemeinschaftliche Normale durch den Aehnlichkeitspunkt der Räder geht. —

II. Beispiele zur Verzahnung von Stirnrädern.

Cykloïden-Verzahnung.

Nach den unter I. ausgeführten Erläuterungen über die Entstehung, Eigenschaften und Construction der cyklischen Curven überhaupt und nach der Erklärung von deren Anwendung und Wirkungsweise als Zahnprofile in ein paar besonderen einfachen Beispielen wird es uns nicht schwer fallen, die eigentliche, vollständige Verzahnung von Stirnrädern, deren bezgl. Theilkreise und Theilungen wir als bekannt voraussetzen wollen, für äußeren, inneren und Zahnstangen-Eingriff selbst auszuführen.

Aeußerer Eingriff; Fig. 1, Bl. LXXV.

Im vorliegenden Beispiele wollen wir lehren, wie man zwei äußerlich in einander greifende Stirnräder mit Cykloïdenzähnen in der Weise verzahnt, daß alle Räder von gleicher Teilung mit einander richtig wirken können. Wir bilden mit anderen Worten die Zähne so, daß die Räder sogen. „Satzräder" werden.

Digitized by Google

Zunächst haben wir hervorzuheben, daß man, wie Fig. 198 zeigt, einen Zahn zum Theil über, zum Theil unter den Theilkreis verlegt und daß man bei Cykloïdenzähnen, da die einzelnen Curven dieser Zahnprofile im Theilkreise ihren Anfang nehmen, ein Eingriffprofil aus zwei im Theilkreise aneinander stoßenden cyklischen Linien — einer Hypo- und einer Epicykloïde — zusammensetzt und also die Zahnprofile — abgesehen von der Begrenzung an Scheitel und Sohle — aus 4 einzelnen Curven bildet.

Die Veranlassung hierzu liegt in der eigenthümlichen Form der Cykloïden selbst. Dieselben nähern sich unter gewöhnlichen Verhältnissen in einiger Entfernung von ihrem Anfangspunkte im Grundkreise sehr bald der Krümmung des Grundkreises und würden, wenn man größere Längen davon als Zahncurven verwenden wollte, außerordentlich starke und am Kopfe kuppelartige Zähne liefern, bei denen der Zahndruck in den äußeren Berührungspunkten unverhältnißmäßig groß ausfallen würde, da die Richtung desselben dort einen sehr kleinen Winkel mit der Centrale bildet.

In Fig. 1, Bl. LXXV seien nun gegeben die Theilkreise T und T_1 mit der Theilung $t = 50^{mm}$ und die Zähnezahlen $z = 20$ und $z_1 = 50$. Nach Frml. (81), pag. 303 erhält man für die Radien der Theilkreise: $r = 159{,}15^{mm}$ und $r_1 = 397{,}88^{mm}$. Die Zahnhöhe wird nach Frml. (84): $h = 35^{mm}$; davon kommt nach Frml. (85) auf den Kopf: $k = 15{,}75^{mm}$ und auf die Wurzel (w) nach Frml. (86): $w = 19{,}25^{mm}$, sodaß in radialer Richtung ein Zwischenraum $\zeta = 3{,}5^{mm}$ entsteht. — Die Stärke der Zähne wird, da wir beiderseits dasselbe Material voraussetzen, nach Frml. (87): $s = 23{,}75^{mm}$ und die Lücke nach Frml. (88): $l = 26{,}25$, was zusammen die Theilung $t = 50^{mm}$ liefert und die Differenz $(l - s) = \zeta_1 = 2{,}5^{mm}$ als tangentialen Zwischenraum ergiebt. — Endlich wird noch die Stärke des Kranzes nach Frml. (91): $s_1 = 24^{mm}$, wenn wir eine Breite b der Zähne gleich $2t = 100^{mm}$ annehmen.

Nachdem so die Verhältnisse der Zähne ermittelt sind, verzeichnet man die Theilkreise, indem man die Halbmesser, im Berührungspunkte S der Theilkreise aneinanderstoßend, genau nach Maß auf die Centrale aufträgt und die Bögen T und T_1 von den gefundenen Mittelpunkten aus mittelst eines gut gespitzten und harten Zirkeleinsatzes durch S zieht. Ein Gleiches geschieht mit den Kopf- und Wurzelkreisen, sowie mit der inneren Begrenzung des Radkranzes, deren Centralen-Schnittpunkte man durch Abtragen der Größen k, w und s von S aus vorher angestochen hat.

Alsdann trägt man von S aus auf den vier Theilkreisbögen die Theilung (t) auf. Da man hier nicht die vollständigen Theilkreise auf dem Papiere hat, also die Theilung nicht durch Eintheilen derselben nach Maßgabe der Zähnezahlen finden kann, so nimmt man vom Maßstabe eine Länge gleich der Theilung geradlinig ab, theilt dieselbe nebenbei möglichst genau in eine Anzahl (n) gleicher Theile, deren Größe man so bemißt, daß der Unterschied zwischen Sehne und Bogen unmerklich wird, und trägt nun von S aus diese Theile einzeln nach einander auf, so daß jedesmal im n^{ten} Theilpunkte das Ende einer Zahntheilung (t) liegt. Es seien z. B. S_1 und S_1' zwei solche zusammengehörige Theilpunkte und die Bögen SS_1 und SS_1' gleich lang.

Wir stehen nun vor der Wahl der Rollkreise τ und τ_1, deren Mittelpunkte

Digitized by Google

o und o_1 wir entsprechend der Entwickelung der Zahncurven von S aus in die Centrale der Theilkreise verlegen, und so, daß sie im Punkte S die Theilkreise tangiren. Da wir den vorliegenden Rädern aber Satzräder-Verzahnung geben wollen, so ist diese Wahl nicht mehr frei gegeben. Es muß hier vielmehr der Rollkreishalbmesser in einem bestimmten Verhältnisse zur Theilung stehen. Nimmt man (wie z. B. auch Prof. Reuleaux und Andere thun) die (Minimal-) Zähnezahl des kleinsten für den Eingriff in den Satz der vorliegenden Theilung bestimmten Rades zu 11 an, und setzt man voraus, daß dieses kleinste Rad noch radial-geradlinige Wurzelprofile erhält — Räder mit weniger als 11 Zähnen bekommen dann hohle Zahnwurzeln conform Fig. 3b, Bl. LXXIV — so muß der Rollkreis

$$\varrho = 0{,}875\,t \quad \ldots\ldots \quad (92),$$

also in unserem Falle $\varrho = 0{,}875 \,.\, 50 = 43{,}75^{mm}$ groß sein. Diese Größe hat er bei allen Satzrädern mit 50^{mm} Theilung, und demnach ist der Rollkreis auch für die Räder T und T_1 derselbe.

Auf den Rollkreisen τ und τ_1 trägt man, von S ausgehend, dieselben kleinen (n-) Theile der Zahntheilung nach beiden Seiten der Centrale und ungefähr je auf eine Länge von etwas mehr als einer Zahntheilung auf und entwickelt nach einem der bei Fig. 1, Bl. LXXIV gelehrten Verfahren die cyklischen Curven. Man rollt einmal den Kreis τ auf T und erhält die Epicykloïde Sa, welche den Kopf eines Zahnes von T begrenzt. Die mit Sa zusammenwirkende Begrenzung eines Zahnes auf T_1 erhält man, wenn man denselben Kreis τ nach derselben Richtung in T_1 rollt; der Punkt S des Kreises τ beschreibt dabei die Hypocykloïde Sc. — Ferner rollt man den Kreis τ_1 — entgegengesetzt der Richtung, nach welcher vorher τ zweimal gerollt wurde — einmal auf T_1 und einmal in T; man erhält dadurch die Epicykloïde Sd und die Hypocykloïde Sb, welche beim Eingriff der Räder gegenseitig auf einander einwirken.

Um nun die erhaltenen vier Curven bequem und rasch in die übrigen Endpunkte der Zahntheilung übertragen zu können, sucht man mittelst des Einsatzzirkels Kreisbögen auf, welche die cyklischen Linien möglichst genau decken. Wenn die Zähne nicht so groß sind, genügt in der Regel für jede der vier Cykloïden ein Kreisbogen, und es seien x und y die Krümmungsmittelpunkte derjenigen für das Profil ab und x_1 und y_1 diejenigen des Profiles cd. Durch diese Krümmungsmittelpunkte legt man von den Mittelpunkten der zugehörigen Theilkreise aus concentrische Kreisbögen M und M', M_1 und M_1', welche dann die geometrischen Oerter für die Krümmungs-Mittelpunkte der bezüglichen Zahnprofile darstellen. Die bei der angenommenen Drehrichtung der Räder zur Wirkung kommenden Zahnprofile legt man nun durch die Endpunkte der aufgetragenen ganzen Zahntheilungen, d. h. man nimmt einen Krümmungsradius (ax) in den Zirkel, setzt in einem Theilpunkte (S_1) ein und schneidet auf dem zugehörigen Mittelpunktkreise (M) den Krümmungsmittelpunkt an; man setzt dann den Zirkel in diesem ein und schlägt den Kreisbogen durch den Theilpunkt (S_1) über resp. unter dem Theilkreise bis an den Kopf- resp. Wurzelkreis, je nachdem es eine Epi- oder bezhtl. eine Hypocykloïde ist. Hat man auf diese Weise sämmtliche Zahnflanken einer Seite gezeichnet, so trägt man von diesen aus auf den Theilkreisen rück-

Digitized by Google

rückwärts die Zahnstärke (s) auf und wiederholt bei allen Zähnen die vorige Manipulation, so entsteht symmetrisch zu den ersten auch die andere Seite des Profiles. —

Schon bei Fig. 7, Bl. LXXIV zeigten wir, daß die Peripherie eines Rollkreises sämmtliche Berührungspunkte der zwei von diesem Rollkreise erzeugten Zahncurven während deren gegenseitigen Aufeinanderwirkens enthält, daß also bei cyklisch profilirten Zähnen der Rollkreis die Eingrifflinie für die von demselben erzeugten Zahnprofilstücke bildet. Da nun bei Rädern eines Satzes diese Rollkreise sämmtlich dieselbe Größe haben, so sind auch die Eingrifflinien der Zähne von Rädern eines Satzes unter einander gleich gestaltet und gleich gelegen. Umgekehrt kann man also sagen: Zahnräder von gleicher Theilung arbeiten dann richtig mit einander — sind Satzräder — wenn die Eingrifflinien ihrer Zahnprofile unter einander congruent sind, wenn dieselben also, mit den betr. Centralen-Schnittpunkten (S) aufeinander gelegt, sich gegenseitig decken.

Die Länge der Eingrifflinien zweier zusammen arbeitenden Zähne, innerhalb welcher dieselben zusammenfallen — die Eingriffstrecke zweier Zähne — richtet sich nur nach der Kopfhöhe der betr. Zähne und nach der Größe der Räder; denn der äußerste Punkt am Kopfe eines Profiles ist derjenige, welcher bei gegenseitiger Einwirkung zweier Profile zuerst, bezhtl. zuletzt, mit einem Punkte des eingreifenden Profiles in Berührung treten kann. So berührt z. B. bei der angenommenen Drehrichtung der Punkt a am Kopfe des Profiles Sa einen Punkt des Profiles Sc in dem Punkte σ, wo der Kopfkreis K den Rollkreis τ schneidet, und wenn wir dort diese beiden Profile an die zugehörigen Theilkreise antragen, so sind $\sigma\alpha$ und $\sigma\gamma$ diejenigen Theile der Profile Sa und Sc, welche auf einander einwirken, während die gleichlangen Wälzungsbögen Sα und Sγ, bei S durch die Centrale gehen. Der Kopfkreis K_1 des Rades T_1 schneidet den Rollkreis τ_1 in dem Punkte σ_1, und es sind $\sigma_1\delta$ und $\sigma_1\beta$ die bezügl. Eingriffprofile der Zahnprofile Sd und Sb, während die beiden gleichlangen Bögen Sδ und Sβ der Theilkreise T_1 und T durch den Centralen-Schnittpunkt S gehen. Es werden also außerdem bei Satzrädern die Eingriffstrecken der Radzähne einander gleich sein, wenn die Kopfkreise auf den bezügl. Rollkreisen gleichlange Stücke abschneiden. Macht man aber die Kopfhöhe bei eingreifenden Rädern eines Satzes constant verhältnißmäßig (Frml. 85) zur Theilung, so wird dies nur geschehen können bei gleichgroßen Rädern eines Satzes. Alsdann sind aber auch die zu den bezügl. Eingriffstrecken gehörigen und diesen gleichen Eingriffbögen der Theilkreise unter einander gleich, sowie auch die Eingriffprofile. Dieser Fall ist derjenige, wo man zwei nach einem und demselben Modelle gegossene Räder mit einander in Eingriff bringt.

Unser Zahndiagramm (Fig. 1, Bl. LXXV) liefert in den Curven $\sigma\alpha$, $\sigma\gamma$ und $\sigma_1\delta$, $\sigma_1\beta$ zugleich die Längen derjenigen Stücke der Zahnprofile, welche überhaupt zum Eingriff kommen, und es seien dieselben auf den betr. Zahnprofilen in S abgetragen. Dabei erkennt man, daß von den Profilen über den Theilkreisen die ganze Länge derselben, von denjenigen unter den Theilkreisen aber nur ein von dem Kopfkreise des eingreifenden Rades abhängiges Stück zur Wirkung kommt. Die Eingriffprofile sind vorliegend: aSb_1 und dSc_1. Die Eingriffbögen: $\beta\gamma = \alpha\delta$ und die Eingriffstrecke ist bei der angenommenen Drehrichtung: $\sigma_1\sigma$.

Digitized by Google

Die Eingriffdauer zweier Zähne, welche stets größer sein muß als „Eins", bestimmt sich aus der Länge des Eingriffbogens, gemessen durch die Zahntheilung. Es ist also vorliegend das Verhältniß der Bögen $\gamma S \beta$ durch SS_1 oder SS_1' oder:

$$\varepsilon = \frac{\widehat{\gamma S \beta}}{t} = 1{,}47.$$

Bei der Satzräder-Zahnstange werden die Profilstücke an Kopf und Wurzel zwei gleich gestaltete „gestreckte Cykloïden" (Fig. 2, Bl. LXXIV). — Die geradlinige Verbindung des Centralen-Schnittpunktes (S) mit einem Punkte der Eingrifflinie ($\sigma S \sigma_1$) giebt uns die Richtung des Zahndruckes an, wenn sich die Zahnprofile in diesem Punkte der Eingrifflinie berühren. Beim Beginne der Einwirkung ist diese Druckrichtung $= \sigma_1 S$, bei der Zahnberührung im Berührungspunkte (S) der Theilkreise ist sie normal zur Centrale, also tangential zu den Theilkreisen und am Ende des Eingriffes $= S\sigma$. Wenn nun in dem Theilkreise das durch die Räder zu übertragende Kraftmoment $M = Pr$ ist, so hat man bei der Berührung in S einen Zahndruck $= P$, und dies ist zugleich die geringste bei dem Eingriffe von Cykloïden-Zähnen vorkommende Intensität desselben, denn bei Berührung in jedem anderen Punkte von $\sigma S \sigma_1$ ist dieser Druck (Q) im umgekehrten Verhältniß seines Hebelarmes zum Radius des Rades größer, am größten aber da, wo der Winkel (QSo_1) der Zahndruckrichtung mit der Centrale seinen kleinsten Werth erlangt. Hieraus erkennt man, daß sich die Cykloïdenzähne, welche theils über, theils unter dem Theilkreise liegen, nach Kopf und Wurzel hin stärker abnutzen als in der Nähe des Theilkreises.

Diesen Nachtheil muß man möglichst zu mildern suchen, indem man den Zähnen möglichst flach gekrümmte Profile giebt, die Rollkreise also möglichst groß wählt. Der größte zulässige Werth desselben ist: Durchmesser des Rollkreises gleich Halbmesser des Theilkreises des kleinsten eingreifenden Rades, wo man dann am kleinsten Rade radial begrenzte Wurzeln erhält. Für gewöhnlich geht man aber nicht bis an diese Grenze, weil dann die Zähne am Radboden schwächer werden als im Theilkreise, und dies ist rücksichtlich der Festigkeit nachtheilig. Ist es dennoch — wie namentlich bei Rädern in Hebmaschinen — nicht zu umgehen, so versieht man solche Räder mit Stirnscheiben, d. h. man gießt an einer oder eventuell an beiden Stirnseiten Scheiben in der Größe der Kopf- oder Theilkreisflächen an, so daß die Zähne unter einander verbunden werden.

In Bezug auf die Verringerung des Zahndruckes (Q) und die Vergrößerung der Eingriffdauer (ε) sind die „Satzräder-Verzahnungen" nicht vortheilhaft, weil man hier immer einen kleinen Rollkreis anwendet. Daher kommt es wohl auch, daß sich diese Methode noch nicht durchgehends eingeführt hat.

Zahnstange mit Getriebe; Fig. 2, Bl. LXXV.

Gegeben sind die Theilkreise T und T_1 mit den Radien $r = 143{,}239^{mm}$ und $r_1 = \infty$ und die Theilung $t = 60^{mm}$.

Das Getriebe T bekommt 15 Zähne, während sich die Zähnezahl der Zahnstange nach der Länge der letzteren richtet. Die Zahndimensionen sind folgende.

$$h = 42^{mm};\ k = 19^{mm};\ w = 23^{mm};\ s = 28{,}6^{mm};\ l = 31{,}4^{mm}.$$

Setzen wir ferner die Breite $b = 2{,}5t$, so ist $s_1 = 23^{mm}$, während sie für $b = 2t$ wird: $s_1 = 28^{mm}$.

Digitized by Google

Sind diese Dimensionen sämmtlich aufgetragen und die betreffenden Kreise gezeichnet, sind ferner die Rollkreise angenommen zu $\varrho = 115^{mm}$ und $\varrho_1 = 0{,}5\,r = 71{,}62^{mm}$ und darauf die Theile der Theilung aufgetragen, so entwickelt man die Profile. Durch Wälzen von τ auf T entsteht die Epicykloïde Sa, und dieser entspricht auf T_1 die gestreckte Cykloïde Sc; durch Wälzen von τ_1 in T erhalten wir die geradlinig-radiale Hypocykloïde Sb und durch Wälzen desselben Rollkreises τ_1 auf der geradlinigen Basis T_1 die gestreckte Cykloïde Sd. Als Krümmungsradien von Kreisbögen, welche die krummlinigen Cykloïden ersetzen, bekommen wir ax, dx_1 und cy_1, mittelst deren wir die Zähne auf den bezügl. Theilkreisen verzeichnen.

Die Eingriffstrecke ist hier $\sigma S \sigma_1$, der Eingriffbogen $\gamma S \beta$ und die Eingriffdauer $\varepsilon = 1{,}33$. Die Eingriffprofile sind am Getriebe: aSb_1 und an der Zahnstange dSc_1.

Wollten wir den Rollkreis τ für die Zahnstange eben so groß nehmen wie τ_1 für das Getriebe, so hätten wir noch einen kürzeren Eingriffbogen $\beta S \gamma'$, also eine kleinere Eingriffdauer erhalten. — Da das Zahnprofil Sb nur auf der Strecke Sb_1 zur Wirkung kommt, so können wir die Zahnwurzeln am Radboden des Getriebes auf die Länge von etwas mehr als den Betrag (ζ) des radialen Zwischenraumes mit einer Hohlkehle abrunden und somit die Gefahr eines Bruches dieser Zähne in Etwas verringern, ohne jedoch befürchten zu müssen, daß die Bewegungsübertragung durch diese willkürliche theilweise Profiländerung die Eigenthümlichkeit der übereinstimmenden Bewegungsform einbüßt.

Innerer Eingriff; Fig. 3, Bl. LXXV.

Gegeben ist die Theilung $t = 25^{mm}$, die Zahl der Zähne des Getriebes $z = 12$ und die Uebersetzung der Räder $\varphi = \frac{1}{5}$.

Man erhält für den Halbmesser des Theilkreises (T): $r = 47{,}95^{mm}$, für denjenigen des großen Rades: $r_1 = 238{,}725^{mm}$ und die Zähnezahl $z_1 = 60$. Ferner ist: $h = 18^{mm}$; $k = 8^{mm}$; $w = 10^{mm}$; $s = 11{,}5^{mm}$; $l = 13{,}5^{mm}$; $s_1 = 14^{mm}$.

Den Rollkreishalbmesser ϱ nehmen wir an zu 18^{mm} und $\varrho_1 = 36^{mm}$, bekommen also nicht Satzräder, sondern Einzel- oder Paarräder. — Nachdem sämmtliche Dimensionen aufgetragen, die Kreise verzeichnet und eingetheilt sind, entwickeln wir die Zahncurven. Es ist Sa eine Epicykloïde, entstanden durch Rollen des Kreises τ auf T, Sc ebenfalls eine Epicykloïde, entstanden durch Abrollen desselben Kreises τ auf T_1; ferner ist Sb Hypocykloïde von τ_1 in T und Sd Hypocykloïde von τ_1 in T_1.

Der ganze Unterschied gegen die äußere Verzahnung liegt also darin, daß dort immer eine Auf- und eine Inradlinie zusammenarbeiten, während hier je zwei Auf- und je zwei Inradlinien zusammengehören. Den Uebergang zwischen beiden Fällen bildet die Zahnstange (Fig. 2), wo einerseits eine Epicykloïde, andererseits eine Hypocykloïde mit je einer gestreckten Cykloïde zusammen auf dieselbe Seite der Theilkreise zu liegen kommen. Die Uebertragung der wirksamen Zahnflanken und die Vervollständigung der Zähne, sowie die Ermittelung der Eingriffdauer geschieht wie in den vorhergehenden Beispielen. —

Digitized by Google

Da von der Hypocykloide Sb nur das Stück Sb_1 zum wirklichen Eingriff (Berührung) gelangt und wir lieber die Zahnwurzeln bei dem kleinen Rade noch etwas stärker machen möchten, so untersuchen wir, wie weit man von b_1 aus das Profil nach der Zahnlücke hereinziehen kann. Zu diesem Zwecke ermittelt man die sogen. „Kopfbahn" des eingreifenden Zahnprofiles Sd, d. h. man sucht die Stellen auf, welche der Punkt d während eines Durchganges der Eingriffbögen durch S relativ zum Rade T einnimmt und überträgt dieselben alle zusammen in die betreffende Lücke der centralen Berührung. Es genügt selbst schon, den geometrischen Ort einer Lage durch einen Kreisbogen anzugeben.

Man theilt nämlich die beiden Theilkreise von S nach beiden Richtungen hin in kleine, unter einander gleiche Theile ein — wobei man die Theilung von der Entwickelung der Zahncurven her mit benützen kann — nimmt die Länge von einem solchen Theilpunkte des Kreises T_1 bis an den Kopf d in den Zirkel, setzt diesen in demjenigen Theilpunkte des Kreises T ein, welcher bei übereinstimmender Drehung von T und T_1 mit dem homologen Punkte des Kreises T, von welchem aus man vorher nach d gemessen hatte, in S zusammenfallen würde, und schlägt einen Kreisbogen. Wiederholt man dies in allen übrigen Theilpunkten, so hüllen die Kreisbögen eine ovale, spitz zulaufende Fläche b_1dg ein, deren Begrenzung eine verlängerte Epicykloide ist. Von b_1 aus kann man nun das Profil Sb bis an die verlängerte Epicykloide nach der Lücke einziehen, ohne daß es den Eingriff stört. Wir setzen also an das Stück Sb_1 stetig überführend das weitere Stück b_1e mit kleinerem Krümmungshalbmesser (y'e) an und bekommen so die Zähne des kleinen Rades an der Wurzel etwas stärker. Die Eingriffdauer ist hier trotz der großen Uebersetzung ziemlich günstig — wie es überhaupt bei innen eingreifenden Rädern immer der Fall — nämlich: $\varepsilon = 1{,}52$. —

Evolventen-Verzahnung.

Aeußerer Eingriff; Fig. 4, Bl. LXXV.

Die beiden in Fig. 4 ineinander greifenden Zahnräder sollen Satzräder sein, und die Theilkreise derselben sind bestimmt durch folgende Annahmen:

$$z = 70;\ z_1 = 50 \text{ und } t = 80^{mm}.$$

Hieraus erhalten wir die Größen der Theilkreishalbmesser zu $r_1 = 636{,}618^{mm}$ und $r = 891{,}26^{mm}$.

Die Zahndimensionen sind: $h = 56^{mm}$; $k = 25{,}5^{mm}$; $w = 30{,}5^{mm}$; $s = 38^{mm}$; $l = 42^{mm}$; $s_1 = 36^{mm}$. Sämmtliche Dimensionen werden, wie vorher beschrieben, aufgetragen und danach die Kreise verzeichnet.

Wir haben nun in den Rädern von r und r_1 ein paar Verhältnißkreise zu wählen, welche die Grundkreise für die Evolventenbögen bilden sollen. Die Radien ϱ und ϱ_1 dieser Verhältnißkreise sind Lothe von den Mittelpunkten der Räder aus auf eine durch den Berührungspunkt S der Theilkreise gezogene gerade Linie NN_1. Die Lage dieser gemeinschaftlichen Tangente an die Verhältniß- oder Grundkreise bedingt die specielle Gestalt der Evolventen und muß, wenn man günstige Zähne erhalten will, immer mit Rücksicht auf die Theilung und die Halbmesser der

Digitized by Google

Räder gewählt werden; meistens beträgt der Grundkreis-Winkel (μ) der erzeugenden Tangente mit der Centrale zwischen 70 und 80°.

Bei Satzrädern muß der Grundkreis-Winkel für alle Räder einer Theilung dieselbe Größe haben, und zwar hat man denselben ein- für allemal zu $\mu = 75^0$ angenommen, in Folge dessen die Radien der Grundkreise allgemein:

$$\varrho = 0{,}966 \cdot r \ldots (92^a)$$

werden.

Wegen der Größe der in unserem Beispiel gewählten Theilung konnte Linie NN_1 nicht in ihrer ganzen Länge und konnten die Normalen (ϱ) in den Tangentialpunkten nicht gezeichnet werden; der Zusammenhang ist aber aus Fig. 8, Bl. LXXIV vollkommen klar.

Wir legen nun also die Tangente NN_1 unter dem Winkel $\mu = 75^0$ durch den Berührungspunkt S und an dieselbe tangirend von den Mittelpunkten der Räder aus die Grundkreise G und G_1, tragen auf denselben entsprechend der Stärke ihrer Krümmung mehr oder weniger kleine Theilungen auf — dieselben brauchen auch bei zwei zusammengehörigen Grundkreisen nicht gleich groß und können von der Theilung der Theilkreise ganz unabhängig sein — ziehen in den Theilpunkten die Radien und errichten darauf die Senkrechten, verfahren überhaupt so, wie es bei Fig. 4, Bl. LXXIV gezeigt wurde.

Man könnte auch hier die erste Entwickelung der Zahnprofile so vornehmen, daß dieselben durch S gehen; allein es ist dies hier, weil die Evolventen nicht, wie die Cykloïden, von den Theilkreisen ausgehen, eher umständlicher, als wenn man die Entwickelung in beliebigen Punkten der Grundkreise vornimmt und dann erst die gefundenen Evolventen in die Theilung der Theilkreise überträgt.

Wir suchen nun, wie bei den Cykloïden-Zahnprofilen, Kreisbögen, welche man für die Evolventenbögen setzen kann. Trotzdem hier ein Flankenprofil aus einer nur nach einer Richtung gekrümmten Curve besteht, so setzt man dasselbe wegen der verschiedenen Stärke der Krümmung seiner Elemente doch mindestens aus zwei oder — wie wir es bei Fig. 4, Bl. LXXV wegen der hervorragenden Größe der Zähne gethan haben — aus drei Theilen zusammen. Die Krümmungsmittelpunkte derselben sind x, x', x'' und y, y', y''.

Beim Uebertragen der Zahnprofile in die Endpunkte, Theilkreis- oder Zahntheilungen und bei der Vervollständigung der Zähne zeichnet man selbstverständlich zuerst denjenigen Theil der Zahnprofile, welcher den Theilkreis durchschneidet und stößt die übrigen Theile an diesen an.

Ist nun die Verzahnung in dieser Weise fertig gestellt, und hat man zwischen Grundkreis und zugehörigem Radboden noch einen namhaften Zwischenraum, wie es z. B. bei dem Rade T_1 hier der Fall ist, so giebt man diesen Zähnen radiale oder — wenn es die Kopfbahn (s. pag. 330) des eingreifenden Zahnes zuläßt — parallel zur Mittellinie des Zahnprofiles gezogene Wurzel-Fortsätze und rundet schließlich mittelst Hohlkehlen ab. —

Wie bei den Cykloïden-Zähnen die Peripherie des Rollkreises, welcher gleichzeitig zwei zusammen arbeitende Zahncurven auf den beiden Theilkreisen erzeugt, die Berührungspunkte dieser beiden Zahncurven enthält, so ist NN_1 (Fig. 4, Bl. LXXV) die Eingrifflinie der Evolventenzähne der Räder T und T_1. Dieselbe ist ja in der That auch weiter nichts als die Peripherie eines erzeugenden Roll-

Digitized by Google

kreises, aber mit unendlich großem Radius. Analog der Fig. 8, Bl. LXXIV erzeugt vorliegend der Punkt S der Linie NN_1 die zwei Evolventen aSb und dSf — erstere auf dem Grundkreis G, letztere auf G_1 — wenn man sich denkt, daß die Theilkreise T und T_1 mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit und auf der Seite ihrer gegenseitigen Berührung mit übereinstimmender Richtung um ihre festen Axen gedreht werden und dabei die Linie NN_1 unausgesetzt wie ein um die Grundkreise G und G_1 gewickeltes, zwischen den An- und Ablaufstellen an diesen Kreisen geradlinig angespanntes Band in seiner Art an dieser Bewegung Theil nimmt. Daß aber hier die Eingrifflinie NN_1 eine gerade Linie und bei zwei Rädern von constanter Richtung ist, bedingt mechanisch einen wesentlichen Unterschied in dem Aufeinanderwirken zweier Evolventenzähne gegenüber demjenigen zweier Cyklordenzähne. Die gemeinschaftliche Tangente an die Grundkreise ist hier nämlich zugleich die Richtung der gemeinschaftlichen Normale zweier Zahncurven im Berührungspunkte und giebt daher die Richtung des Zahndruckes in den betreffenden Berührungspunkten an. Da aber diese gemeinschaftliche Normale hier für alle Zahnberührungen eine constante Richtung hat, so ist auch die Richtung des Zahndruckes während des Aufeinanderwirkens zweier Evolventenzähne in Bezug auf die Centrale der Räder unausgesetzt dieselbe, und es hat demzufolge der Zahndruck stets dieselbe Größe, nämlich:

$$Q = P\frac{r}{\varrho} = \frac{P}{\sin\mu} = \frac{M}{r \cdot \sin\mu}.$$

Der Winkel μ ist bei einer Evolventen-Verzahnung constant, während Winkel α, Fig. 6, Bl. LXXIV und pag. 320, sich während des Eingriffes zweier Zähne ändert.

Hieraus resultirt nun, daß sich die Evolventenzähne an ihren Flanken gleichmäßig abnützen und, wie erwähnt, im abgenutzten Zustande innerhalb der Länge des Eingriffprofiles eine der ursprünglichen Form aequidistante Begrenzung zeigen. Solche Zähne werden also stets eine Bewegungsübertragung mit übereinstimmender Bewegungsform zwischen den Axen der Räder möglich machen.

Die Eingriffstrecke, innerhalb welcher also die Eingrifflinien zweier zusammenarbeitenden Zähne sich decken, wird auch hier durch die Kopfkreise der Räder begrenzt, und es ist somit im vorliegenden Beispiele die Eingriffstrecke $\sigma S \sigma_1$. Die zugehörigen Wälzungsbögen erhält man durch die Abschnitte der in die Endpunkte σ und σ_1 verlegten Zahnprofile auf den zugehörigen Theilkreisen; die Eingriffbögen sind also: $\beta S \zeta = \alpha S \delta$ und die Eingriffprofile der Zähne aSb_1 und dSf_1, wobei $Sb_1 = \sigma_1 \beta$ und $Sf_1 = \sigma \zeta$.

Die Eingriffdauer (ε) kann entweder auf den Eingriffbögen mit der Zahntheilung (t) oder auf der Eingriffstrecke mit der auf die Grundkreise (G oder G_1) reducirten Zahntheilung (t') gemessen werden und beträgt vorliegend $\varepsilon = 2{,}1$.

Zahnräder mit Evolventenzähnen und innerem Eingriff werden ganz auf entsprechende Weise construirt. Hier fallen dann die beiden Theilkreise mit den betreffenden Grundkreisen auf eine Seite der gemeinschaftlichen Tangente NN_1, und die Zähne des größeren Rades bekommen eine Form wie die Zahnlücken bei entsprechendem äußerem Eingriffe.

Digitized by Google

Zahnstange mit Getriebe; Fig. 5, Bl. LXXV.

Die Zahnstange mit Evolventenzähnen bietet insofern eine besondere Eigenthümlichkeit dar, als bei dieser die Zähne ebene, gegen die Ebene des Zahnbodens unter dem Grundkreiswinkel μ geneigte Flanken bekommen, im Profile also wie Trapeze erscheinen. Diese Eigenthümlichkeit ist in der Entstehung der Evolventen begründet. Ist nämlich der Radius des Grundkreises auch unendlich groß, so macht die erzeugende Gerade beim Abwickeln derselben nicht eine Drehbewegung tangential um den Grundkreis, sondern, weil hier der Tangential- oder Drehpunkt derselben in der Unendlichkeit liegt, eine parallel zu sich selbst geradlinig fortschreitende Bewegung und ihr End- oder Erzeugungspunkt beschreibt dabei eine gerade Linie, welche auf der Richtung der Erzeugenden normal steht.

Es sei in Fig. 5 ein Getriebe mit $z = 24$ Zähnen und der Theilung $t = 5 \cdot \pi = 15{,}70796^{mm}$ für den Eingriff mit einer Zahnstange mit Evolventen-Zähnen so zu verzahnen, daß die beiden Räder einem Satze dieser Theilung angehören.

Der Halbmesser des Getriebes wird im vorliegenden Falle rational, weil die Theilung ein einfaches Multiplum von π ist, nämlich $r = 60^{mm}$.

Ferner ist: $h = 11^{mm}$; $k = 4{,}6^{mm}$; $w = 6{,}4^{mm}$; $s = 7{,}6^{mm}$; $l = 8{,}1\ldots^{mm}$; $s_1 = 10^{mm}$.

Der Grundkreiswinkel ist wieder $\mu = 75^0$ und daher der Halbmesser des Grundkreises $\varrho = 0{,}966\, r = 57{,}96^{mm}$.

Die Zahnprofile der Zahnstange sind also gerade, unter $\mu = 75^0$ gegen den Theilkreis T_1 geneigte Linien.

Die Zahnform aSb des Getriebes erhalten wir durch Abwickeln der Geraden NN_1 auf dem Grundkreise G, und dieselbe ist von b aus radial bis an den Radboden W zu verlängern.

Hier — und bei allen Zahnstangengetrieben mit weniger als 28 Zähnen*) — tritt in Folge der mit den Zahncurven nicht in Zusammenhang stehenden Wahl der Zahnhöhenverhältnisse der Fall ein, daß, trotzdem die Profile geometrisch richtig gebildet sind, dieselben nicht der Voraussetzung gemäß auf einander einwirken, da die Kopfhöhe der Zahnstangenköpfe größer ist, als der erhaltenen Evolvente aSb entspricht; denn der radiale Wurzelfortsatz der Evolventenzähne ist kein Eingriffprofil mehr. In einem solchen Falle muß man die Zähne an der Zahnstange entweder etwas niedriger machen oder, wenn wie in unserem Falle es nicht viel austrägt, dieselben am Kopfe etwas abrunden. Wenn die betr. Räder nicht Satzräder-Verzahnung bekommen müssen, so kann man sich auch durch Annahme eines kleineren Grundkreiswinkels (μ) helfen; damit vergrößert man aber den Zahndruck Q. —

Die Eingriffstrecke ist vorliegend die Gerade $\sigma S \sigma_1$, die zugehörigen Eingriffbögen sind: $S\beta\zeta = \alpha S\delta$ und die Eingriffprofile aSb und dSf_1. Die Dauer des Eingriffes beträgt $\varepsilon = 2{,}1$ Zahntheilungen und wird am einfachsten mit der Einheit t auf der Geraden $\zeta S\delta$ gemessen.

*) Reuleaux, „Constrtr." 1869, pag. 428.

Digitized by Google

Allgemeine Verzahnung.

Innerer Eingriff; Fig. 6, Bl. LXXV.

Durch das vorliegende Beispiel will der Verfasser zeigen, wie oberflächlich man mitunter in der Praxis die Verzahnung der Räder behandelt, während doch von einer richtigen und rationellen Zahnform der Gang und die Dauer der Räder zunächst abhängen; welche irrigen Ansichten in dieser Beziehung oft noch unter Praktikern herrschen, während doch ein eingehendes Studium der Verzahnungslehre in höchst einfacher und bündiger Weise die nöthigen Anhaltspunkte liefert und das Urtheil in dieser Richtung ausbildet.

Ein sehr beliebtes Verfahren, eine der Evolventen-Verzahnung ähnliche Zahnbildung — man könnte sie Pseudo-Evolventen-Verzahnung nennen — durch Probiren auszuführen ist das: Man setzt im Zahnmittel — in der Mittellinie des Zahnprofiles — eines Zahnes den Zirkel ein und beschreibt von da aus das Profil des benachbarten oder zweitnächsten Zahnes in Gestalt also eines Kreisbogens, alsdann sucht man durch Probiren für die Zähne des eingreifenden Rades ebenfalls einen Kreisbogen, welcher als Zahncurve seine Schuldigkeit thut und versichert sich dessen noch besonders dadurch, daß man zwei einander berührende Profile innerhalb des Eingriffes in mehreren Positionen verzeichnet. Dabei erstrebt man einzig und allein Formen, welche den Rücksichten der Festigkeit entsprechen und annähernd richtig wirken, übersieht aber vollständig die Art der gegenseitigen Einwirkung und die davon abhängige Abnützung der Zähne. Uebrigens ist auch der praktische Nachweis für die Richtigkeit des Eingriffes durchaus ungenügend, denn selbst die mit der größten Sorgfalt und Genauigkeit ausgeführte Zeichnung einer solchen Verzahnung leidet stets an dem Nachtheile, daß man nicht die Berührungspunkte selbst erhält. Der Einwand, daß die geometrische Entwickelung der Zahnformen zu viel Zeit in Anspruch nehme, ist ganz unbegründet und zeigt höchstens, daß der Betreffende sich überhaupt noch nicht ernstlich mit der Verzahnungslehre vertraut gemacht hat; denn ein geübter Constructeur trifft sehr leicht eine passende Wahl für Rollkreishalbmesser oder Grundkreiswinkel — sofern nicht gar Satzräder construirt werden sollen — und die Construction von ein paar kurzen cykliſchen Curven ist in der That sehr rasch ausgeführt, während es bei der Methode des Probirens ein großer Zufall ist, wenn man schnell einen passenden Kreisbogen nach Krümmung und Lage findet.

In Fig. 6, Bl. LXXV nehmen wir an: eine Zahntheilung $t = 35^{mm}$, geben dem kleinen Rade $z = 12$ Zähne und dem großen $z_1 = 84$, so daß wir eine Uebersetzung $\varphi = 1:7$ erhalten. Die Theilkreishalbmesser bekommen dann folgende Größen: $r = 66{,}85^{mm}$ und $r_1 = 467{,}96^{mm}$. Außerdem wird $k = 11^{mm}$; $w = 14^{mm}$; $s = 16{,}5^{mm}$; $l = 18{,}5^{mm}$ und $s_1 = 18^{mm}$.

Die Theilung $t = 35^{mm}$ tragen wir in Fünfteln derselben auf, stechen also am Maßstabe 7^{mm} recht genau ab und tragen diese Länge von S aus auf den Theilkreisen T und T_1 nach beiden Seiten hin so oft fünfmal auf, als wir Zähne verzeichnen wollen. Im Theilpunkte S_1 und in den übrigen Endpunkten einer Zahntheilung tragen wir ferner die Zahnstärke s an, halbiren dieselbe in x und ziehen den Strahl Ox, dann setzen wir beispielsweise gerade

Digitized by Google

in x, wo die Mittellinie des Zahnprofiles den Theilkreis trifft, den Zirkel ein, messen bis S und schlagen den Kreisbogen aSb. Dasselbe wiederholen wir in allen übrigen Theilpunkten der Zahntheilung.

Wir wollen nun aber das Profil des eingreifenden Zahnes nicht durch Probiren suchen, sondern nach der Methode der „allgemeinen Verzahnung", pag. 308. Wir ziehen deshalb zu dem Kreisbogen aSb die Normalen, und zwar der Einfachheit wegen so, daß dieselben durch die auf den Theilkreisen vorhandenen Theilpunkte gehen; die letzte Normale über dem Kopfe a ist eine Tangente zu T in x. Dann legen wir durch die zu den Normalen gehörigen Curvenpunkte der Linie aSb von O aus concentrische Kreise und schneiden auf diesen die Längen der Normalen von S aus ab. So erhalten wir die zu der Curve aSb gehörige Eingriffstrecke $\sigma S \sigma_1$, und aus dieser leiten wir rückwärts auf die pag. 308 angegebene Weise das Profil cSd der Zähne des großen Rades ab. Dasselbe wird sehr genau durch zwei Kreisbögen mit den Krümmungsmittelpunkten x_1 und y_1 ersetzt, und als solche übertragen wir die Zahncurven in die übrigen Endpunkte der Zahntheilung und vervollständigen die Zähne.

Die zu der Eingriffstrecke $\sigma S \sigma_1$ gehörigen Eingriffbögen sind: $\beta S \gamma = \alpha S \delta$ und die Eingriffprofile aSb_1 und dSc_1. Die Richtung des größten Zahndruckes ist SQ.

Die erhaltenen Zähne lassen hinsichtlich ihrer Form in Rücksicht für die Festigkeit nichts zu wünschen übrig; die Richtung des stärksten Zahndruckes ist bei der vorliegenden großen Uebersetzung noch ziemlich günstig, und selbst die Eingriffprofile Sb_1 und Sd haben ein derartiges Verhältniß zueinander, daß die Zähne während ihren Berührungen innerhalb der Strecke $S\sigma_1$ einen verhältnißmäßig großen Antheil rollender Bewegung zu einander ergeben.

Anders ist dies aber mit den Profilen Sa und Sc_1. Hier schleift sich die lange Strecke Sa auf dem kurzen Profilstücke Sc_1 des eingreifenden Zahnes ab, und namentlich die gegen a hin gelegenen Punkte von Sa werden den eingreifenden Zahn zwischen S und c_1 sehr stark angreifen, weil dort auch der Zahndruck größer ist. Die Folge läßt sich hieraus absehen: Es wird eine ganz ungleiche Abnützung und, nachdem dieselbe eingetreten ist, bei langsamem Gange der Räder merklich ungleichförmige Bewegungsübertragung stattfinden. Da die Eingriffstrecke vom vierten Berührungspunkte der Curven Sa und Sc_1 aus sich wieder nach dem Theilkreis zu krümmt, so kommen Punkte der Linie Sc_1 während eines Eingriffes sogar zweimal zur Berührung, ein Umstand, der bei Zahnrädern nie eintreten sollte. Wählt man außerdem die Curve aSb so, daß mehrere Normalen am Kopfe a gleichzeitig bei x in den Theilkreis einschneiden, so erhält man für diese Punkte nicht eine Berührung, sondern Zusammenfallen zweier Zahncurven in einer Profilstrecke; auch das ist zu vermeiden. —

Wir wollen nicht leugnen, daß bei Rädern mit Holz- und Eiseneingriff, wo man also beiderseits die Zähne bearbeitet, diese praktische Methode ihre Vortheile bietet, weil man die Zähne an dem bis auf die Bearbeitung der Zähne fertig gestellten Rade leicht vorreißen kann; jedenfalls sollte man sich aber vorher durch Verzeichnung des Zahndiagrammes versichern, daß nicht solche Mißverhältnisse eintreten, wie hier zwischen aS und c_1S. —

Digitized by Google

Da sich das Eingriffprofil Sc_1 an den Zahnwurzeln des großen Rades nur über einen sehr kleinen Theil des Wurzelprofiles Sc erstreckt, von der Curve Sc mit andern Worten nur ein verhältnißmäßig kleines Stück wirklich construirt wird, so muß man noch die Kopfbahn des Punktes a aufsuchen, damit man sieht, wie weit man mit dem Profilstücke $c_1 c$, welches willkürlich gebildet wird, in die Zahnlücke hineingehen und wie stark man die Zähne an der Wurzel abrunden kann.

3) Berechnung der Zahntheilung.

Unter 1) haben wir in den Formeln (83 ÷ 90) die Dimensionsverhältnisse der Zähne von Zahnrädern festgestellt, und es können danach — einige abnorme Fälle ausgenommen — immer die räumlichen Verhältnisse der Radzähne ermittelt werden. Wir bezogen uns dabei ausschließlich auf die „Zahntheilung" (t), und wir haben nun diese Größe selbst näher zu bestimmen.

In rein mechanisch-theoretischer Beziehung ist die Theilung (t) abhängig von Größe, Richtung und Angriffspunkt des Zahndruckes Q, Fig. 202.

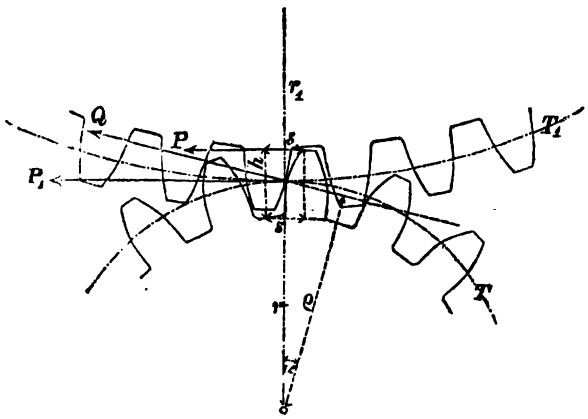


Fig. 202.

Der Zahndruck hat seinen Ursprung in dem Kraftantheile P_1 des Momentes $M = P_1 r$, welches durch die Zahnräder von der treibenden Welle auf die getriebene übertragen werden soll; derselbe ist je nach der Größe der Räder-Uebersetzung, je nach der Größe der Theilung im Vergleich zur Größe der Räder und je nach der Form der Zähne verschieden in Bezug auf seine Größe und Richtung und wechselt auch die Lage seines Angriffspunktes mit der Berührung zweier Zähne innerhalb der betr. Eingriffprofile.

Bei der bildlichen Darstellung des Zahneingriffes in Fig. 200 (pag. 308), Fig. 202 und auf Bl. LXXIV und LXXV in Gestalt von ebenen Figuren erhalten wir den Zahndruck für eine Zahnberührung als eine gerade Linie, deren Lage allgemein durch den Berührungspunkt der Theilkreise und den betreffenden Berührungspunkt der Zahnprofile bestimmt ist. In Wirklichkeit berühren sich aber die Zähne zweier Räder in einer geraden Linie, und es äußert sich demnach auch der Druck zwischen zwei aufeinanderwirkenden Zähnen als eine Reihe von parallelen, untereinander gleichen und mit ihren Angriffspunkten in der Berührungslinie der Zahnflanken gelegenen Kräften. Die Wirkung solcher Kräfte ist aber nach der „Mechanik" (pag. 71 und 89) dieselbe wie diejenige einer einzigen Kraft, welche in der Mitte (Schwerpunkt) der Verbindungslinie der Angriffspunkte jener Einzelkräfte angreift, mit denselben die gleiche Richtung und eine Größe gleich deren Summe hat. Die Größe

Digitized by Google

dieser Resultante ist aber eben der Druck Q, und wenn wir uns denken, daß die genannten ebenen Figuren einen Mittelschnitt der Räder darstellen, so geben dieselben ein vollständig richtiges Bild von dem mechanischen Zusammenhange des Aufeinanderwirkens von Zähnepaaren.

Die Zähne der Stirnräder, welche wir in der vorliegenden Untersuchung zunächst in Betracht ziehen, sind ihrer Form nach prismatisch und wir haben demnach einen Fall der Biegungsfestigkeit, wo eine (resultirende) Kraft auf einen einseitig befestigten prismatischen Körper einwirkt. Die Höhe dieses Körpers ist hier die in verschiedenen Entfernungen vom Angriffspunkte der Kraft verschieden große Profilbreite der Zähne und speciell im Theilkreise die Zahndicke (s), welche nach Frml. (87) pag. 306 allgemein als ein aliquoter Theil der Zahntheilung betrachtet wird. Da man aber auch die übrigen Dimensionen der Zähne im Verhältniß zur Theilung bemißt, so führen wir anstatt der Zahndicke (s) sogleich die Theilung selbst in die Festigkeitsformeln ein.

Die allgemeine Formel für Biegungsfestigkeit heißt nach pag. 48:

$$P \cdot l = q \cdot s,$$

und wir wollen zunächst über die hier in Beziehung zueinander stehenden Größen in Berücksichtigung des vorliegenden besonderen Falles einige Bemerkungen anknüpfen.

Bemerkungen:

Da haben wir zunächst die Kraft P: das ist, wie gesagt, der in dem Wellenmomente enthaltene Druck P_1 (Fig. 202). Dieser Druck ist aber seiner Richtung nach im Allgemeinen verschieden, je nach der Form und je nach der Lage des Berührungspunktes der Zähne; er ist seiner Intensität nach am größten, wenn in

$$Q = \frac{M}{r \cdot \cos \alpha} = \frac{P_1}{\cos \alpha}$$

α seinen größten Werth erlangt, und am kleinsten, nämlich:

$$Q = P_1 = \frac{M}{r},$$

wenn $\alpha = 0$, also wenn sich Cykloïdenzähne im Berührungspunkte der Theilkreise berühren. Nur bei Evolventenzähnen ist er von constanter Größe und Richtung, liegt nämlich immer in Richtung der gemeinschaftlichen Tangente an die Grundkreise oder Evoluten. In Frml. (16), pag. 48 versteht man aber unter P eine Kraft, welche rechtwinklig ist auf der Längenausdehnung des Prisma's. Wenn nun gleichwohl in allen Berührungen außerhalb der Centrale von Cykloïdenzähnen $Q > P_1$, so hat man doch nur von diesem Q eine Projection normal zur Mittellinie des Zahnprofiles zu nehmen, und diese ist wieder kleiner als Q. Wir setzen deshalb für die Größe des Zahndruckes ein- für allemal die Kraft $P_1 = P$ des zu übertragenden Drehmomentes (M) der betreffenden Welle.

Dieses hat nun einen Hebelarm r, ist also im Theilkreise wirksam und in Bezug auf die Festigkeit des Zahnes ist der Hebelarm von P_1 die Wurzelhöhe (w). Da aber während des Aufeinanderwirkens zweier Zähne der Angriffspunkt des Zahndruckes seine Lage innerhalb des Eingriffprofiles eines Zahnes ändert, so nehmen wir den ungünstigsten Fall an, und der tritt ein, wenn der Eingriff beginnt oder aufhört, überhaupt wenn die Berührung im

Digitized by Google

Kopfende eines Zahnes liegt. Alsdann ist der Hebelarm (l) der Biegungskraft Frml. (16) pag. 48 $l = h$, gleich der Höhe des Zahnes.

Der bei der Biegung durch eine am Kopfende des Zahnes angreifende und rechtwinklig zur Höhe des Zahnes gerichtete Kraft P in Betracht kommende Querschnitt (q) des Prisma's ist bei Stirnrad-Zähnen ein Rechteck, dessen Breite gleich der Zahnbreite (b) ist, und dessen Höhe im Theilkreis durch die Zahnstärke (s) ausgedrückt wird; in anderen Schnitten parallel zur Zahnaxe oder Zahnbreite (b) ist diese Höhe theils größer, theils kleiner als s. In der Regel — Geradflanken-Zähne ausgenommen — sind die Zähne am Kopfe schwächer und an der Wurzel stärker als im Theilkreis, und wo es wegen zu großer Uebersetzung zwischen den Rädern nicht möglich ist, der Zahnwurzel mindestens eine der Zahndicke im Theilkreis gleiche Stärke zu geben, armirt man diese Räder mit „Stirnscheiben". Wir gehen demnach genügend sicher, wenn wir im Querschnitt (q) für die Höhe desselben constant die Zahnstärke (s) im Theilkreis setzen, und mithin ist der in Frml. (16) pag. 48 einzuführende Querschnittsmodulus für den vorliegenden Fall:

$$q = \frac{b \cdot s^2}{6}.$$

Die zulässige Belastung (s) des Zahnmateriales pro $1\,\square^{mm}$ des Querschnittes lassen wir vorläufig noch unbestimmt. —

Diese Annahmen gewähren in denjenigen Fällen eine ganz besondere Sicherheit, wo die Eingriffdauer (ε) zweier zusammenarbeitenden Zähne von ineinandergreifenden Rädern größer ist als „Zwei". Alsdann sind nämlich fortwährend je zwei Zahnpaare in Eingriff, und der aus der zu übertragenden Kraft im Umfange eines Theilkreises entstehende Gesammt-Zahndruck zerlegt sich nach Maßgabe der Richtungen der Zahndrücke in den gleichzeitigen Zahnberührungen in zwei oder noch mehr Componenten, sodaß dann jeder einzelne der gleichzeitig eingreifenden Zähne eines Rades nur etwas weniger oder mehr als die Hälfte, das Drittel u.s.f. des ganzen resultirenden Zahndruckes zu erleiden hat. Ist die Eingriffdauer kleiner als 2, aber größer als 1, so sind jedesmal nur während eines Theiles der Eingriffdauer zwei Zahnpaare gleichzeitig in Eingriff, und da der Fall $\varepsilon > 2$ nur selten, nämlich nur dann zu erreichen ist, wenn die Radhalbmesser r und r_1 im Verhältniß zur Theilung (t) der Räder sehr groß sind, so kann man bei Aufstellung einer allgemeinen Formel für die Zahntheilung nicht darauf Rücksicht nehmen, muß vielmehr immer den häufiger vorkommenden ungünstigen Fall voraussetzen. —

Die Zähne von Kegelrädern sind nicht prismatisch, sondern pyramidal gestaltet, und zwar so, daß die Verlängerungen der, die Flanken derselben einhüllenden, geraden Linien sich im Schnittpunkte der Axen treffen. Die Berührung zweier Kegelradzähne erfolgt in einer solchen erzeugenden Geraden, und es werden die Zähne von Kegelrädern mit gleichprofilirten Zähnen von Stirnrädern dann als gleichwerthig zu bezeichnen sein, wenn sie in einem Normalschnitte in der halben Zahnbreite ein dem Stirnradprofile congruentes Profil ergeben. Es würde also im Allgemeinen ein Zahn eines Kegelrades dieselbe Festigkeit haben wie ein Zahn eines Stirnrades, wenn die Theilung eines in der halben Höhe des Grundkegels gelegenen Theilkreises übereinstimmt mit der Theilung des Stirnrades. Der Bruchquerschnitt ist bei Kegelrad-Zähnen ein Trapez. In der Praxis mißt man aber die Theilung stets auf dem äußeren oder größeren Kreise des Grundkegels,

Digitized by Google

an der Begrenzung der größeren Endfläche desselben, und betrachtet ein Kegelrad und ein Stirnrad dann als gleichwerthig in Bezug auf eine zu übertragende Kraft, wenn die Theilung im äußeren Theilkreise des Kegelrades mit derjenigen des Stirnrades übereinstimmt. Die pyramidalen Zähne des Kegelrades haben alsdann zwar kleineren Bruchquerschnitt als die prismatischen Zähne des Stirnrades — der Unterschied ist um so größer, je größer der Spitzenwinkel (β, Fig. 158) eines Kegelrades ist — dafür nimmt man die Zahnbreite eventuell beim Kegelrade etwas größer, übrigens aber wird schon die zulässige Materialspannung so niedrig eingeführt, daß die Formeln für die Zahntheilung der Stirnräder sofort auch für Kegelräder bei der angegebenen Bedeutung von t für diese verwendet werden können.

Ebenso verhält es sich mit den übrigens selten vorkommenden Hyperbel- und Schraubenrädern. —

Die vorstehenden Bemerkungen zeigen uns, daß sehr viele und verschiedene Einflüsse theoretischer Natur für die Bestimmung der Zahntheilung in Betracht zu ziehen sind, und daß es deshalb nicht so einfach ist, eine allgemeine Formel für die Theilung der Zahnräder aufzustellen, wenn man allen diesen Umständen gehörig Rechnung tragen will. Die Gesichtspunkte werden aber noch durch einen sehr wesentlichen vermehrt, d. i. die praktische Verwendung der Zahnräder. Dieselbe ist so außerordentlich zahlreich und verschieden, daß man bei der Wahl eines Räderpaares in jedem Falle die besonderen Verhältnisse wohl erwägen muß, und man muß nicht selten für eine Maschine Räder von ganz abnormen Verhältnissen construiren, welche speciell nur für den einen Zweck zu brauchen sind.

Von hervorragender Wichtigkeit für uns sind auch hier die bei Transmissionen verwendeten Organe, und indem wir diesen noch die in Hebmaschinen vorkommenden Räder zur Seite stellen, umfassen wir den größtmöglichen Theil der im Maschinenbau verwendeten Zahnräder insgesammt und erhalten zugleich zwei in Bezug auf praktische Beanspruchung (Abnutzung) wesentlich verschiedene Gattungen, welchen die meisten der Zahnräder überhaupt zu unterstellen sind, und für welche wir die Ableitung von Formeln für die Theilung auf verschiedene Annahmen basiren können. Wir unterscheiden also für die Folge:

a) Krahnräder und b) Triebwerkräder

und rechnen — ähnlich wie bei den Zapfen — zu den ersteren solche Zahnräder, deren Theilkreise eine Umfangsgeschwindigkeit von weniger als 0,5^{m} pr. sec. haben, alle übrigen normalen Räder aber zu den Triebwerkrädern.

Von der Drehungsgeschwindigkeit hängt nämlich besonders die Abnützung der Zähne ab; sie ist um so größer, und Stöße und Vibrationen treten um so stärker auf, je rascher sich die Räder drehen. Während wir daher bei den Krahnrädern die Breite der Zähne in einem festen Verhältnisse zur Theilung annehmen und die Materialbeanspruchung bei allen Rädern dieser Gattung constant bemessen können, müssen diese Größen bei Triebwerkrädern unter Einfluß der Umfangskraft und der Drehungsgeschwindigkeit gestellt werden. —

Nach den vorstehend im Allgemeinen gemachten Annahmen und festgesetzten Bezeichnungen ist die Festigkeit (Gleichgewichtszustand) eines Zahnes folgendermaßen auszudrücken:

$$P.h = \frac{b.s^2}{6}.s.$$

Digitized by Google

Bei Rädern, deren Zähne beiderseits von (Guß-) Eisen sind, bestimmten wir die Zahnstärke (s, Frml. 87) zu $^1/_2$ Millimeter weniger als 0,485 der Theilung. Da aber meistens die Zähne an der Wurzel stärker sind als (s), so wollen wir der Einfachheit wegen hier $s = 0{,}5\ t$ in die Rechnung einführen. Es ist dann $s^2 = \frac{t^2}{4}$, und wenn wir dies in obige Formel einsetzen, so entsteht:

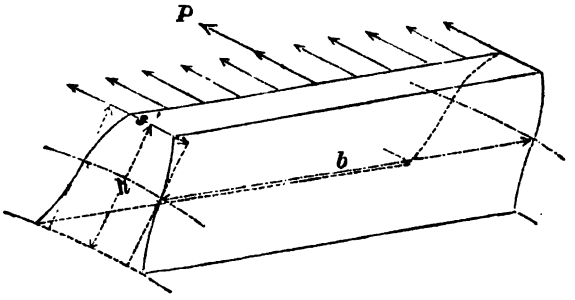


Fig. 203.

$$\frac{b \cdot t^2}{4} = \frac{6 \cdot Ph}{s}$$

oder:

$$b \cdot t = 24 \frac{P}{s} \cdot \frac{h}{t},$$

und wenn wir für $\frac{h}{t}$ das constante Verhältniß 0,7 aus (Frml. 84) einsetzen:

$$b \cdot t = 16{,}8 \frac{P}{s} \ldots\ldots (93).$$

Mit Einführung der Verhältnisse (Frml. 89 und 90) bekommen wir bei Holz- und Eiseneingriff oder für gemischte Theilung:

$$b \cdot t_e = 26{,}25 \frac{P}{s_e} \ldots\ldots (93^a)$$

und:

$$b \cdot t_h = 13 \frac{P}{s_h} \ldots\ldots (93^b).$$

Diese Formeln stellen ganz allgemein den mechanischen Zusammenhang zwischen den Dimensionen eines Zahnes und der denselben belastenden Kraft dar. Dieselben können deshalb zur Beurtheilung der Inanspruchnahme vorhandener Räder benützt werden, wenn man die gemessene Theilung und Zahnbreite numerisch einführt und die Formeln für P oder s auflöst. Die übrigen Dimensionen der Zähne müssen dann natürlich zur Theilung in den angenommenen Verhältnissen (Frml. 84 – 89) stehen.

Diese Formeln zeigen, daß, sobald zwischen Zahnhöhe (h) und Theilung (t) ein festes Verhältniß (0,7) eingehalten wird, für die Festigkeit eines Zahnes aus irgend einem Materiale (s) nur der Bruchquerschnitt (b . s) bezhtl. (b . t) maßgebend ist. Man kann also unter Umständen die Factoren b und t beliebig verändern, man braucht für eine gewisse Kraft (P) nur ein gewisses Product (b . t). —

Die Frmln. 93 haben wir nun noch weiter auszuführen und müssen zu dem Zwecke die Breite (b) und die Inanspruchnahme (s) näher bestimmen. Da aber gerade diese Größen von der Drehungsgeschwindigkeit der Räder beeinflußt werden, so trennen wir hier die Betrachtung in der angegebenen Weise und nehmen zuerst:

a) Theilung der Krahnräder.

Die Umfangsgeschwindigkeit dieser Räder sei also im Theilkreise:

$v < 0{,}5^m$ pr. sec.

Digitized by Google

Das Breiten-Verhältniß der Zähne sei allgemein $= \psi$ und werde bei Krahnrädern constant zu

$$\psi = \frac{b}{t} = 2 \ldots . (94)$$

angenommen.

Die zuläſſige Belaſtung eines $\square^{mm}$ im Bruchquerſchnitte des Zahnes ſetzen wir für Zähne aus Gußeiſen feſt zu:

$$s_0 = \tfrac{1}{3} Z = 3{,}75 \div 4{,}25;\ i/\mathfrak{M}: s = 4^k \text{ pr. } \square^{mm}.$$

Führen wir nun dieſe Werthe in Frml. 93 ein, ſo wird:

$$2t.t = \frac{16{,}8}{4} P;\ t^2 = \frac{16{,}8}{2.4} P = 2{,}1\, P$$

und ſomit:

α) die Theilung für Krahnräder aus Gußeiſen mit gleichartigem Eingriff in Gußeiſen:

$$t = 1{,}45 \sqrt{P} \ldots . (95).$$

Wenn außerdem das Drehmoment ($M = P.r$) und der Halbmeſſer (r) des Rades gegeben ſind — erſteres in Kilogramm-Millimeter, letzterer in Millimeter — ſo hat man auch:

$$t = 1{,}45 \sqrt{\frac{M}{r}} \ldots (96).$$

Anſtatt des Halbmeſſers (r) iſt oft die Zähnezahl gegeben oder angenommen, und wenn wir dieſe einführen wollen, müſſen wir uns auf Frml. (81), pag. 303 beziehen. Es iſt nämlich:

$$r = \frac{zt}{2\pi},$$

alſo:

$$P.r = \frac{zt}{2\pi}.P = M$$

und:

$$P = 2\pi . \frac{M}{zt}.$$

Dies in Frml. (93) eingeführt, giebt:

$$b.t = \frac{16{,}8.2\pi}{4} \cdot \frac{M}{zt}$$

$$t^3 = \frac{16{,}8.2\pi}{2.4} \cdot \frac{M}{z} = 13{,}195 \frac{M}{z}$$

und:

$$t = 2{,}36 \sqrt[3]{\frac{M}{z}} \ldots (97).$$

Selbſtverſtändlich iſt es ganz gleichgiltig, für welches von zwei eingreifenden Rädern man die Rechnung ausführt, denn der Zahndruck (P) Frml. (95) iſt bei beiden Rädern derſelbe, und die Quotienten $\frac{M}{r}$ reſp. $\frac{M}{z}$ ſtimmen ebenfalls bezüglich überein.

Dieſe Formeln laſſen ſich ohne Schwierigkeiten für Räder aus anderen Stoffen umwandeln; man hat dann nur für (s) den betreffenden Werth einzuſetzen und erhält damit etwas veränderte Coefficienten vor den Wurzeln. —

β) Speciell für gemiſchte Theilung (t_0), wenn alſo ein Eiſenzahnrad mit einem Holzkammrade zuſammenarbeitet, wollen wir die Ableitung von Special-

Digitized by Google

formeln noch ausführen. In diesem Falle ist die Stärke des Eisenzahnes im Theilkreise: $s_e = 0{,}4\, t_0$.

Nehmen wir ferner an: $b = 2\, t_0$ und $s = 4{,}25^k$ pr. $\square^{mm}$, so liefert Frml. (93ᵃ):

$$t_0^{\,2} = \frac{26{,}25}{2 \,.\, 4{,}25} P$$

oder: $$t_0 = \sqrt{3{,}09}\sqrt{P} = 1{,}76\sqrt{P},$$

wofür wir abgerundet setzen: $t_0 = 1{,}8\sqrt{P}$ . . . . (98).

Denselben Werth erhalten wir aus Frml. (93ᵇ), wenn wir daselbst die zulässige Belastung (s_h) für Eschen- oder Buchenholz zu $s_h = 2^k$ pr. $\square^{mm}$ einführen:

$$t_0^{\,2} = \frac{13}{2 \,.\, 2} P$$

$$t_0 = \sqrt{3{,}25}\sqrt{P} = 1{,}8\sqrt{P}.$$

Es mag zwar die zulässige Belastung s_h etwas hoch erscheinen; allein die Holzzähne sind doch etwas elastischer als Gußeisenzähne, der gemischte Holz- und Eiseneingriff liefert überhaupt ruhigere Bewegung, und wenn schließlich auch ein Holzkamm bricht, so ist derselbe leicht und ohne bedeutende Kosten zu ersetzen, während in Folge Bruches eines Eisenzahnes meist das ganze Rad untauglich wird. Gerade deshalb erscheint es gerechtfertigt, bei gemischtem Eingriffe die Holzkämme specifisch stärker zu beanspruchen als die Eisenzähne, damit eher ein Bruch der letzteren vermieden werde.

Uebrigens entspricht unsere Annahme mehr den praktischen Ausführungen als die älterer Autoren. Es wird die gemischte Theilung für Holz- und Eiseneingriff nach Frml. (98) im Allgemeinen 1,24 mal der Theilung bei gleichartigem Gußeiseneingriff; da aber nach Frml. (90) die Stärke des Holzzahnes circa 1,16 mal so groß ist als die Stärke des Eisenzahnes bei gleichartigem Eingriffe, so wird der Holzzahn durchschnittlich 1,44 mal so stark als ein gleichwerthiger Eisenzahn.

Führen wir auch hier noch die Drehmomente mit dem Halbmesser resp. mit der Zähnezahl ein, so heißt dann Frml. (98) auch:

$$t_0 = 1{,}8\sqrt{\frac{M}{r}} \;.\;.\;.\;.\;. \text{ (99)},$$

beziehentlich:

$$t_0 = 2{,}73\sqrt[3]{\frac{M}{z}} \;.\;.\;.\;. \text{ (100)}.$$

b) Theilung der Triebwerkräder.

Zu diesen Rädern rechnen wir solche, welche im Theilkreise eine Betriebs-Umfangsgeschwindigkeit $v > 0{,}5^m$ pr. sec. haben.

Die zulässige Spannung (s) betrachten wir bei Triebwerkrädern als eine Function der Umfangsgeschwindigkeit und setzen allgemein:

$$s = f\left(\frac{1}{v}\right).$$

Diese Formel drückt aus, daß die zulässige Spannung in die Formeln für die Festigkeit der Zähne von Triebwerkrädern um so niedriger eingeführt werden soll, je größer die Geschwindigkeit der betreffenden Räder ist. Diese Function ist empirisch näher bestimmt worden zu:

Digitized by Google

$$s = \frac{B}{\sqrt[3]{v}},$$

und die Material-Constante B wird daraus erhalten, indem man für die kleinste hier vorkommende Geschwindigkeit $v = 0{,}5^m$ dieselben Spannungen einführt wie bei Krahnrädern. Es ist also für Eisenzähne:

$$B_e = s_e \sqrt[3]{v} = 4{,}25 \sqrt[3]{0{,}5} = 3{,}37$$

und:

$$s_e = \frac{3{,}37}{\sqrt[3]{v}} \ldots . \quad (101)$$

Die zulässige Belastung der Holzkämme nimmt man nicht größer als 2^k pr. $\square^{mm}$; bei größeren Geschwindigkeiten als $v = 2^m$ aber etwa nur $s_h = 0{,}8\, s_e$.

$$v^m = \frac{r \,.\, \pi \,.\, n}{30 \,.\, 1000}$$

oder angenähert:

$$v^m = 0{,}0001 \,.\, r \,.\, n.$$

Die Breite der Zähne ist eine Function der Umfangskraft und der Umdrehungszahl des Rades — je größer die Zahnbreite ist, je mehr Berührungspunkte also da sind, desto geringer wird die Abnutzung sein — und zwar hat bei zwei verschieden großen Rädern mit gleichartigem Eiseneingriffe das kleinere offenbar an den Zähnen mehr Abnutzung zu erleiden als das große. Nach Reuleaux soll die Breite eines solchen Rades zwischen:

$$0{,}005\, Pn > b > 0{,}002\, P \,.\, n$$

gewählt werden; bei Holz- und Eiseneingriff womöglich größer als $0{,}003\, Pn$. Man wähle die Zahnbreite verhältnißmäßig um so größer, je größer P ist.

Wir könnten zwar nun die für die zulässige Materialspannung (s) und für das Breitenverhältniß (ψ) aufgestellten Formeln mit der allgemeinen Festigkeitsformel (93) verbinden, und wir würden dann entsprechende Specialformeln für die Theilung von Triebwerkrädern erhalten, wie sie bei den Krahnrädern für verschiedene in bezüglichen Aufgaben vorkommende Angaben entstanden. Einestheils bekommen wir hier aber sehr complicirte, und für den Gebrauch unbequeme Ausdrücke, anderntheils ist es nothwendig, daß gerade bei diesem Gegenstande der Constructeur alle einschlagenden Verhältnisse sorgfältig erwäge und die fraglichen Größen den speciellen Einflüssen gemäß calculire. Wir werden also, um dem Constructeur freie Hand zu lassen, im Folgenden die Grundformel (93) für Radzähne nur noch bezüglich der zu übertragenden Kraft P umwandeln und dafür einzeln die Größen setzen, in denen die Kraft als Momenten- oder Arbeitsfactor gewöhnlich gegeben ist; wir führen dabei theils die Zahnbreite (b) direct, theils das Breitenverhältniß (ψ) ein.

Sonach ist die Theilung für Triebwerkräder:

$$t - 16{,}8 \frac{P}{bs} = 4{,}1 \sqrt{\frac{P}{\psi s}} \ldots . \quad (102)$$

oder, indem wir uns auf das Drehmoment $M = Pr$ beziehen:

$$t = 16{,}8 \frac{M}{bsr} = 4{,}1 \sqrt{\frac{M}{\psi s r}} \ldots \quad (103).$$

Digitized by Google

Meistens ist bei Triebwerkrädern das Moment in Pferdestärken (N) und Umdrehungszahlen (n) pr. mint. gegeben, und es wird nach Einführung der Formel (III) pag. 135:

$$t = 12032160 \frac{N}{b s n r} = 3470 \sqrt{\frac{N}{\psi s n r}} \ldots . (104)$$

und, wenn anstatt des Theilkreis-Halbmessers die Zähnezahl bekannt ist:

$$t = 8695 \sqrt{\frac{N}{b s n z}} = 423 \sqrt[3]{\frac{N}{\psi s n z}} \ldots . (105).$$

Diese Formeln gebraucht man nun in der Weise, daß man zuerst die zulässige Belastung nach Frml. (101) berechnet, und diese — beziehentlich von dem berechneten Werthe bei Holzzähnen ($0{,}8 . s_o$), jedenfalls aber da nicht mehr als 2^k pr. $\square^{mm}$ — einführt; die Breite (b) oder das Breitenverhältniß (ψ) werden den speciellen Umständen gemäß und so gewählt, daß sie die oben angegebenen Grenzen nicht überschreiten. Alsdann rechnet man die Theilung aus und erwägt, ob das erhaltene Resultat als passend angesehen werden kann. Eventuell muß man (b) anders wählen, und die Rechnung so oft wiederholen, bis man gute Verhältnisse bekommt. — Auf diese Weise gelangt man am ehesten und besten zu einem richtigen Urtheile über den Einfluß und die Abhängigkeit der einzelnen Größen und lernt bei einiger Uebung und Uebersicht bald richtig calculiren. —

Die Praxis weist verschiedene außergewöhnliche Beispiele auf, in denen die gemachten Angaben und die gefundenen Resultate nicht ohne Weiteres zu benützen sind. So haben wir z. B. bisher immer vorausgesetzt, daß der Widerstand (P) in den durch Zahnräder bewegten Maschinen und Anlagen von annähernd constanter Größe sei; es giebt aber sehr viele Fälle, wo derselbe in mehr oder weniger langen Perioden wechselt und in einer solchen mehr oder weniger verschiedene Größen annimmt. Am deutlichsten erkennt man dies an den Eisen- und Stahl-Walzwerken, wo der Widerstand in dem Augenblicke zu bedeutender Höhe ansteigt, sobald das aus dem Schweißofen kommende Packet zwischen die Walzen gebracht und von diesen erfaßt wird. Die Zähne der Walzenräder werden deshalb sehr stark und breit gemacht. Aehnlich ist es bei Vorlegerädern für den Betrieb von Kolbenpumpen, bei einzelnen Werkzeugmaschinen ꝛc. Hier muß man natürlich immer die ungünstigste Eventualität voraussetzen. —

Wir machten s. Z. einige Angaben über die Minimal-Zähnezahlen und gaben damit einigen Anhalt für die Wahl der Radgrößen. Redtenbacher und Andere gründen die absolute Größe der Radhalbmesser auf gewisse Verhältnisse zwischen dieser Dimension und dem Wellenhalbmesser, unterscheiden dabei selbstverständlich auch Wellen, welche die ganze oder nur einen Theil der Kraft in ein Rad abgeben. v. Reiche giebt darüber folgende Regel: In einem Zahnrädertriebe sollen die Geschwindigkeiten der Zähne nirgends kleiner sein, als diejenige des durch sie bewegten Werkzeuges.

Dabei ist natürlich der Begriff „Werkzeug" ganz allgemein als Angriffspunkt des Widerstandes zu verstehen.

Digitized by Google

Beispiele.

1. Aufgabe. Die Kurbelwelle I, Fig. 204, ist mit der Trommelwelle III so durch ein Räderwerk zu verbinden, daß zwischen dem Angriffspunkte der bewegenden Kraft (P) an der Kurbel und demjenigen der Last (Q) an der Seil- oder Kettentrommel eine Geschwindigkeitsübersetzung von $\frac{1}{\Phi} = 120:1$, also eine Kraftübersetzung von $\Phi = 1:120$ entsteht.

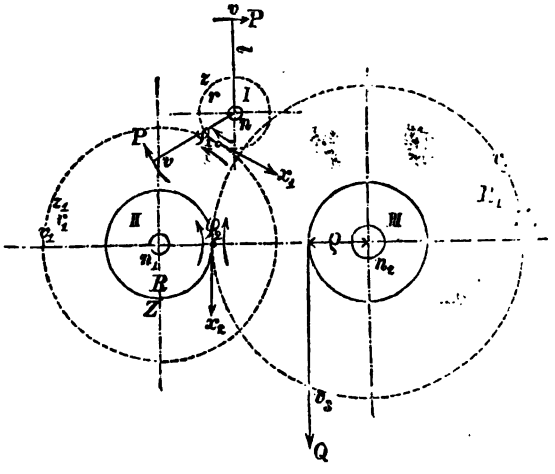


Fig. 204.

An der Kurbelwelle seien zwei Kurbeln von je $l = 400^{mm}$ Länge befestigt; an derselben wirken normal die zwei gleichen Kräfte $P = 10^k$ mit einer Geschwindigkeit von $v = 1^m$ pr. sec. Der Halbmesser der Trommel sei $\varrho = 100^{mm}$. — Wie groß sind die Theilungen der Räderwerke?

Auflösung. Die Gesammtübersetzung ist $\Phi = 1:120$, demnach die Geschwindigkeit v_3, mit welcher die Last Q bei einer Geschwindigkeit $v = 1^m$ der Kraft P gehoben wird:

$$v_3 = \Phi \,.\, v = \frac{1}{120} = 0{,}00833\,..^m,$$

d. h. die Last Q wird in einer Sekunde $8{,}33^{mm}$ oder in einer Stunde:

$$0{,}00833 \,.\, 60 \,.\, 60 = 29{,}88 \sim = 30^m$$

hoch gehoben. — Die Größe der zu hebenden Last beträgt:

$$Q = \frac{1}{\Phi} \cdot 2\,P = 120 \,.\, 20 = 2400^k = 48 \text{ Ctr.}$$

Von dem totalen Umsetzungsverhältnisse $\Phi = 1:120$ kommt ein Theil, nämlich:

$$\varphi = \frac{\varrho}{l} = \frac{100}{444} = \frac{1}{4}$$

auf das Verhältniß des Trommelhalbmessers zur Kurbellänge, und für die Räder bleibt sonach übrig das Verhältniß: $\frac{1}{30}$. Dasselbe können wir durch ein Räderpaar allein nicht ausführen, sondern müssen mindestens deren zwei anlegen, und da empfiehlt es sich $\frac{1}{30}$ zu zerlegen in $\frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$. Wir bekommen also ein Räderpaar mit der Uebersetzung $\varphi_1 = 1:5$ und ein zweites $\varphi_2 = 1:6$.

Da der Halbmesser r des Getriebes für die Welle I auf jeden Fall kleiner wird als $\frac{1}{2} l = 200^{mm}$, so wird auch die Geschwindigkeit im Theilkreis dieses so wie der übrigen Räder kleiner als 0,5 und wir können die Räder als Krahn-

Digitized by Google

räder behandeln. Bei diesen ist eine Uebersetzung von $\varphi_2 = 1:6$ noch vollkommen zulässig.

Um nun die Theilung (t_1) des ersten Räderpaares ($r : r_1$) berechnen zu können, nehmen wir die Zähnezahl des Getriebes (r) an und setzen $z = 15$; Dann wird die Anzahl der Zähne des Rades (r_1):

$$z_1 = \frac{1}{\varphi_1} \cdot z = 15 \,.\, 5 = 75.$$

Nach Forml. (97) pag. 341 ist nun:

$$t_1 = 2{,}36 \sqrt[3]{\frac{M_1}{z}}.$$

Das Moment (M_1) in der Welle I ist aber $M_1 = 2 \,.\, Pl = 2 \,.\, 10 \,.\, 400 = 8000^{kmm}$, folglich:

$$t_1 = 2{,}36 \sqrt[3]{\frac{8000}{15}} = \frac{2{,}36 \,.\, 20}{\sqrt[3]{15}} = \frac{23{,}6}{1{,}233}$$

$$t_1 = 19^{mm}.$$

Die Summe der Halbmesser zweier eingreifenden Räder oder die Centrale derselben bestimmt die Axenentfernung, also die Entfernung der Lagermitten, und dabei ist es immer vortheilhaft, wenn diese Größen abgerundete Maße haben. Wir wollen also hier die Theilung $t_1 = 6 \,.\, \pi$ setzen und bekommen für das erste Räderpaar:

$$t_1 = 6 \,.\, \pi = 18{,}8496 \sim = 18{,}85^{mm}.$$

Die Zahnbreite wird nach unserer Voraussetzung (Frml. 94):

$$b_1 = \psi \, t_1 = 2 \,.\, 18{,}85 = 37 \sim = 40^{mm}.$$

Frml. (81), pag. 303 liefert unn die Halbmesser der Räder zu:

$$r = \frac{z t_1}{2\pi} = \frac{15 \,.\, 18{,}8496}{2\pi} = 45^{mm}$$

$$r_1 = \frac{z_1 \, t_1}{2\pi} = \frac{75 \,.\, 18{,}8496}{2\pi} = \frac{r}{\varphi_1} = 45 \,.\, 5 = 225^{mm}.$$

Der Druck (x_1) in dem Theilkreise von r ist nach dem Hebelgesetze:

$$Pl = x_1 \, r;$$

$$x_1 = \frac{Pl}{r} = \frac{M_1}{r} \frac{8000}{45} = 177{,}77 \ldots^{k}.$$

Derselbe Druck (x_1) findet sich aber auch in dem Theilkreise des Rades r_1, und wir erhalten demnach für die Welle II das Moment:

$$M_2 = x_1 \, r_1 = 177{,}77 \,.\, 225 = 39998 \sim = 40000^{kmm}.$$

Nehmen wir ferner die Zähnezahl (Z) des Getriebes auf der Welle II zu $Z = 20$ an, so wird

$$Z_1 = \frac{Z}{\varphi_2} = 20 \,.\, 6$$

$$Z_1 = 120$$

und die Theilung (t_2) des zweiten Räderpaares ($R : R_1$):

$$t_1 = 2{,}36 \sqrt[3]{\frac{40000}{20}} = 2{,}36 \sqrt[3]{2000}$$

$$t_1 = 2{,}36 \,.\, 12{,}6 = 29{,}736.$$

Digitized by Google

Dafür nehmen wir $t_2 = 10 \cdot \pi = 31{,}416^{mm}$ und es ergiebt sich weiter:

$$R = \frac{Z t_2}{2\pi} = \frac{20 \cdot 31{,}416}{6{,}2832} = 100^{mm}$$

und:

$$R_1 = \frac{Z_1 t_2}{2\pi} = \frac{R}{\varphi_2} = 100 \cdot 6 = 600^{mm}.$$

(Siehe Fig. 1, Bl. 76.)

Die Zahnbreite dieser Räder wird:

$$b_2 = 2 \cdot t_2 = 2 \cdot 31.416 \; b_2 = 62{,}832 \backsim = 65^{mm}.$$

Dasselbe Resultat würden wir bekommen, wenn wir den Zahndruck ($x_2 = P$) im Theilkreise von R oder R_1 ausrechneten und die Theilung (t_2) mittelst der Frml. (95) bestimmten; dann müßte aber der Halbmesser R bekannt oder anstatt dessen Z angenommen sein. Der Druck x_2 ist:

$$x_2 = \frac{x_1 r_1}{R} = \frac{M_2}{R} = \frac{40000}{100} = = 400^k.$$

Schließlich werden die Umdrehungszahlen der drei Wellen sein:

$$v^m = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot n}{60 \cdot 1000}$$

$$n = \frac{30000 \cdot v}{\pi l} = \frac{30000 \cdot 1}{3{,}1416 \cdot 400} = 23{,}87$$

$$n = 24 \text{ pr. mint.}$$

$$n_1 = \varphi_1 \cdot n = \frac{1}{5} \cdot 24 = 4{,}8 \text{ pr. mint.}$$

$$n_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_7 \cdot n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot 24 = \frac{24}{30} = 0{,}8 \text{ pr. mint.}$$

oder genauer und als Probe:

$$n_2 = \frac{30000 \cdot v_3}{\pi \cdot \varrho} = \frac{30000 \cdot 0{,}00833}{3{,}1416 \cdot 100} = 0{,}796. —$$

Die beiden Kurbeln werden je an einem Ende der Kurbelwelle befestigt und — damit die Bewegung (durch zwei Arbeiter) möglichst gleichförmig vor sich gehe — um 90° zu einander versetzt. Die Leistung (L) der bewegenden Kraft (2 P) ist theoretisch:

$$L = (2\,P)\,v = 20 \cdot 1 = 20^{km},$$

und diese muß der Arbeit des Widerstandes (Last) gleich sein, nämlich:

$$L = Q \cdot v_3 = 2400 \cdot 0{,}00833 = 20^{km}.$$

In Wirklichkeit muß die Bewegungsarbeit etwas größer sein als 20 Meter-Kilogr., wenn man eine Last von 2400^k in der Secunde 0,00833^m hoch heben will, weil sich der Zahndruck, die Zapfenreibung der Wellen und die Seil- oder Kettensteifigkeit (des Zugorgans) der Bewegung mit entgegenstellen.

2. Aufgabe.

Für die durch eine Zwillings-Dampfmaschine zu betreibende 30pferdige Wasserhaltung ist ein Rädervorgelege anzuordnen. Die Schwungradwelle der Dampfmaschine macht in der Minute $n = 50$ Umdrehungen und die Uebersetzung der Räder soll $\varphi = \frac{5}{24}$ betragen. — Wie groß ist a) die Theilung eines Krahnräderpaares und b) eines Triebwerkräderpaares mit gemischtem Holz- und Eiseneingriff?

Digitized by Google

Auflösung a) In diesem Falle ist $N = 30$ und $n = 50$. Das Moment:

$$M = 716200 \frac{30}{50} = 429720^{kmm}.$$

Die Zähnezahl des kleinen Rades mit den Eisenzähnen nehmen wir zu $n = 25$ an und haben dann dem großen Holzkamm-Rade $z_1 = 120$ Zähne zu geben.

Nach Frml. (100), pag. 342 erhalten die Räder eine Theilung:

$$t_0 = 2{,}73 \sqrt[3]{\frac{M}{z}} = 2{,}73 \sqrt[3]{\frac{429720}{25}}.$$

$$t_0 = 2{,}73 \,.\, 25{,}8 = 70{,}434,$$

oder abgerundet:

$$t_0 = 70^{mm},$$

und eine Zahnbreite:

$$b = \psi t = 2 \,.\, 70 = 140^{mm}.$$

Die Halbmesser der Räder werden:

$$r = \frac{zt}{2\pi} = \frac{25 \,.\, 70}{2 \,.\, 3{,}141592} = 278{,}521^{mm}.$$

$$r_1 = \frac{z_1 t}{2\pi} \frac{120 \,.\, 70}{6{,}283184} = 1336{,}9^{mm}.$$

Die Uebersetzung

$$\varphi = \frac{5}{24} = 0{,}20833\ldots;$$

dasselbe erhalten wir durch Division der Halbmesser r und r_1:

$$\varphi = \frac{278{,}521}{1336{,}9} = 0{,}20833\ldots;$$

und erkennen dadurch, daß wir richtig gerechnet haben.

Die Geschwindigkeit in den Theilkreisen der beiden Räder ist:

$$v^m = \frac{r\pi n}{30000} \sim = 0{,}0001 \,.\, r \,.\, n$$

$$v = 0{,}0001 \,.\, 278{,}521 \,.\, 50 = 1{,}393^m \text{ pr. sec.}$$

Da die Theilkreis-Geschwindigkeit hier größer ist als $v = 0{,}5^m$, so müssen wir unseren Voraussetzungen gemäß die vorliegenden Räder als Triebwerkräder behandeln und die Theilung derselben nach einer der Formeln (102 ÷ 105) berechnen.

Auflösung b) Die Umfangsgeschwindigkeit fanden wir angenähert zu: $v = 1{,}4^m$. Dem entspricht nach Frml. (101) eine zulässige Belastung der Eisenzähne von:

$$s_e = \frac{3{,}37}{\sqrt[3]{v}} = \frac{3{,}37}{1{,}1187} = 3{,}01,$$

und wenn wir die Holzkämme pr. $\square^{mm}$ des Querschnittes mit $0{,}8\, s_e$ belastet denken, so wäre:

$$s_h = 0{,}8 \,.\, s_e = 0{,}8 \,.\, 3 = 2{,}4^k \text{ pr. } \square^{mm}.$$

Da man jedoch $s_h = 2$ nicht überschreiten soll, so führen wir ein: $s_h = 2^k$.

Das Breitenverhältniß wollen wir versuchsweise annehmen zu $\psi = 2{,}7$, und dann liefert Frml. (105):

Digitized by Google

$$t_0 = 423\sqrt[3]{\frac{N}{\psi s_h n z}} = 423\sqrt[3]{\frac{30}{2{,}7 \,.\, 2 \,.\, 10{,}4 \,.\, 120}}$$

$$t_0 = 69{,}5 \sim = 70^{mm}.$$

Wir bekommen also hier dieselbe Theilung wie unter a), aber dafür wegen der Abnützung eine größere Breite:

$$b = \psi t_0 = 2{,}7 \,.\, 70 = 180 \sim = 190^{mm}.$$

Da jedoch die Geschwindigkeit $v = 1{,}4^m$ noch nicht besonders groß ist und die Holzkammräder ohnedies aus constructiven Rücksichten sehr breit ausfallen, so können wir nöthigenfalls mit $b = 170^{mm}$ ausreichen.

Das gäbe ein Breitenverhältniß $\psi = 2{,}43$, und wenn wir das in obige Frml. (105) einführen und die Theilung nochmals dafür berechnen, so wäre genau:

$$t_0 = 72^{mm} \text{ und } b = 175^{mm}.$$

Der Halbmesser des Eisenrades wiederum:

$$r = \frac{z\,t}{2\pi} = \frac{25 \,.\, 72}{6{,}2832} = 286{,}478^{mm}$$

$$r_1 = \frac{z_1\,t}{2\pi} = \frac{120 \,.\, 72}{6{,}2832} = 1375{,}095^{mm}.$$

Probe:

$$r_1 = \frac{r}{\varphi} = \frac{286{,}478{,}24}{5} = 1375{,}095^{mm}.$$

(Siehe Fig. 2, Bl. 76.)

3. Aufgabe. Zwei Wellen a und b, Fig. 205, welche sich unter einem rechten ($\alpha = 90^0$) Winkel schneiden, sind durch zwei Kegelräder A und B derart miteinander zu verbinden, daß sich die Geschwindigkeiten derselben zu einander wie 2:3 verhalten und $N = 32$ Pferdestärken übertragen werden.

Wie groß ist a) die Theilung der Räder bei gleichartigem Eingriff in Gußeisen und b) die gemischte Theilung; welche Durchmesser bekommen die Räder?

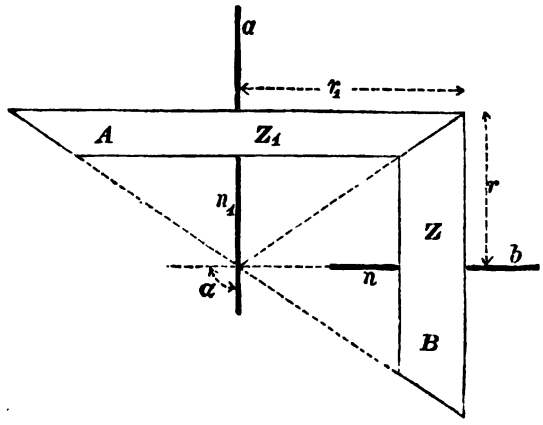


Fig. 205.

Auflösung a) Die Umdrehungen der Welle a zu $n = 80$ pr. mint. festgesetzt, wird, wenn wir vorläufig den Halbmesser des Rades A zu 450^{mm} und ein Breitenverhältniß $\psi = 2{,}2$ annehmen:

$$v^m = 0{,}0001 \,.\, r \,.\, n = 0{,}0001 \,.\, 450 \,.\, 80 = 3{,}6^m.$$

Die zulässige Belastung eines gußeisernen Zahnes also:

$$s_e = \frac{3{,}37}{\sqrt[3]{v}} = \frac{3{,}37}{\sqrt[3]{3{,}6}} = \frac{3{,}37}{1{,}532_6} = 2{,}2.$$

Digitized by Google

Die Zahnbreite angenommen zu $b = \psi t$ 2,2t, ist die Theilung, wenn beiderseits die Zähne von Gußeisen:

$$t = 3470 \sqrt{\frac{N}{\psi s n r}} = 3470 \sqrt{\frac{32}{2{,}2 \,.\, 2{,}2 \,.\, 80 \,.\, 450}}$$

$$t = \frac{3470 \,.\, 2}{\sqrt{21780}} = \frac{6940}{147{,}58} = 47^{mm} \text{ und } b = 103{,}4^{mm}.$$

b) Dagegen wird die gemischte Theilung (Holz auf Eisen), wenn wir $s_h = 0{,}8 \,.\, s_e = 0{,}8 \,.\, 2{,}2 = 1{,}76^k$ pr. $\square^{mm}$ und eine Zahnbreite $b = 120^{mm}$ nehmen:

$$t_0 = 12032160 \frac{N}{b s n r} = 12032160 \frac{32}{120 \,.\, 1{,}76 \,.\, 80 \,.\, 450}$$

$$t_0 = \frac{12002160}{237600} = 50{,}64 \sim = 50^{mm}.$$

Wenn wir nach unserer Grundformel (93a) für gemischte Theilung rechnen, so bekommen wir namentlich bei Triebwerkrädern etwas starke Zähne. Es ist:

$$t_0 = 26{,}25 \frac{P}{b s} = 26{,}25 \,.\, 716200 \frac{N}{b s n r}$$

$$t_0 = 18800250 \,.\, \frac{N}{b s n r}.$$

Die Werthe einsetzt:

$$t_0 = 18800250 \,.\, \frac{32}{120 \,.\, 2{,}2 \,.\, 80 \,.\, 450} = \frac{18800250}{297000}$$

$$t_0 = 63{,}27^{mm}.$$

Damit wir sicher gehen, wollen wir einen Mittelwerth: $t_0 = 56^{mm}$ nehmen, und dann ist:

$$0{,}002 \, Pn = 0{,}002 \,.\, 637 \,.\, 80 = 102,$$

also unsere angenommene Zahnbreite $b = 120$ noch erheblich größer als der Grenzwerth vorschreibt.

Die Zähnezahl des Rades A wird unter diesen Umständen nach Frml. (81):

$$z_1 = \frac{2 r \pi}{t} = \frac{2827{,}44}{56} = 50{,}5.$$

Wir führen nun die Räder so aus, daß das Holzkammrad A $z_1 = 54$ Zähne und das Eisenzahnrad:

$$z = \frac{z_1}{\varphi} = \frac{54 \,.\, 2}{3} = 36$$

Zähne bekommt. Dann können wir nämlich dem großen Rade C und dem kleinen 4 Arme geben, und es fallen beiderseits je 2 Arme 9e Zähne. Für die gefundenen bezhtl. angenommenen Werthe sind nun die Radhalbmesser genau auszurechnen. Es ist:

$$r_1 = \frac{z t_0}{2\pi} = \frac{54 \,.\, 56}{6{,}283184} = 481{,}29^{mm}$$

$$r = \frac{z_1 t_0}{2\pi} = \frac{36 \,.\, 56}{6{,}283184} = 320{,}86^{mm}$$

(Siehe Fig. 1, Bl. 77.)

Digitized by Google

Schraube ohne Ende.

Als letzte Abhandlung für die Transmission durch Zahnräder wollen wir nun noch die Formeln für den Eingriff einer Schraube in ein sogenanntes Schrauben- oder Wurmrad entwickeln.

Diese Art der Rädertransmission wird angewendet, wo es darauf ankommt, eine möglichst große Uebersetzung bei möglichst compendiöser Anordnung herzustellen. Liegen hierbei die beiden zu verbindenden Wellen senkrecht geschränkt zu einander (Fig. 206), und das ist der gewöhnliche Fall, so müssen die Zähne des Schrauben-

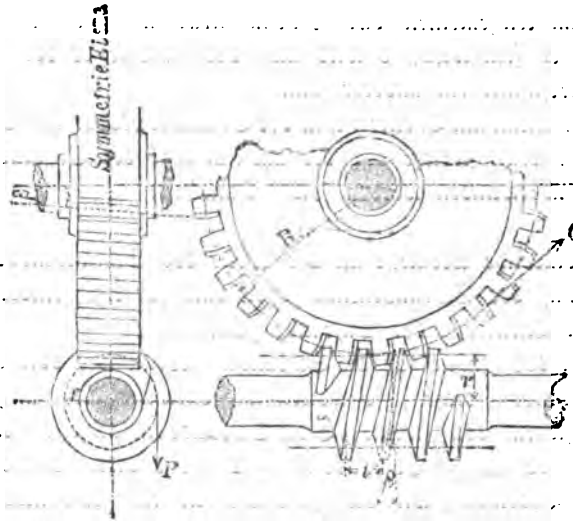


Fig. 206.

rades schief gegen die Cylinderkante stehen. Soll aber ein gewöhnliches Stirnrad mit senkrecht zur Cylinderkante stehenden Zähnen angewendet werden, so müssen die Wellen eine schief geschränkte Lage gegen einander besitzen (Fig. 207).

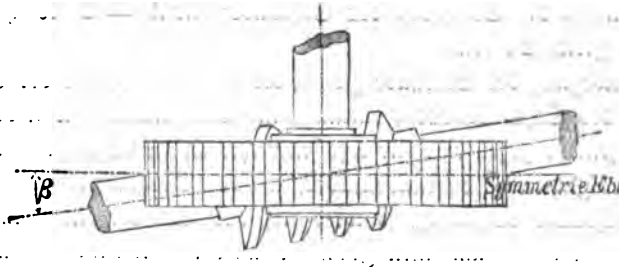


Fig. 207.

Im Folgenden soll stets angenommen werden, daß die Schraube das treibende, das Schraubenrad das getriebene Element sei, und da in den meisten Fällen die Momente der beiden zu verbindenden Wellen gegeben sein werden, so wollen wir auch nur diesen Fall näher in's Auge fassen.

Im Folgenden sei bezeichnet mit:

Digitized by Google

r der Radius der Schraube. Da die Gänge der Schraube Querschnitte erhalten, welche als Zahnprofile ausgeführt sind, so soll hier unter r die Entfernung des Theilkreises dieser Zahnprofile von der Drehaxe verstanden sein.

P sei die am Umfange der Schraube angreifende Kraft und zwar soll auch hier wie früher angenommen werden, daß P im Theilriß des Zahnes angreift. Dann ist das Moment der Schraube:

$$M_1 = Pr.$$

R sei der Halbmesser des Schraubenrandes, ebenfalls gemessen bis zum Theilkreis der Zahnprofile, und zwar für eine Ebene senkrecht zur Axe, welche das Schraubenrad in der halben Breite schneidet, der Symmetrieebene. Da im Allgemeinen das Schraubenrad mit zur Axe convexen Zähnen versehen sein wird, so wird auch der Halbmesser der Theilkreise für jeden Querschnitt ein anderer sein.

Q bedeute die tangential am Theilkreise, in der Symmetrieebene des Schraubenrades wirkende Kraft, welche von der am Umfange der Schraube wirkenden Kraft P überwunden werden soll. Dann ist:

$$M_2 = QR$$

das zu überwindende Moment an der Welle des Schraubenrades.

β sei die Steigung der Schraubenlinie gegen eine zur Axe senkrechte Ebene und zwar am Theilkreise der Schraube gemessen.

Z_1 sei die Anzahl der Zähne für die Schraube. Wenn wir von der Zahnzahl der Schraube sprechen, so wollen wir darunter die Gängigkeit der Schraube verstehen, sodaß, wenn z. B die Schraube eingängig ist, auch $Z = 1$, und für eine zweigängige Schraube $Z_1 = 2$ gesetzt wird. Es hat dann Z_1 ganz dieselbe Bedeutung wie die Zahnzahl für ein gewöhnliches Zahnrad, und kann mit derselben in ganz gleicher Weise operirt werden.

Z_2 die Zahnzahl des Schraubenrades.

t die Theilung, d. h. die Entfernung der Mittellinie zweier aufeinanderfolgender Zähne, gemessen beim Schraubenrade in der Symmetrieebene. Bei der Schraube bezeichnet t ebenso die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Gänge, natürlich $\parallel$ zur Axe gemessen. Es ist dann für $Z = 1$, die Theilung t die Steighöhe der Schraube; für $Z_1 = 2$ jedoch wird die Steighöhe gleich $2t$ sein.

Bei der Bewegung der Schraube gleiten die einzelnen Gänge der Schraube an den Zähnen des Schraubenrades entlang, und wird dadurch, weil die Gänge der Schraube geneigt gegen eine zur Axe senkrechte Ebene liegen, eine langsame Fortschiebung der Zähne des Schraubenrades, also eine Drehung desselben bewirkt. Ist z. B. die Schraube eingängig, so wird sich das Rad bei einer Umdrehung der Schraube am Umfange um einen Zahn fortschieben; hat dann, wie angenommen, das Rad Z_2 Zähne, so darf es Z_2 Umdrehungen der Schraube, um eine ganze Umdrehung des Rades hervorzubringen. Ist die Schraube zweigängig, so wird das Rad am Umfange bei jeder Drehung der Schraube um die Steigung gleich 2 mal der Theilung t, also um 2 Zähne fortgeschoben. Man muß demnach die Schraube $\frac{Z_2}{2}$ Umdrehungen machen lassen, um eine einmalige Drehung des Schraubenrades zu bewirken. Nach Früherem ist das Uebersetzungsverhältniß:

Digitized by Google

$\varphi = \frac{Z_2}{Z_1}$, demnach haben wir hier, wenn beispielsweise $Z_2 = 28$, $Z_1 = 1$ (eingängige Schraube) wäre, $\varphi = \frac{28}{1}\ 28$, also eine sehr große Uebersetzung, wie sie durch gewöhnliche Zahnräder mittelst zweier Räder nur sehr schwierig hergestellt werden kann. Würde jedoch der Mechanismus so ausgeführt, daß $Z_2 = 28, Z_1 = 1$ wäre, so könnte man in Wirklichkeit doch mit einem gewissen Moment M_1 der Schraubenwelle, kein 28mal so großes Moment an der Schraubenradwelle überwinden, sondern es geht ein wesentlicher Theil der aufgewendeten Arbeit auf Ueberwindung der Reibung verloren. Da bei der Bewegung der Schraube die Gänge der letzteren an den Zähnen des Schraubenrades entlang gleiten, so wird dadurch eine viel größere Reibung erzeugt, als bei den gewöhnlichen Zahnrädern, wo das Rollen der Zähne aufeinander den wesentlichsten Theil der Bewegung, das Gleiten oder Schleifen einen nur untergeordneten Theil ausmacht. Es darf demnach auch hier bei Aufstellung der Formeln die Reibung nicht unberücksichtigt gelassen werden.

Um den Zusammenhang zwischen der am Umfange der Schraube wirkenden Kraft P und der am Umfange des Rades zu überwindenden Kraft Q zu bestimmen, können wir folgende Betrachtung anstellen. Wir denken uns einen Cylinder vom Halbmesser r, denjenigen, welchen wir erhalten, wenn wir die

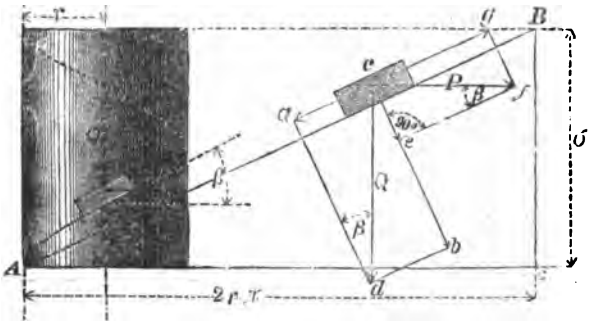


Fig. 208.

Schraube bis auf den Theilkreis abdrehen, auf einer Ebene abgewickelt, so stellt sich die auf diesem Cylinder liegende Schraubenlinie als gerade Linie dar, welche unter einem Winkel β, gegen die Bewegungsrichtung (beim Abrollen) geneigt ist.

In dieser Abwickelung läßt sich die Kraft P auch senkrecht zur Cylinderaxe oder $\parallel$ AC darstellen. Die Kraft Q, welche überwunden werden soll, wirkt aber senkrecht zu P, also auch senkrecht zu AC. Sehen wir vorerst von der Reibung ab, so müssen die $\parallel$ der Richtung AB genommenen Componenten von P und Q einander gleich sein. Es ist dann die Kraft P gerade im Stande, den Widerstand Q in Richtung von AB zu überwinden. Diejenigen Componenten, welche sich $\perp$ zu AB ergeben, bringen nur einen Druck auf die gleitenden Flächen hervor, und bewirken daher die Reibung. Von dieser soll aber, wie wir oben angenommen haben, vorerst abgesehen werden.

Digitized by Google

Sind ca und cg die zu AB ‖ Componenten von P und Q, so muß demnach

$$ca = cg \text{ sein.}$$

Es ist aber $\overset{\frown}{dcb} = \overset{\frown}{fcg} = \overset{\frown}{ABC}$, demnach verhält sich, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke dcb und ABC:

$$AB : BC = Q : ca, \text{ woraus}$$

$$ca = \frac{Q \cdot BC}{AB} \text{ folgt.}$$

Ebenso folgt aus den ähnlichen Dreiecken: ABC und cgf.

$$AB : AC = P : cg \text{ und hieraus}$$

$$cg = \frac{P \cdot AC}{AB}, \text{ demnach muß für den Fall des Gleichgewichts:}$$

$$\frac{Q \cdot BC}{AB} = \frac{P \cdot AC}{AB} \text{ oder}$$

$$P = Q \frac{BC}{AC} = Q \operatorname{tg} \beta \ldots (a)$$

sein, denn es stellt das Verhältniß $\frac{BC}{AC}$ die trigonometrische Tangente des der Seite BC gegenüberliegenden Winkels β dar.

Würden wir die Reibung berücksichtigen, so würden wir erhalten:

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} (\beta + \vartheta) \ldots (b),$$

unter ϑ den Reibungswinkel verstanden. Ist nämlich f der Reibungscoefficient, so kann man diesen Coefficienten der trigonometrischen Tangente eines Winkels ϑ gleich setzen, also

$$f = \operatorname{tg} \vartheta \ldots (c).$$

Es bedeutet dann ϑ denjenigen Winkel, unter welchem eine Ebene gegen den Horizont geneigt sein muß, damit ein auf ihr liegender Gegenstand von selbst zum Gleiten kommt.

Für diejenigen Leser, welche bereits weiter fortgeschritten sind, soll die Formel (b) kurz entwickelt werden. (Siehe vorige Figur.)

Die Kräfte P und Q werden wie vorher in je 2 Componenten, senkrecht und ‖ zu AB, zerlegt. Durch die senkrecht wirkenden Kräfte wird ein Normaldruck, und durch diesen Reibung erzeugt. Da nun die Reibung stets der Bewegung entgegenwirkt, so wirkt dieselbe in Richtung BA, also im gleichen Sinne wie die Componente ac der Kraft Q. Die auf Bewegung wirkende Componente von P muß nun sowohl die Componente ac der Kraft Q, als auch die Reibung überwinden, und muß daher für den Fall des Gleichgewichts:

$cg =$ Reibung $+ ac$ sein. Da nun nach der Mechanik die Reibung gleich dem Normaldruck mal Reibungscoefficienten f (siehe Mechanik) ist, so haben wir:

$$\text{Reibung} = (ce + cb)\, f = (P \sin \beta + Q \cos \beta)\, f;$$

da ferner $cg = P \cos \beta$ und $ca = Q \sin \beta$ ist, so folgt aus obiger Bedingungsgleichung:

$$P \cdot \cos \beta = (P \cdot \sin \beta + Q \cdot \cos \beta)\, f + Q \sin \beta \text{ oder}$$

$$P \cos \beta - f P \sin \beta = f Q \cos \beta + Q \sin \beta, \text{ woraus sich}$$

$$P = \frac{f \cdot Q \cdot \cos \beta + Q \cdot \sin \beta}{\cos \beta - f \sin \beta} \text{ ergiebt.}$$

Setzt man hierin für den Reibungscoefficienten f den Werth aus Formel c, und dividirt ferner Zähler nnd Nenner des ganzen rechtsstehenden Werthes durch cos β, so folgt:

$$P = Q \frac{\operatorname{tg} \cdot \vartheta + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \beta} \text{ oder nach der Goniometrie*):}$$

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} (\beta + \vartheta).$$

*) Siehe Lübsen, Seite 51.

Digitized by Google

Nach der Figur ist die Steighöhe:

$BC = AC \cdot \operatorname{tg}\beta$, und da nun

$AC = 2r\pi$ gleich dem Umfang des Cylinders vom Halbmesser r, so ist: $BC = 2r\pi \operatorname{tg}\beta$.

Macht nun die Schraube n_1 Umdrehungen in der Minute, so ist der Weg eines Punktes am Umfange des Cylinders in derselben Zeit:

$n_1 2r\pi \operatorname{tg}\beta$, daher derjenige in einer Secunde:

$n_1 \frac{2r\pi}{60} \operatorname{tg}\beta$, demnach die Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit in der Entfernung der Einheit von der Axe gemessen:

$$w_1 = \frac{n_1 2r\pi \operatorname{tg}\beta}{60 \cdot r} \quad \ldots \text{(d)}.$$

Bei jeder Umdrehung der Schraube legt ein Punkt im Theilkreis des Schraubenrades einen Weg CB, gleich der Steigung der Schraube zurück, demnach ist der Weg eines solchen Punktes in einer Minute, da während dieser Zeit die Schraube n_1 Umdrehungen vollendet hat:

$n_1 \cdot BC = n_1 2r\pi \operatorname{tg}\beta$, und demnach der Weg in 1 Secunde:

$\frac{n_1 2r\pi \operatorname{tg}\beta}{60}$, mithin die Winkelgeschwindigkeit:

$$w_2 = \frac{n_1 \cdot 2r\pi \operatorname{tg}\beta}{60 \cdot R} \quad \ldots \text{(e)}.$$

Stellt man das Verhältniß der beiden Winkelgeschwindigkeiten zu einander auf, so ergiebt sich aus Formel (d) und (e):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{n_1 \cdot 2r\pi \operatorname{tg}\beta}{60 \cdot r}}{\frac{n_1 \cdot 2r\pi \operatorname{tg}\beta}{60 \cdot R}} = \frac{n_1 \cdot 2r\pi \operatorname{tg}\beta}{60 \cdot r} \cdot \frac{60 \cdot R}{n_1 \cdot 2r \cdot \pi \cdot \operatorname{tg} \cdot \beta} = \frac{R}{r \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

oder

$$\frac{R}{r} = \frac{w_1}{w_2} \operatorname{tg}\beta \quad \ldots \text{(f)}.$$

Da sich nun die Winkelgeschwindigkeiten, wie die Umdrehungszahlen, letztere aber umgekehrt wie die Zahnzahlen verhalten, so ergiebt sich aus (f):

$$\frac{R}{r} = \frac{n_1}{n_2} \operatorname{tg}\beta = \frac{Z_2}{Z_1} \operatorname{tg}\beta \quad \ldots \text{(g)}.$$

Da das Moment der Schraubenwelle

$M_1 = Pr$ und das Moment an der Welle des Schraubenrades $M_2 = QR$ ist, so ergiebt sich das Verhältniß beider:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{QR}{Pr} \quad \ldots \text{(h)}.$$

Setzt man hierin für das Verhältniß $\frac{R}{r}$ den obigen Werth aus Formel g, so ergiebt sich:

$\frac{M_2}{M_1} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \operatorname{tg}\beta$. In dieser Gleichung den Werth des Verhältnisses $\frac{Q}{P}$ aus Formel (b) eingeführt, ergiebt:

Digitized by Google

$\frac{M_2}{M_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\vartheta)}$. Der Einfachheit wegen soll $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\vartheta)} = \eta$ gesetzt werden. Dann erhält man

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{Z_2}{Z_1}\eta \quad \ldots \quad (i)$$

Sehen wir von der Reibung ab, so können wir nach Frml. (a) eine Last (welche zum Unterschiede von der wirklich gehobenen Last Q mit Q_a bezeichnet werden soll)

$Q_a = \frac{P}{\operatorname{tg}\beta}$ am Umfange des Schraubenrades überwinden.

Nach Frml. (b) läßt sich aber wirklich nur eine Last

$Q = \frac{P}{\operatorname{tg}(\beta+\vartheta)}$ überwinden, demnach das Verhältniß beider zu einander, der sogenannte Nutzeffect des Mechanismus:

wirklich überwundene Last zu derjenigen, welche überwunden würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre $= \frac{Q}{Q_a} = \frac{\frac{P}{\operatorname{tg}(\beta+\vartheta)}}{\frac{P}{\operatorname{tg}\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\vartheta)} = \eta$.

Um demjenigen der Leser, welcher mit dem Aufschlagen der trigonometrischen Functionen noch nicht bewandert ist, die Anwendung obiger Formeln möglich zu machen, soll hier eine Tabelle, welche die gebräuchlichsten Neigungen der Schraubenlinie enthält, hinzugefügt werden, und sind für dieselbe die oben vorkommenden trigonometrischen Werthe berechnet.

Bei Aufstellung der Tabelle ist angenommen, daß der Reibungscoefficient $f = 0{,}15$ ist, entsprechend einem Reibungswinkel $\vartheta = 8\frac{1}{2}^0$. Diese Annahme entspricht dem Gleiten von Gußeisen auf Gußeisen, wird aber auch den Fall charakterisiren können, daß die Schraube aus Schmiedeisen, das Schraubenrad aber aus Gußeisen gearbeitet ist. Die Reibungscoefficienten unterscheiden sich in beiden Fällen nur wenig, und ist um so mehr eine gleiche Annahme für beide Fälle zu rechtfertigen, als doch nie der Zustand der reibenden Flächen a priori genau bekannt ist. Eine kleine Aenderung in Bezug auf Schmierung der Flächen hat schon einen sehr großen Einfluß auf die Größe des Coefficienten f.

$\operatorname{tg}\beta$	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
β	2°52′	3°26′	4°34′	5°43′	6°51′	7°58′	9°5′	10°12′	11°19′	14°2′	16°42′	19°17′	21°48′
$\operatorname{tg}(\beta+\vartheta)$	0,198	0,208	0,227	0,246	0,275	0,296	0,317	0,339	0,360	0,414	0,470	0,528	0,585
$\frac{1}{\eta}$	3,96	3,53	2,90	2,54	2,27	2,11	2,98	1,87	1,80	1,66	1,57	1,50	1,46
η	0,25	0,28	0,34	0,39	0,44	0,47	0,50	0,53	0,55	0,60	0,64	0,66	0,68

Diese Tabelle zeigt, daß solange die Neigung der Schraubenlinie sehr klein ist, auch der Nutzeffect η sehr klein bleibt, daß also dann ein sehr großer Theil der Arbeit zur Ueberwindung der Reibung aufgewendet werden muß. Mit wachsender Steigung nimmt auch der Nutzeffect zu.

Digitized by Google

Setzt man in Frml. (g) für das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ den Werth aus Frml. (b) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{R}{r} \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta + \vartheta)}$$

oder

$$\frac{R}{r} = \frac{M_2}{M_1} \operatorname{tg}(\beta + \vartheta) \quad . \quad . \quad (f).$$

Zur Berechnung der Theilung t können hier dieselben Formeln benutzt werden, wie sie für gewöhnliche Stirnräder, unter Zugrundelegung eines Breitenverhältnisses, $\psi = \frac{b}{t} = 2$ berechnet wurden.

Trotzdem hier in vielen Fällen die Schraube aus Schmiedeeisen gefertigt ist, und dieselbe in Folge dessen auch wohl eine geringere Zahnstärke am Theilkreise erhalten dürfte, werden dennoch sowohl das gußeiserne Schraubenrad und die schmiedeiserne Schraube mit gleicher Zahnstärke s_0 ausgeführt. Dieses ist um so mehr gerechtfertigt, als durch die Reibung die Zähne eine sehr große Abnutzung erfahren, und eine Erneuerung der Schraube der schwierigen Herstellung wegen sehr kostspielig sein würde.

Aufgabe.

Zur Fortbewegung eines Laufkrahngerüstes soll eine Uebersetzung durch eine Schraube ohne Ende und ein Schraubenrad construirt werden. Die am Umfange des Laufrades wirkende, zur Fortbewegung des Laufkrahnes nöthige Kraft, sei 750 Kilogr. Das Laufrad selbst habe einen Radius von 200 mm. Die Ueberführung der Kraft von der horizontalen Kurbelwelle auf die geneigte Schraubenwelle sei durch 2 gleich große conische Räder hergestellt. Die zur Fortbewegung disponible Kraft sei durch 2 Arbeiter erzeugt, welche mit je $12\frac{1}{2}$ Kilogr. auf eine 400 mm lange Handkurbel wirken. Welche Zahnzahl muß das Schraubenrad haben, und wie groß sind die Halbmesser der Schraube und des Schraubenrades zu nehmen, wenn die Schraube eingängig und die Neigung derselben $\operatorname{tg}\beta = 0{,}12$ (entsprechend einem Neigungswinkel $6\,^0 51'$) genommen werden soll?

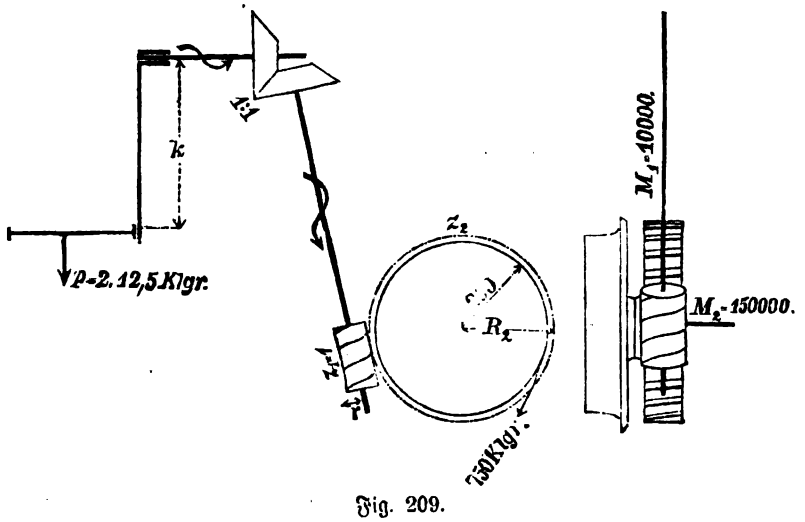


Fig. 209.

Digitized by Google

Auflösung. Da die Ueberſetzung der coniſchen Räder gleich 1 ſein ſoll, ſo iſt das Moment der Schraubenwelle gleich demjenigen der horizontalen Kurbelwelle, demnach iſt

$$M_1 = k \,.\, p = 400 \,.\, 2 \,.\, 12{,}5 = 10000^{kmm}.$$

Das Moment der Laufradwelle ergiebt ſich aus dem Produkt der Kraft 750 Kilogr. am Hebelarm von 200^{mm}, und haben wir daher daſſelbe:

$$M_2 = 200 \,.\, 750 = 150000^{kmm}.$$

Nach der Tabelle iſt für $tg\,\beta = 0{,}12$

$$\frac{1}{\eta} = 2{,}27 \text{ und } \eta - 0{,}44.$$

Da die Zahnzahl $Z_1 = 1$ (eingängige Schraube) bekannt iſt, ſo können wir aus Frml. (i) die Zahnzahl des Schraubenrades beſtimmen, dieſelbe ergiebt ſich:

$$Z_2 = \frac{M_2}{M_1} Z_1 \,.\, \frac{1}{\eta} = \frac{150000}{10000} \,.\, 1 \,.\, 2{,}27 = 34{,}05,$$

wofür $Z_2 = 34$ geſetzt werden ſoll.

Für das Schraubenrad iſt nun die Zahnzahl Z_2 und das Moment M_2 bekannt und kann daher die Theilung nach Frml. (97) (Seite 341) berechnet werden. Dieſelbe beſtimmt ſich:

$$t = 2{,}36 \sqrt[3]{\frac{M_2}{Z_2}} = 2{,}36 \sqrt[3]{\frac{150000}{34}} = 38{,}704^{mm}.$$

Da es ſtets vortheilhaft iſt, die Theilung auf ein rundes Maß abzurunden, ſo wollen wir auch hier $t = 40^{mm}$. annehmen. Nach der Frml. 81 (Seite 303) finden wir mit dieſer Theilung den Halbmeſſer des Schraubenrades:

$$R = \frac{Z_2 t}{2\pi} = \frac{34 \,.\, 40}{2 \,.\, 3{,}14} = 216{,}6^{mm}.$$

Mit dieſem berechneten Werthe von R läßt ſich nun unter Zuhülfenahme der Frml. (g) (Seite 353) der Halbmeſſer r der Schraube beſtimmen, und ergiebt ſich dieſelbe:

$$r = R \frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{tg\,\beta} = 216{,}6 \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{0{,}12} = 53{,}1^{mm}.$$

Für das Schraubenrad als auch für die Schraube folgt die Zahnſtärke nach Frml. (87) (Seite 306).

$$s = 0{,}485\,t - 0{,}5 = 0{,}425 \,.\, 40 - 0{,}5 = 18{,}9^{mm},$$

und die Breite des Schraubenrades:

$$b = 2t = 2 \,.\, 40 = 80^{mm}.$$

Verhältniſſe und Conſtruction des Radkörpers.

Sind nach den obigen Angaben der Halbmeſſer des Rades, die Anzahl der Zähne und die Theilung beſtimmt, ſo können wir, nachdem wir uns noch über die Art der Verzahnung in jedem einzelnen Falle entſchieden haben, zur Verzeichnung des Rades übergehen. Zur vollſtändigen Conſtruction deſſelben gehören aber noch 3 Theile, nämlich die Abmeſſungen des Kranzes, welcher die Zähne unter ſich zu einem Ganzen verbindet, der Nabe, welche die Welle

Digitized by Google

umschließt und endlich der Radarme, welche die Verbindung zwischen diesen beiden Constructionstheilen vermittelt.

Was die Stärke des Radkranzes betrifft, so ist darüber schon in einem früheren Abschnitte unter Frml. 91, pag. 306, Verfügung getroffen, wir hatten angenommen:

$$s_1 = 4 + 0{,}8\,\frac{t^2}{6}$$

und zwar gilt diese Dimension nur für Räder mit Eisenzähnen. Um das Rad formen zu können, verstärkt man denselben von der Seite des Rades nach der Hauptrippe des Rades hin, unter einer Neigung von 1:20. Der Radkranz erhält stets einen innen herumlaufenden Versteifungsnerv, dessen Lage in Bezug auf ersteren von dem Querschnitt der Arme abhängt. Für den Fall, daß die Arme einen kreuzförmigen Querschnitt erhalten, liegt der Nerv in der Mitte des Rades (siehe Fig. 1ª, Bl. LXXVI), während wenn die Arme einen ⊤ Querschnitt haben, der Nerv an die Seite des Rades gelegt wird. Die Stärke des Versteifungsringes wollen wir

$$s_2 = h_1 \ldots (106)$$

nehmen, wo h_1 die Stärke der Hauptrippe des Armes ist, welche Dimension später noch näher bestimmt werden soll. Die Höhe derselben machen wir

$$s_3 = s_1 \ldots (107).$$

Diese Dimensionen des Radkranzes gelten sowohl für Stirn- als auch für conische Räder, nur mit dem Unterschied, daß bei letzteren die Stärke des Radkranzes s_1 an der der Spitze des Grundkegels zugekehrten Seite des Rades, senkrecht zur Mittellinie des Zahnes aufgetragen wird. Die Dimension an der, der Kegelspitze abgewandten Seite, findet man durch Construction, indem die langen Seiten des Querschnitts sämmtlich in der Spitze des Kegels zusammenlaufen. Bei kleinen conischen Rädern fällt häufig der Versteifungsnerv fort, während er bei größeren Rädern stets angewandt zu werden pflegt, um namentlich die Arme gut an den Radkranz ansetzen zu können.

Bei Schraubenrädern wird der Radkranz auf sehr verschiedene Weise ausgeführt. Je nachdem die Arbeit eine mehr oder weniger genaue ist, wird auch die unvermeidliche Abnutzung eine minder oder mehr große sein. Am einfachsten stellt sich der Kranz, wenn die Zähne einfach schräge auf dem Radkranz liegen (siehe Fig. 1ᵇ, Bl. LXXVIII.) Der Radkranz erhält dann dieselben Dimensionen und dieselbe Form wie ein gewöhnliches Stirnrad. Die Zähne der Schraube liegen aber dann im Anfang nur an einem Punkte an, und bekommen erst mit der Zeit durch die Abnutzung eine größere Auflagefläche. Besser und genauer wird die Anordnung, wenn die Zahnflanken selbst nach Form eines Schraubenmuttergewindes gebildet sind (s. Fig. 1ª, Bl. LXXVIII). Die Kranzstärke und -Breite bleibt auch in diesem Falle dieselbe wie oben angegeben, nur wird die Form in der Art eine andere, als die langen Seiten des Querschnitts nicht durch zur Axe des Rades ‖ Linien, sondern durch Kreise begrenzt sind, deren Mittelpunkte mit demjenigen der Schraube zusammenfallen. Da die Ecken der Zähne doch nur selten zum Eingriff kommen, werden dieselben in der Regel an der Seite durch eine vom Grunde der Zähne an gegen die Schraubenaxe gerichtete Linie abgeschrägt. Auf die Herstellung dieser Art Räder kommen wir noch später zurück.

Digitized by Google

Bei kleinen Stirnrädern mit cykliſchen Curven, deren Zahnfußbegrenzungen radial ausgeführt ſind, erhält der Zahn am Radkranze ſehr ſchwache Dimenſionen. Um die Wurzeln zu verſtärken, erhält dann das Rad an einer oder an beiden Seiten eine Verſtärkungsſcheibe, deren Stärke wir auf

$$s_4 = {}^3/_4\, s_1 \ldots . \quad (108)$$

feſtſetzen wollen. Die Scheibe reicht entweder nur bis zum Theilkreis oder auch bis zur Begrenzung des Zahnes.

Der Kranz für Räder mit hölzernen Zähnen wird mit Lücken verſehen, in welche die hölzernen Zähne eingetrieben werden. Derjenige Theil der Zähne, welcher in dieſe Lücken hineingetrieben wird, heißt Kammſtiel, und wird derſelbe um das Hineintreiben zu begrenzen, etwas ſchwächer als der Zahn ſelbſt gemacht. Die Endflächen AB des Stieles ſind ‖ (Fig. 2, Bl. LXXVI), während die Breitenflächen ſich mit einer Neigung von 1 : 20 gegen das Ende hin verjüngen. Da dieſe Stiele feſt in den Kranz hineingeſchlagen werden, muß derſelbe genügend feſt ſein. Wir erhalten gute Verhältniſſe, wenn wir nehmen: die Dicke des Kranzes

$$s'_1 = 2 s_1 \ldots . \quad (109)$$

und die Wanddicke: $s'_2 = s_1 \ldots . \quad (110).$

Die Breite des Kranzes für Räder mit Eiſenzähnen wird ſtets gleich derjenigen der Zähne b gewonnen, während ſich dieſelbe bei Rädern mit Holzzähnen aus der Breite der Stiellücke und der Wanddicke zuſammenſetzt. Macht man den Anſatz am Kammſtiel $a = {}^1/_4 s_1 \ldots (111)$,
ſo ergiebt ſich die Breite der Stiellücke

$$b_2 = b - . {}^1/_4\, s_1, \quad \text{und demnach die Breite des}$$

Kranzes: $b_1 = b - {}^1/_2\, s_1 + 2 s_1 = b + 1{,}5\, s_1 \ldots (122).$

Die Holzzähne erhalten, wie ſchon oben angedeutet, Anſätze, ſogenannte Brüſtungen, und zwar ſtets an den Endflächen, während dieſelben bei den Breitenflächen nur dann angeordnet werden, wenn der Zahn am Radkranz eine größere Stärke erhält als am Theilkreis. Die Eiſenſtärke zwiſchen je 2 Lücken wollen wir $s'_3 = {}^1/_2\, t_0 \ldots (113)$
annehmen.

Bei Kegelrädern mit Holzzähnen unterſcheidet ſich der Kranz nur durch ſeine Grundform. Die diesbezüglichen Dimenſionen können wir nach den oben angegebenen Werthen $s_1' s_2' s_3'$ ebenfalls berechnen, nur werden auch hier die Stärken ſtets an der der Spitze des Kegels zugekehrten Seite des Rades aufgetragen.

Den Holzzahn läßt man um die Länge s_1 unterhalb des Kranzes vorſtehen, und verſichert ihn, um das Lockern zu verhüten, durch einen, in Richtung der Mittellinie des Zahnes hindurchgeſteckten ſchmiedeiſernen Stift, welcher die Stärke

$$n = {}^1/_5\, s_1 \ldots . \quad (114)$$

erhält. Iſt der Zahn ſo ſchwach, daß man ein Aufſpleißen deſſelben beim Durchbohren befürchtet, ſo werden auch wohl die Zwiſchenräume zwiſchen den Enden der Stiele dnrch Holz verkeilt. Der Keil erhält hierbei vortheilhaft eine Seitenneigung von 1 : 8.

Zähne von größerer Breite als 200 mm ſollten nicht mehr aus einem Stück, ſondern zweitheilig hergeſtellt werden. Es erhält dann der Kranz 2 in Richtung der Zahnaxen nebeneinander liegende Stiellöcher, welche durch einen Mittelſteg von der Stärke

Digitized by Google

$$s'_4 = \frac{s_1}{2} \quad \ldots \quad (115)$$

von einander getrennt sind.

Die Arme haben den Zweck, die am Umfange empfangene Kraft auf die Welle oder das in der Welle vorhandene Moment in den Umfang des Rades zu überführen; ferner sollen aber auch die Arme den Radkranz an mehreren Stellen unterstützen, um das Unrundwerden beim Gießen desselben zu verhindern. Den ersteren Zweck erreicht man durch jede beliebige Anzahl Arme, und wird daher der zweite Zweck der maßgebendste sein. Der Radkranz ist nach Reuleaux genügend unterstützt, wenn die Anzahl der Arme:

$$A = {}^{1}/_{4}\sqrt[4]{t}\,\sqrt{Z} \quad \ldots \quad (116)$$

(abgerundet auf eine ganze Zahl) beträgt.

Fällt die Anzahl der Arme zwischen 3 und 6, so wird diese Zahl als Armzahl gewählt, während wenn A über 6 ausfällt, die Armzahl auf eine gerade Zahl abgerundet wird.

Giebt jedoch diese Formel Werthe unter 3, so werden gar keine Arme ausgeführt, sondern das Rad wird als Scheibenrad oder als Blockrad geformt. Unter Scheibenrad versteht man ein solches Rad, bei welchem die Verbindung von Kranz und Nabe durch eine volle Scheibe hergestellt ist (siehe Fig. 1ª, Bl. LXXVI); deren Stärke

$$s_5 = 1{,}25\, s_1 \quad \ldots \quad (117)$$

zu nehmen ist.

Wird das Rad noch kleiner, so daß zwischen Nabe und Radkranz nur ein sehr kleiner Zwischenraum bleibt, so wird auch die Scheibe fortgelassen, indem der ganze Raum zwischen Nabe und Kranz vollgegossen wird. Ein solches Rad heißt Blockrad. Die Armzahl für Räder mit hölzernen Zähnen muß so gewählt werden, daß dieselbe in die Zahnzahl aufgeht, und zwar aus dem Grunde, damit die Nebenrippe des Armes zur besseren und leichteren Befestignng der Holzkämme stets zwischen zwei aufeinanderfolgende Zähne fällt.

Zur Berechnung des Armquerschnitts wollen wir, analog wie bei den Riemenscheiben (s. pag. 257) den Arm als einen an dem einen Ende eingeklemmten Träger ansehen, welcher am freien Ende durch eine Kraft P_1 angegriffen wird. Da jedoch der Radkranz hier viel stärker als dort gewählt ist, so wollen wir auch annehmen, daß dieser Radkranz die am Umfange der Räder wirkende Kraft P auf alle Arme gleichmäßig überträgt, so daß jeder der Arme am Ende belastet ist durch eine Kraft $P_1 = \frac{P}{A}$.

Die Grundformel 16, pag. 48, heißt:

$$Pl = q\,s, \text{ oder für diesen Fall da } l = R, \text{ und } P = P_1$$

gesetzt ist:

$$P_1 R = \frac{P}{A} R = q\,s.$$

In Wirklichkeit ist der Querschnitt des Armes kreuz- oder T-förmig und wir müßten eigentlich für q den Querschnittmodulus des kreuz- oder T-förmigen Profiles einsetzen. Da aber die $\perp$ zur Symetrieebene stehende Rippe fast ganz in die Nähe der neutralen Axe fällt, so kann sie auch nur ein sehr

Digitized by Google

kleines Biegungsmoment aushalten und hat dieselbe vielmehr nur den Zweck, die Arme sowie das ganze Rad gegen seitliche Schwankungen zu versteifen. Wir wollen für q auch nur den Werth für den Querschnitt der Hauptrippe, also für ein Rechteck einsetzen. Die ∥ der Symmetrieebene an der Axe gemessene Dimension des Armes — die sogenannte Höhe — sei bezeichnet mit h, die senkrecht zu dieser gemessene Dimension — die Dicke — sei mit h_1 bezeichnet, so kann nach Reuleaux genommen werden:

$$h_1 = {}^1/_6\, h + 4^{mm} \ldots . \quad (118)$$

und ist demnach:

$$q = {}^1/_6\, h_1\, h^2.$$

Würde man hierin für h_1 den obigen Werth setzen, so würden wir auf eine Gleichung dritten Grades stoßen, um diese zu umgehen, soll $h_1 = {}^1/_6\, h$ eingeführt werden; hiermit ergiebt sich dann:

$$q = \tfrac{1}{36}\, h^3,$$

$$\frac{P}{A} R = \tfrac{1}{35}\, h^3 s.$$

Um sowohl Zähne als auch Arme mit gleicher Festigkeit zu construiren, nehmen wir Frml. 93, pag. 340, zu Hülfe, welche heißt:

$$bt = 16{,}8 \frac{P}{s}.$$

Entwickelt man aus den beiden letzten Formeln die Anspannung s und setzt dieselben einander gleich, so erhält man:

$$s = \frac{16{,}8P}{bt} = 36 \frac{P}{A} \cdot \frac{R}{h^3}.$$

Führen wir in den ersten Werth das Breitenverhältniß $\psi = \frac{b}{t}$ ein, und dividiren die ganze Gleichung P, so ergiebt sich:

$$\frac{16{,}8}{\psi t^2} = \frac{36R}{A.h^3}, \text{ woraus wir}$$

$$h^3 = \frac{36R}{A} \cdot \frac{\psi t^2}{16{,}8} \text{ oder da } R = \frac{Zt}{2\pi} \text{ ist:}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{36}{2 \,.\, \pi \,.\, 16{,}8}\, t^3} \sqrt[3]{\frac{\psi Z}{A}} \text{ und}$$

$$h = 0{,}71\, t \,.\, \sqrt[3]{\frac{\psi Z}{A}} \text{ finden. Dieser Werth von h soll auf}$$

$$h = {}^3/_4\, t \sqrt[3]{\frac{\psi Z}{A}} \ldots . \quad (119) \text{ abgerundet werden.}$$

Für Räder mit Holzzähnen hätten wir unter ganz gleichen Voraussetzungen statt der Formel 93 die Formel 93a, pag. 340, nämlich $bt_0 = 26{,}25 \frac{P}{s_0}$ einführen müssen. Wenn wir dieses thun und entwickeln die Formeln auf gleiche Weise, so werden für für Räder mit Holzzähnen:

$$h = 0{,}6\, t_0 \sqrt[3]{\frac{\psi Z}{A}} \ldots . \quad (119^a) \text{ erhalten.}$$

Digitized by Google

Gegen den Radkranz hin verjüngt sich die Höhe der Arme auf

$$h' = {}^3/_4\, h \ldots (120),$$

während die Dicke h_1 unverändert beibehalten wird.

Die Nebenrippe erhält eine constante Stärke

$$h_2 = 0{,}75\, h_1 \ldots (121).$$

Dieselbe verjüngt sich jedoch des Formens wegen von der Hauptrippe nach dem Rande hin mit einer Neigung von 1 : 30. Die Höhe der Nebenrippe ist, da nicht in die Rechnung eingeführt, ganz beliebig. Um jedoch derselben auch ein gutes Aussehen zu geben, wird sie an der Nabe gleich der Kranzbreite b_1 genommen, gegen den Kranz hin nimmt sie dann auf $0{,}8\, b_1$ ab. Sowohl an den Kranz als auch an der Nabe schließt sie sich mit Kreisbögen an. Bei Kegelrädern kann an der Nabe dasselbe Maß für die Höhe gewählt werden; am Kranz jedoch muß man sich an die Form des Grundkegels halten, und können wir deshalb auch kein genaueres Maß darüber angeben.

Die Dimensionen der Nabe, desjenigen Theiles des Rades, welcher die Welle umfaßt, und so die letztere mit dem Rade verbindet, müssen empirisch gewählt werden. Mit der Welle verbunden ist die Nabe durch einen, oder bei sehr großen Rädern auch zwei oder mehrere Keile. Die Nabe erhält eine Bohrung, welche genau dem Durchmesser der Welle entspricht. Nur bei sehr großen Rädern geht man hiervon ab, indem bei diesen die Nabe nur an den äußern Seiten eine dem obigen entsprechende Bohrung erhält, während die Ausbohrung in der Mitte durch einen extra geformten eingelegten Kern bereits im Guß weiter ausgehöhlt ist (siehe Fig. 2, Bl. LXXVI); diese Anordnung wird nur deshalb getroffen, um die Bearbeitung, also hier das Ausbohren auf ein möglichstes Minimum zu beschränken.

Die Nabe wird stets cylinderförmig gebildet, und erhält dieselbe eine Länge

$$\lambda = b_1 + 0{,}05\, R \ldots (122),$$

unter b_1 die Kranzbreite des Rades verstanden. Ferner erhält sie eine Minimalstärke $\delta = 0{,}4\, d_1 + 10 \ldots (123)$,

wenn d_1 der Durchmesser der Welle an derjenigen Stelle ist, wo das Rad aufgekeilt wird.

Die Keilnut in derselben erhält wie früher eine Breite

$$K = 5 + 0{,}28\, d_1 \ldots (124).$$

Die Welle wird in den meisten Fällen, mit Ausnahme da, wo das Zahnrad ein Zwischenrad ist, nämlich ein solches Rad, welches die am Umfange empfangene Kraft direct auf ein anderes überträgt, ohne erst dieselbe auf die Welle zu überführen, nicht nur auf Torsion, sondern auch durch das Gewicht und den Zahndruck auf Biegung in Anspruch genommen werden, und hätten wir nach Frml. 50, pag. 144 das ideelle Moment zu bestimmen, dann aus diesem die Stärke der Welle zu berechnen. Da nun aber das Gewicht des Rades von vornherein nicht bekannt und auch der Zahndruck nicht leicht genau bestimmt werden kann, so thun wir gut, zur Berechnung der Wellenstärke die Frml. 46ª resp. 46ᵇ, pag. 136 zu benutzen, indem wir, um die Beanspruchung auf Biegung zu berücksichtigen, den vor der Wurzel stehenden Factor etwas größer nehmen. Wir wollen setzen die Stärke der Welle (für Schmiedeisen):

Digitized by Google

$$d = 1{,}36 \sqrt[3]{PR} \ldots (125)$$

oder durch HP und Umdrehungszahlen n pro Minute ausgedrückt:

$$d = 120 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (125^a)$$

Haben die Wellen, wie gewöhnlich bei conischen Rädern (s. Tafel 1, Fig. LXXVII), einfache Tragzapfen, so würden diese, da der Druck in der Regel nur ziemlich klein ist, nach den früheren Formeln für Tragzapfen berechnet, Dimensionen erhalten, welche stark genug wären dem Drucke zu widerstehen; da aber die Räder auch Stößen ausgesetzt sein können, und durch das Eingreifen der Zähne im ganzen Mechanismus Vibrationen entstehen, so ist es vortheilhaft, dem Zapfen und damit auch dem Lager mehr Stabilität zu verleihen. Gewöhnlich werden bei derartigen Zapfen die Stärken derselben in Bezug auf die zugehörige Welle bemessen, und wollen auch wir daher den Durchmesser der Tragzapfen

$$d_1 = 0{,}7\, d \ldots . (126)$$

nehmen.

Die Wellen der Schrauben erhalten obige Stärke d nur in den Lagerhälsen, die Welle selbst wird dann noch durchweg um die früher bestimmte Dimension 2s (Frml. 1, pag. 89) verstärkt. Daher ist der Durchmesser der Schraubenwelle selbst (nach Frml. 2, pag. 89):

$$d'' = d + 2s = 5 + 1{,}1\, d.$$

In Bezug auf die Schraubenräder und die Triebschraube ist noch Folgendes hinzuzufügen: Schmiedeiserne Schrauben werden in der Regel stets mit der Welle aus einem Stück hergestellt, während gußeiserne Schrauben auf ihre Wellen aufgekeilt werden. Da aber die Schraube in Richtung der Axe stark beansprucht wird, müssen Vorkehrungen getroffen werden, um das Abschieben der gußeisernen Schraube von ihrer Welle zu verhindern. Man läßt die Schraube sich daher in Richtung des Druckes gegen einen auf die Welle gesetzten Bund stützen, wohingegen auf der entgegengesetzten Seite, nach welcher der Druck bei einer Bewegung im entgegengesetzten Sinne wirken würde, ein Stellring angebracht wird. Dieser Ring soll eine Stärke:

$$\delta_1 = 5 + \tfrac{1}{3} d \ldots (127)$$

und eine Breite:

$$\Delta = 2\,\delta_1 \ldots\ldots (128)$$

erhalten. Die Stärke der Stellschraube, durch welche der Ring festgehalten wird, wollen wir

$$d = 0{,}7\,\delta_1 \ldots\ldots (129)$$

annehmen.

Größere Räder werden aus mehreren Stücken gebildet; hier könnte nur wiederholt werden, was bereits bei den Riemenscheiben pag. 261 gesagt worden ist. Hinzuzufügen ist nur noch, daß, wenn der Radkranz selbst aus mehreren Stücken gebildet werden soll, kein Zahn durchschnitten werden darf, sondern die Schnittfuge stets zwischen 2 Zähnen liegen muß. Auch was die Theilung der Nabe, Fig. 2, Bl. LXXVI, betrifft, so ist darüber schon an oben gedachter Stelle das Nöthige gesagt und auch die Maße für den aufgezogenen Ring angegeben worden.

Digitized by Google

Herstellung der Räderzähne.

Schon bei Aufstellung der Formeln für die Dimensionen der Radzähne hatten wir zweierlei Material vorausgesetzt, nämlich Gußeisen und Holz. Die Vor- und Nachtheile der einen oder anderen Verzahnungsart sind folgende:

Gußeiserne Zähne sind mit dem Radkörper aus einem Stück, können deshalb wohl abbrechen, sich aber nicht lockern; ferner werden diese Art Zähne, weil aus hartem Material, nur sehr langsam deformirt, und gewähren daher sehr lange einen ruhigen richtigen Gang. Selbst für sehr kleine Räder können eiserne Zähne angewendet werden, und thut man dieses um so mehr, da bei kleinen Rädern das Einsetzen von Holzzähnen nur schwierig zu erreichen ist, und auch bei sehr großen Uebersetzungen die Zähne des kleineren Rades sehr häufig zum Eingriff kommen, so würden sich dieselben, weil aus weicherem Material, schnell abschleifen resp. deformiren.

Diesen Vortheilen können als Nachtheile gegenübergestellt werden, daß, wenn bei einem Eisenrade durch irgend einen Umstand ein Zahn bricht, dann das ganze Rad durch ein neues ersetzt werden muß. Man könnte zwar einen Zahn, und dann meistens aus Schmiedeisen, einsetzen, aber die Unsicherheit sowie die Schwierigkeit der Erneuerung eines solchen Zahnes ist so groß, daß man es meistens vorzieht, das ganze Rad zu erneuern. Soll ferner ein mit eisernen Zähnen versehenes Rad eine möglichst genaue Bewegung gewähren, so muß zur Herstellung ein neues Modell angewendet werden, da die alten Modelle stets etwas unrund sind. Haben dann noch außerdem die Räder mit Eisenzähnen eine große Umfangsgeschwindigkeit, so müssen, wenn ein möglichst ruhiger Gang verlangt wird, die Zähne justirt oder egalisirt werden. Besser wäre es jedoch, wenn der Guß so rein ausgeführt würde, daß auch ohne die eben erwähnte Arbeit die Zähne schon genau wären, denn durch die Bearbeitung verlieren die Zähne die sog. Gußhaut, welche, da sie härter als das Gußeisen selbst ist, auch einem Abschleifen der Zähne länger Widerstand entgegensetzt. Ein solch' exacter Guß ist aber nur dann zu erreichen, wenn das Modell neu und das Formmaterial fein ist. Außerdem verursachen zwei mit Eisenzähnen versehene Räder beim schnellen Gang sehr viel Geräusch.

Werden die Zähne aus Holz hergestellt und in den Radkranz eingefügt, so kann das letztere als dauernd brauchbar angesehen werden; bricht einmal ein Zahn, oder sind die Zähne so weit abgeschliffen, daß der Gang ein unruhiger wird, so werden in das Rad neue Zähne eingesetzt. Zu dem Rade selbst kann ein altes Modell benutzt werden, denn wäre dasselbe auch etwas unrund geworden, so schadet das hier weniger als bei den Rädern mit Eisenzähnen, da doch der Radkörper vor dem Einsetzen der Zähne abgedreht wird. Arbeitet ein Rad mit Eisenzähnen zusammen mit einem Holzzahnrade, so entsteht dadurch viel weniger Geräusch als wenn zwei Räder der ersten Gattung ineinander greifen. Auch die Stöße der Zähne, welche beim schnellen Gang unvermeidlich sind, sind bei Anwendung eines Holzkammrades nicht so gefährlich, da dieselben von einem elastischen Material, dem Holz, aufgenommen werden. Anderntheils werden jedoch die Holzzähne eher deformiert, und, was als ein sehr großer Nachtheil angesehen werden muß, ist eine dauernd haltbare Befestigung der Holzkämme in den

Digitized by Google

Lücken wohl nie zu erreichen. Selbst wenn zu den Kämmen vollkommen trockenes Holz genommen wird, so werden doch die Stiele mit der Zeit immer noch etwas schwinden und schließlich die Kammlücken nicht mehr vollständig ausfüllen.

Nach Obigem kann man die Regel anfstellen, daß Eisenzähne ihre Anwendung finden:

1) bei geringer Geschwindigkeit in allen Dimensionen;
2) bei großer Geschwindigkeit in kleinen Dimensionen;
3) bei Maschinen, deren Eingriff Genauigkeit erfordert (Werkzeugmaschinen);
4) bei Maschinen, an denen mehr die Widerstandsfähigkeit als der genaue Eingriff der Zähne maßgebend ist (Winden, Krahnen u. s. w.).

Holz- und Eisenzähne dagegen:

bei schnellgehenden Transmissionen von größeren Dimensionen, bei denen Geräusch und Stöße vermieden werden sollen.

Sehr kleine Räder werden auch aus Messing oder Rothguß hergestellt. Dieselben werden vollgegossen und abgedreht. Der Theilkreis wird auf der Drehbank angedeutet, und derselbe dann in so viele gleiche Theile getheilt, als das Rad Zähne erhalten soll. Die Zähne werden nun mittelst einer Leere genau auf beide Stirnflächen des Rades aufgezeichnet und die Lücken mittelst eines nach denselben geformten Meißels ausgehöhlt und schließlich die Zähne mit der Feile nachgearbeitet. Werden jedoch die Räder auf einer Räderschneidmaschine, wie sich dieselben in größeren Maschinenfabriken vorfinden, bearbeitet, dann ist die Ausführung bedeutend einfacher, da solche Maschinen bereits mit einem Theilapparat versehen sind, und daher eine Theilung durch Hand mittelst eines Spitzzirkels unnöthig wird.

Kleine gußeiserne Räder (für Spinnmaschinen u. s. w.) werden mittelst Modellen aus Messing geformt, welche selbst nach der letzten der oben angegebenen Methoden hergestellt sind. Größere Räder jedoch werden, wenn nicht eine Räderformmaschine, wie sie in neuester Zeit vielfach in Anwendung ist, auf deren Einrichtung an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen werden kann, zur Verfügung steht, nach Holzmodellen geformt, welche auf folgende Weise hergestellt werden: Das Radmodell wird aus einzelnen Holzstücken zusammengesetzt, dann auf der Drehbank abgedreht. Die Hauptrippen der Arme müssen sich an der Nabe zu einer vollen Scheibe vereinigen, damit je nach Umständen beliebig große Naben und auf diese wieder verschieden große Kernmarken gesetzt werden können. Ist der Kranz abgedreht, dann werden auf demselben die Zähne in gleichen Entfernungen von einander angebracht. Am solidesten geschieht dieses folgendermaßen: Die Radperipherie wird in so viele gleiche Theile getheilt, als das Rad Zähne erhalten soll, dann werden eben so viele schwalbenschwanzförmige Nuten in den Radkranz hineingearbeitet und in jede derselben ein Holzstück eingepaßt; die Zähne werden nun genau aufgezeichnet, die Holzstücke wieder herausgeschlagen und vom Modelltischler auf der Bank fertig bearbeitet; endlich wieder mittelst Leim in die Nuten eingesetzt (nach v. Reiche).

Eine etwas einfachere Methode ist die, daß die Zähne von vornherein fertig hergestellt und stumpf auf den Radkranz geleimt werden. Dieses Modell ist dadurch weniger solide als das vorige, aber auch der geringeren Arbeit wegen bedeutend billiger, und ist außerdem, wenn ein Zahn durch irgend welchen Umstand beschädigt ist, derselbe viel leichter auf dem Modell zu ersetzen.

Digitized by Google

Werden Räder von einer und derselben Größe häufig gegossen, dann ist es rationell ein Modell von Gußeisen anzufertigen. Das Modell zu dem letzteren wird nach einer der oben angegebenen Methoden ausgeführt, jedoch unter Berücksichtigung eines doppelten Schwindmaßes.

Damit das Modell ohne Beschädigung der Form ausgehoben werden kann, müssen die sämmtlichen Theile, mit Ausnahme der Zähne, nach einer resp. beiden Seiten hin verjüngt sein.

Räder, deren Zähne nicht weiter bearbeitet werden sollen, werden in der Werkstatt nur ausgebohrt und mit Keilnuten versehen.

Sollen jedoch die Zähne noch justirt werden, dann kann dieses mittelst eigens dazu construirten Räderfraismaschinen, oder vor der Hand geschehen. Auf die Einrichtung solcher Räderfraismaschinen können wir hier nicht näher eingehen, das Prinzip besteht einfach darin, daß die Lücken durch einen rottirenden Fraiser, dessen Schneidprofile genau den Zahnlücken entsprechen, ausgearbeitet werden.

Die Bearbeitung auf Stich, wie auch wohl die Bearbeitung vor der Hand genannt wird, führt man gewöhnlich nach folgender Methode aus: Die Räder werden auf der Planscheibe so aufgespannt, daß der Grund möglichst rund läuft, wobei jedoch darauf Rücksicht genommen werden muß, daß die Bohrung rein wird. Ist das letztere nicht zu erreichen, ohne daß die Zähne beim Abdrehen zu viel verlieren, dann hilft man sich damit, daß die Nabe ausgebuchst wird.

Ist das Rad so aufgespannt, dann wird dasselbe ausgebohrt, außen wie auch auf beiden Seiten auf Maß abgedreht und außerdem auf beiden Planseiten eine dem Grund- und Theilkreise entsprechende Nute eingedreht. Um alle diese Arbeiten ohne Umspannen auszuführen, müssen die Räder so auf die Planscheibe aufgespannt werden, daß zwischen derselben und dem Rade noch ein Spielraum bleibt. Dieses erreicht man durch Zwischenlegen genügend hoher Holzklötze zwischen die Arme und der Planscheibe beim Aufspannen des Rades.

Den eingedrehten Theilkreis theilt man nun in so viele gleiche Theile, als Zähne im Rade vorhanden sind, indem man von dem Mittelpunkte eines beliebigen Zahnes ausgeht. Im Allgemeinen werden nun die Mittelpunkte der Zähne des Rades mit den so vorgezeichneten nicht genau übereinstimmen. Man sucht nun die 2 Zähne heraus, bei denen die wirklichen Mittelpunkte von den vorgezeichneten am Meisten abweichen, und zwar der eine nach der einen, der andere nach der andern Seite; und verschiebt alle Theilpunkte im Sinne der größten Abweichung um die halbe Differenz beider. Dann markirt man die so gefundenen neuen Theilpunkte durch Körnerschläge, zieht die Mittellinien der Zähne und zeichnet entsprechend diesen die Zähne entweder mittelst eines Zirkels oder einer nach der Zeichnung gearbeiteten Schablone auf. Dann beginnt man damit, daß man mit einem Flachmeißel die Zähne abschrägt, die Längenfurchen am Grunde mittelst eines Kreuzmeißels ausarbeitet, schließlich das stehengebliebene Material mit einem Flachmeißel wegnimmt und die Zähne genau den aufgezeichneten Zahnformen entsprechend nachfeilt.

Als Material der Holzkämme findet man meistens Weißbuchen-, seltener Pockholz angewendet. Beides muß aber möglichst trocken sein. Die Fasern müssen, damit der Holzkamm möglichst große Festigkeit besitze, radial zum Radkranz laufen. Die Form der Holzkämme ist schon oben erwähnt worden. Das Holzkammrad

Digitized by Google

wird zuerst ausgebohrt und auf den Grundkreisdurchmesser abgedreht. Dann werden die Kammlücken mittelst Feile und Meißel so weit bearbeitet, daß die gröbsten Ungenauigkeiten des Gusses verschwinden. Die Holzklötze, welche die Kämme bilden sollen, werden in der Art eingepaßt, daß man denjenigen Theil, welcher später den Zahn bilden soll, ganz unbearbeitet läßt. Die Kammstiele werden nun in die einzelnen Lücken eingepaßt, daß sie möglichst überall Spuren der Reibung zeigen, und daß sie später tief genug hineingeschlagen werden können. Das Rad wird jetzt wieder auf die Planscheibe gespannt und die Holzkämme auf den äußern Durchmesser und die richtige Breite abgedreht. Das Rad wird dann genau eingetheilt, die Zähne mittelst Schablone oder Zirkel vorgezeichnet, die einzelnen Zähne und Lücken nummerirt. Die Zähne werden wieder herausgeschlagen und mittelst Hobel fertig gearbeitet. Schließlich schlägt man die Kämme wieder fest in die Löcher hinein und befestigt sie auf eine der oben angegebenen Methoden.

Die Herstellung der Modelle für Schraubenräder mit schräge zum Kranz gesetzten Zähnen, sowie die Bearbeitung der letzteren, geschieht auf ganz gleiche Weise wie bei den Stirnrädern. Die Herstellung des Modells für Schraubenräder mit Zähnen, welche selbst Theile eines Schraubenmuttergewindes sind, unterscheidet sich von dem oben Gesagten nur dadurch, daß das Rad in der Symmetrieebene getheilt wird, und zwar deshalb, um das Modell überhaupt aus der Form herausnehmen zu können. Die Zähne solcher Räder werden mittelst Feile und Schaber bearbeitet. In neuerer Zeit findet man zur Bearbeitung der Zähne solcher Räder auch folgende Methode in Anwendung: Man fertigt zwei congruente Schrauben, von denen eine als später zu benutzende Arbeitsschraube aus dem gewünschten Materiale (Schmiedeisen, Gußeisen), die andere aus Stahl hergestellt wird. Die letztere erhält eine große Zahl von Einschnitten, Kanten u. s. w., daß die Schraube selbst eine Art Fraise bildet. Diese Schraube wird gehärtet und dient dann als Werkzeugschraube. Dieselbe wird an den vorläufig nur concav ausgedrehten Radkranz gepreßt und in Umdrehung versetzt, wobei sich die Zähne der Schraube nach und

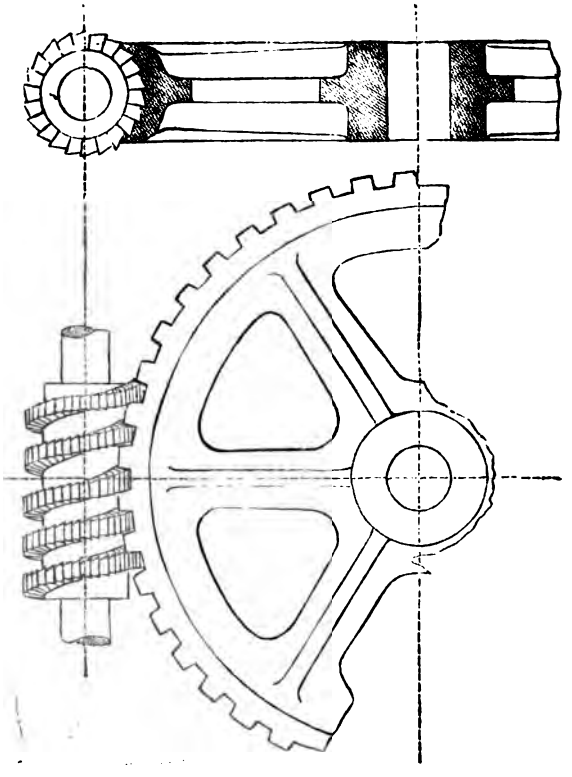


Fig. 210.

Digitized by Google

nach in den Radkörper einwühlen und so die allein richtige Zahnform herstellen. Nimmt man dann statt der Werkzeugschraube die Arbeitsschraube, so wird die Bewegung eine absolut genaue sein.

Was die Construction der Stirnräder anbetrifft, so ist aus Bl. LXXVI das Nothwendige zu ersehen. Fig. 1 stellt den Eingriff zweier Stirnräder mit Eisenzähnen dar. Da hier das kleine Rad so klein ausfällt, daß keine Arme mehr construirt werden können, wurde dasselbe als Scheibenrad gebildet. Fig. 1b stellt einen Theil des Kranzes sowohl des kleinen und großen Rades dar; dieselbe ist hauptsächlich deshalb angeordnet, um den Eingriff der Zähne zu zeigen. Hier ist die Cycloïdenverzahnung angewendet, und sind die stärker gezeichneten Curven die mit den punktirten Rollkreisen construirten Cycloïden. xy und x_1 y_1 sind die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche nahezu genau mit den construirten Cycloïden zusammenfallen, und welche bei Verzeichnung der übrigen Zähne zu Grunde gelegt werden können. Bei Ausführung von Arbeitszeichnungen sollte stets an irgend einer Stelle des Blattes der Eingriff der Zähne in natürlicher Größe verzeichnet werden, weil hiernach der Modelltischler seine Schablone zur genauen Bearbeitung der Zähne macht.

Fig. 2, 2a, 2b zeigt zwei eingreifende Räder mit Holz- und Eisenzähnen. Hier ist zum Unterschiede von der vorigen Anordnung die Evolventenverzahnung angenommen. Auch hier sind die angegebenen Punkte x und x_1 die Mittelpunkte der Krümmungskreise, welche mit den genau construirten, stärker verzeichneten Evolventen zusammenfallen. Wegen der beträchtlichen Größe des Kammrades ist letzteres an der Nabe getheilt und mit einem aufgezogenen schmiedeisernen Ringe versehen. Beim Verzeichnen geht man stets von den Theilkreisen der beiden Räder aus, construirt erst die Zähne, dann den Radkranz, hierauf die Nabe, und verbindet schließlich die beiden letzteren Theile durch die Arme.

Die Construction der conischen Räder ist auf Bl. LXXVII sowohl im Schnitt, als auch in der Ansicht der einzelnen Räder gezeigt. Die Anordnung bezieht sich auf den Fall, wonach die Radaxen einen rechten Winkel mit einander bilden. Man zeichnet zuerst die theoretische Grundfigur, wie sie in Fig. 159 pag. 201 angegeben worden, dann verzeichnet man die wirklichen Zahnformen. Da die Mittellinien der Zähne sämmtlich in dem Schnittpunkte der beiden Radaxen zusammenlaufen, so sind dieselben sämmtlich Erzeugende des Grundkegels. Die wahren Zahnformen liegen aber auf einem Schnitt, welcher senkrecht zur Mittellinie des Zahnes gelegt wird, und liegen demnach die sämmtlichen wahren Zahnformen auf einem Kegel, dessen Erzeugende senkrecht auf den Erzeugenden des Grundkegels stehen, also auf dem schon auf pag. 201 benannten Gegenkegel. Die Spitze dieses Kegels liegt im Punkte L. Um diese wahren Zahnformen zu verzeichnen, muß der Gegenkegel abgewickelt werden. Dieses ist in Fig. 1ª geschehen, indem hier als Radius des Theilkreises des größeren Rades die Länge der Erzeugenden LD, und als Theilkreis für das kleinere Rad, die Erzeugende DK genommen wurde. Die Verzeichnung der Verzahnung selbst geschieht dann ebenso, als wenn die Verzahnung zweier Stirnräder construirt werden soll. Nachdem die Verzahnung ausgeführt, werden die Zähne in die andern Zeichnungen zurückge-

Digitized by Google

bracht, und diese dann nach den berechneten Maßen der Radkränze, Arme und Nabe vervollständigt. In Fig. 1ᵇ sind die innern Stirnflächen der conischen Radzähne gezeichnet, welche, da die Erzeugenden der Seitenflanken von den äußern Stirnflächen aus nach dem Schnittpunkt der Axen zusammenlaufen, sich kleiner darstellen, als die construirten äußern Stirnflächen. Die beiden eingreifenden conischen Räder sind, wie Fig. 1 zeigt, halb im Schnitt, halb in der Seitenansicht gezeichnet. Die Projection der Zähne in der Seitenansicht ist unterblieben, weil aus derselben doch nichts zu ersehen ist. Bei Verzeichnung der Ansichten der Räder ist so verfahren, daß die eine Hälfte von der Spitze des Grundkegels, die andere Hälfte von derjenigen des Gegenkegels aus gesehen, gezeichnet wurde

Die Construction der Schraubenräder zeigt Fig. 1, Bl. LXXVIII. In dieser Zeichnung sind zwei verschiedene Anordnungen in eine Figur hineingebracht. Fig. 1ᵃ stellt ein Schraubenrad dar mit Zähnen, welche selbst Theile eines Schraubenmuttergewindes sind, während in Fig. 1ᵇ die Zähne einfach gerade und nur gegen den Radkranz geneigt sind. Auch hier ist die Evolventenverzahnung angenommen, und zwar aus dem Grunde, weil für diesen Fall die Querschnitte der Schraubengänge einfach Trapeze sind, denn bei der Verzahnung der Schraube verfährt man ganz ebenso, als wenn man es mit der Verzahnung einer Zahnstange zu thun hätte. Die Verzeichnung der Schraube kann nach der früher angegebenen Methode ausgeführt werden.

Fig. 1ᶜ stellt einen Schnitt durch die Symmetrieebene des Schraubenrades dar. Um die Projection der schiefen Radzähne zu erhalten, muß man zuerst die Neigung der Zähne, an dem Theilkreis gemessen, bestimmen. Hierzu dient Fig. 1ᵈ. Ist f g h i das Profil eines Zahnes in der Symmetrieebene, dann zieht man die Mittellinie derselben O c, legt durch irgend einen beliebigen Punkt c derselben eine Linie, welche gegen O c unter dem früher angenommenen Winkel β geneigt ist, dann trägt man von c aus nach beiden Seiten auf O c die halbe Breite des Rades, am Theilkreis gemessen ab, zieht durch diese so gefundenen Punkte a, b Senkrechte zu O c, es ist dann das Stück d k die Entfernung der Projectionen der Mittellinien des vorderen und hinteren Zahnprofiles, auf dem Theilkreis derselben gemessen.

Ferner muß man bedenken, daß die Zähne an den Stellen m n o sowie $m_1 n_1 o_1$ gleiche Zahnstärke besitzen, und erhält dann durch Auftragen dieser die gewünschte Projection. Die Verzeichnung der Projection der Zähne in Fig. 1ᵇ ist leichter auszuführen, da dieselben an den Stellen p, q und r gleiches Profil haben. Die Entfernung der Projection der Mittellinie des vorderen und hinteren Zahnprofiles findet man auf gleiche Weise wie oben bei Fig. 1ᵃ.

Fig. 2, Bl. LXXVIII stellt eine gußeiserne Schraube ohne Ende, und deren Befestigung auf der schmiedeisernen Axe dar.

Kurbelmechanismus.

Der Kurbelmechanismus dient zur Umsetzung einer rotirenden in eine geradlinige Bewegung oder umgekehrt. Ein Beispiel der ersten Art finden wir bei den Stoßmaschinen, während der zweite Fall bei jede Dampfmaschine auftritt. Der Mechanismus selbst besteht aus wesentlich 3 Theilen, nämlich:

1) der Kurbel A oder dem Krummzapfen, einem einfachen Hebel, welcher sich um den Punkt C dreht;

Digitized by Google

2) dem Kreuzkopfe oder Schlitten B, welcher gerade geführt wird, und
3) der Pleuel- oder Kurbelstange, welche den ersten mit dem zweiten Theil verbindet und so die Bewegung des einen Theiles auf den andern überträgt.

Um überhaupt eine Bewegung zu ermöglichen, darf sowohl bei a, als auch bei B, die Pleuelstange nicht fest verbunden sein, sondern muß an beiden Stellen frei schwingen können.

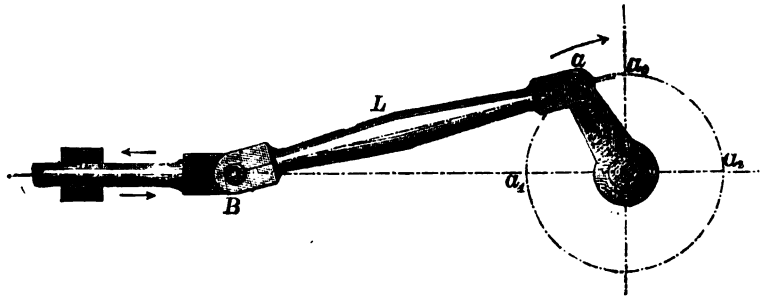


Fig. 211.

Der Zapfen a, der sogenannte Kurbelzapfen, bewegt sich in einem um C concentrischen Kreise. Der Kurbelarm A ändert in jedem Augenblick denjenigen Winkel, den er mit der Stange L bildet. Hieraus erhellt, daß die Kraftübertragung und somit auch die Bewegungsübertragung keine gleichförmige sein kann. Liegen Pleuelstange L und Kurbelarm A beide in einer geraden Linie, dann kann die in der Stange wirkende Kraft zur Umdrehung der Kurbel um C nichts beitragen. Die Stellungen a_1, a_2 des Kurbelzapfens, welche dieser Lage entsprechen, heißen die todten Punkte der Kurbelbewegung. Nehmen wir den Fall an, daß die Kurbel das treibende, der Punkt B das getriebene Element sei, und erstere sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit im Sinne des Pfeiles um die Axe dreht, wobei wir als Anfangslage der Bewegung die Stellung Ca_1 annehmen wollen, dann wird beim Heraustreten der Kurbel aus dieser Lage, die Geschwindigkeit von B, mehr und mehr zunehmen, und wenn sich a in der Nähe von a_0 befindet, ihren größten Werth erreichen. Geht a über diesen Punkt hinaus, dann nimmt die Geschwindigkeit von B wieder ab, und wird schließlich für die Stellung Ca_2 der Kurbel wieder gleich Null. Diese Veränderung der Geschwindigkeit von B wiederholt sich beim Durchlaufen eines jeden Halbkreises. Von vornherein sollte man glauben, daß die größte Geschwindigkeit von B dann einträte, wenn der veränderliche Winkel α zu 90^0 geworden wäre. Dieses ist aber nur für den Fall richtig, wenn die Pleuelstange L unendlich lang angenommen wird. Mittels der höheren Mathematik läßt sich leicht zeigen, daß die größte Geschwindigkeit einem Drehungswinkel α entspricht, welcher aus der Beziehung $\cos \alpha = \frac{A}{L}$ (wenn A und L die Längen des Kurbelarmes und der Pleuelstange, gemessen von Mitte zu Mitte der betreffenden Zapfen), berechnet werden kann.

Auf die Berechnung des Gesetzes, nach welchem sich die Geschwindigkeit von B von Augenblick zu Augenblick ändern, können wir an dieser Stelle noch nicht näher eingehen; um aber einen ungefähren Einblick in die Bewegung des Kreuzkopfes B zu bekommen, soll eine Beziehung zwischen dem Wege von B,

Digitized by Google

von einer gewissen Lage an gerechnet, und dem zugehörigen Drehungswinkel der Kurbel aufgestellt werden.

Der Punkt B sei gezwungen sich auf einer geraden Linie zu bewegen, deren Richtung die Drehaxe C schneidet. Als Anfangslage der Kurbel sei die Stellung Ca_1 angenommen. Es befindet sich dann B im Punkt B_1, entsprechend der Entfernung

$$CB_1 = A + L.$$

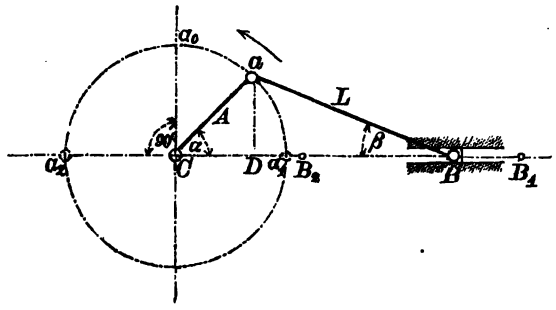


Fig. 212.

Hat der Kurbelarm einen Winkel $\alpha = 180^0$ durchlaufen, und liegt der Kurbelzapfen a in a_2, dann liegt B in B_2, und muß jetzt: $CB_2 = L - A$ sein. Es hat also, während die Kurbel eine halbe Umdrehung gemacht hat, der Punkt B einen Weg:

$$CB_1 - CB_2 = A + L - (L - A) = 2A$$

gleich der doppelten Länge des Kurbelarmes durchlaufen. Der Kurbelarm möge sich aus der Anfangslage herausgedreht haben und in die Lage Ca, entsprechend dem Drehungswinkel α, gekommen sein. Der Punkt B möge sich dann in B_1 befinden, und sei der Weg, den derselbe von B_1 an gerechnet, durchlaufen hat, mit s bezeichnet.

Die Entfernung aB ist dann, da die Länge der Pleuelstange unverändert geblieben ist, gleich L. Dieser Weg s läßt sich analytisch auf folgende Weise bestimmen: Der Winkel aBC, um welchen die Stange L aus der Lage CB_1 herausgetreten ist, sei mit β bezeichnet; derselbe ändert sich in jedem Augenblick mit a. Es ist nun:

$$s = CB_1 - CB = CB_1 - (CD + DB) = A + L - (CD + DB).$$

Ist D der Fußpunkt des von a aus auf CB gefällten Perpendikels, so ist:

$$CD = A \cos\alpha \text{ und } DB = L \cos\beta.$$

Da wir aber s allein durch AL und α ausdrücken wollen, so muß β eliminirt werden. Nach obiger Figur ist nun:

$$aD = A \sin\alpha = L \sin\beta \text{ und demnach.}$$

$$\sin\beta = \frac{A}{L} \sin\alpha, \text{ da aber } \cos\beta = \sqrt{1 - \sin\beta^2} \text{ ist, so ist auch:}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{A}{L}\right)^2 \sin^2\alpha}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung für DB, und letztere Größe in die Gleichung für s ein, so ergiebt sich:

$$s = A + L - \left(A \cos\alpha + L \sqrt{1 - \left(\frac{A}{L}\right)^2 \sin^2\alpha}\right)$$

$$= A(1 - \cos\alpha) + L\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{A}{L}\right)^2 \sin^2\alpha}\right)$$

Aus diesem Ausdruck für s kann letzteres für verschiedene ausgezeichnete Stellungen der Kurbel berechnet werden.

Digitized by Google

Ist $\alpha = 0$, d. h. fällt der Kurbelarm mit der Pleuelstange in eine gerade Linie, so ist $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$ und man erhält:

$$s = A\,(1 - 1) + L\,(1 - \sqrt{1 - 0}) = 0,$$

es befindet sich also B in B_1, was auch schon vorher angenommen wurde. Wird $\alpha = 90^0$, hat also der Kurbelzapfen den halben Weg von a_1 nach a_2 durchlaufen, dann ist $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$ und erhalten wir:

$$s = A + L\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{A}{L}\right)^2}\right).$$

Da nun L stets größer als A ist, so wird $\frac{A}{L}$ und um so mehr $\left(\frac{A}{L}\right)^2$ ein echter Bruch sein; diesen von 1 abgezogen, giebt wieder einen echten Bruch, aus diesem die Wurzel gezogen, muß es wieder einen echten Bruch geben. Zieht man letzteren von 1 ab, so erhalten wir für die Klammergröße stets einen positiven echten Bruch. Multipliziren wir denselben mit L, und addiren diesen Werth zu A, so ergiebt das den Werth für s. Hieraus ist ersichtlich, daß für einen Drehungswinkel $\alpha = 90^0$, bereits $s > A$ ist. Da nun der ganze Weg von B bei Drehung der Kurbel um 180^0, gleich 2 A ist, so hat also, wenn a den halben Weg zurückgelegt hat, B bereits mehr als seinen halben Weg durchlaufen; umgekehrt, wenn B in der Mitte seines Weges steht, hat a noch nicht den höchsten Punkt des Kurbelkreises erreicht, sondern steht noch im ersten Quadranten. Da nun der Kurbelzapfen in Folge der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit die Wege $a_1\ a_0$ und $a_0\ a_2$ in gleichen Zeiten durchläuft, so erkennt man schon aus dieser Betrachtung, daß in der ersten Hälfte der Bewegung B sich schneller als in der zweiten Hälfte bewegt.

Für $\alpha = 180^0$, entsprechend der Todtpunktstellung a_2, ist $\cos \alpha = -1$, $\sin \alpha = 0$, und damit:

$$s = A\,(1 - (-1) + L\,(1 - \sqrt{1 - 0}) = 2\,A,$$

d. h. B befindet sich in B_2, was auch schon früher bewiesen war.

Sehr leicht können wir uns auch ein ungefähres Bild von der Wirkung der in der Pleuelstange concentrirten Kraft auf die rotirende Welle bei den verschiedenen Stellungen der Kurbel machen. Nimmt man der Einfachheit wegen an, daß die Kraftrichtung stets horizontal bleibe, was bei einer unendlich langen Pleuelstange genau zutrifft, bei Stangen mit endlicher Länge jedoch nicht der Fall ist, da die Kraft stets in Richtung der Stange wirkt, und letztere selbst in jedem Augenblick ihre Lage ändert. In der Lage Ca_1 der Kurbel ist das verdrehende Moment der Kraft P gleich 0; das Maximum erreicht dasselbe, wenn die Kraft senkrecht zum Kurbelarm A steht, also in a_0, und zwar ist dasselbe dann PA. Dieser Uebergang von 0 zu PA findet allmälig statt. Ebenso findet auch die Abnahme des Momentes beim Uebergang von a_0 nach a_2 nach dem gleichen Gesetze statt.

Statt der stets horizontalwirkenden Kraft P können wir uns eine tangential zum Kurbelkreis gerichtete Kraft P_0 denken, welche hier angreifend, während einer ganzen Umdrehung, oder da beim Durchlaufen des obern Halbkreises ganz dieselbe Kraftwirkung stattfindet, wie beim Durchlaufen des unteren, welche während einer halben Kurbeldrehung ganz dasselbe leistet, wie die veränderlich wirkende Kraft P. Das Moment dieser Kraft P_0 ist für alle Stellungen der Kurbel constant gleich $P_0 A$, und wollen wir es deshalb das mittlere Moment nennen. Dreht sich die

Digitized by Google

Kurbel um 180°, so legt die tangential wirkende Kraft P_0 den Weg $A\pi$ zurück, und ist demnach die Arbeit während dieser Zeit $P_0 A\pi$. Während derselben Zeit durchläuft die horizontal wirkende Kraft den Weg 2A, und ist demnach die Arbeit derselben P 2 A. Sollen uun diese Arbeiten gleich sein, so hat man:

$$P_0 \pi A = 2 P A$$

oder die mittlere Tangentialkraft

$$P_0 = \frac{2}{\pi} P = 0{,}6366\ P.$$

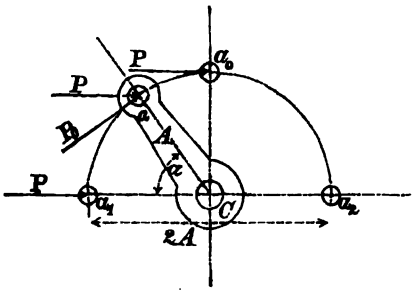


Fig. 213.

Nachdem wir die Bewegungsgesetze sowie die Kraftvertheilung kennen gelernt haben, wollen wir zur Berechnung und Construction der einzelnen zum Kurbelmechanismus gehörenden Theile übergehen.

Kurbeln.

Kurbeln oder Krummzapfen sind einfache Hebel, welche ganze Kreise durchlaufen. Dieselben müssen so eingerichtet sein, daß die am Zapfen angreifende Pleuelstange nicht in ihrer schwingenden Bewegung gestört wird. Je nach der Anordnung in Bezug auf die Welle und Construction unterscheidet man 4 verschiedene Arten, nämlich:

1) die Stirnkurbel,
2) die Gegenkurbel,
3) die Wellenkröpfung, Kurbel- oder Krummaxe,
4) die excentrische Scheibe,

welche im Folgenden einzeln behandelt werden sollen.

1) Stirnkurbel.

Die Stirnkurbel verdankt ihren Namen dem Umstande, daß sie stets am Stirnende einer Welle aufgeschoben wird. Sie besteht aus 3 Constructionstheilen, dem Kurbelzapfen, dem Wellenhals und dem Arm, welcher die Verbindung der beiden erstgenannten Theile herstellt.

Der Kurbelzapfen ist meistens ein cylindrischer Stirnzapfen, für dessen Berechnung die früher angegebenen Formeln Seite 91 angewendet werden können. Es fand sich dort für einen Zapfen vom Durchmesser d, dessen Läge $l = 1{,}5\,d$ und dessen Maximalanstrengung $s = 6$ Kilogr. angenommen wurde:

$d = 1{,}13\sqrt{P}$, wenn P die senkrecht zur Mittellinie des Zapfens wirkende Kraft darstellte. Diese Formel galt für den Fall, daß der Zapfen weniger als 150 Umdrehungen in der Minute mache, was bei einem Kurbelmechanismus stets vorausgesetzt werden kann.

Für Stahlzapfen fand sich pag. 92 unter Annahme von 10 Kilogr. Materialspannung:

$d = 0{,}95\sqrt{P}$, wenn $l = 1{,}75$ vorausgesetzt wurde.

In neuerer Zeit wendet man bei Stirnkurbeln statt des cylindrischen Zapfens kugelförmige Zapfen an. Dieselben gestatten Unregelmäßigkeiten in Bezug auf

Digitized by Google

die Lagerung der Welle und der Pleuelstange sowie der Bohrung der Kurbelnabe. Bei Construction eines solchen Zapfens kann man den Durchmesser der Kugel $d' = 1{,}5\,d$ . . . . (130) gleich der Länge des gleichwerthigen cylindrischen Zapfens machen. An der stärkst angestrengten Stelle erhält er die Stärke d wie jener. (Siehe Fig. 3b, Bl. LXXVIII.) Die Anordnung eines solchen kugelförmigen Zapfens hat bei der Montirung ihre großen Vortheile, jedoch auch andrerseits wieder gewisse Nachtheile, da der Flügelstangenkopf dadurch ziemlich schwer und plump ausfällt, und liegt hierin wohl auch der Grund, daß die Anordnung ziemlich beschränkt geblieben ist.

Da die Stirnkurbel, wie schon oben bemerkt, auf das fliegende Ende der Welle gesetzt wird, so wird man das Lager auch stets unmittelbar an die Kurbel setzen, um das biegende Moment in Bezug auf den Lagerhals möglichst klein zu halten. Der Lagerhals wird durch die am Kurbelzapfen angreifende Kraft P auf Torsion, aber auch, weil die Kraft außerhalb des Lagerhalses angreift, auf Biegung beansprucht. Wir hätten also aus beiden das combinirte Moment zu bilden, und mit diesem nach früher gegebenen Regeln für Wellenberechnung, den Durchmesser desselben an der Lagerstelle zu berechnen. Einfacher kommt man zum Ziele, wenn man das Biegungsmoment vernachlässigt, dafür aber das größte Torsionsmoment, und außerdem die Materialspannung etwas geringer, als früher geschehen, in Rechnung bringt.

Nach Formel 94 pag. 71 ist für reine Torsionsfestigkeit

$$M = P\,A = \frac{J_p}{a}\,s_t$$ unter s_t die Maximalbeanspruchung für Torsion verstanden. Für einen Kreisquerschnitt ist:

$\frac{J_p}{a} = \frac{\pi}{16} D^3$, wenn D der Durchmesser an der zu berechnenden Stelle, also hier im Lagerhals ist. Hiermit ergiebt sich:

$$P\,A = \frac{\pi}{16} D^3 . s_t .$$

Um D im Verhältniß zum Kurbelzapfendurchmesser d auszudrücken, legen wir die zur Berechnung von d aufgestellte Formel pag. 90 zu Grunde, welche lautet: $P\frac{l}{2} = \frac{\pi}{32} d^3 s$, wobei s die Maximalbeanspruchung auf Zug war. Setzen wir die, diesen beiden Gleichungen entsprechenden Werthe von P einander gleich, so ergiebt sich

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot D^3 . s_t = \frac{2}{l} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^3 s \text{ oder}$$

$$\frac{D^3}{d^3} = \frac{d}{l} \cdot \frac{A}{d} \cdot \frac{s}{s_t}, \text{ und}$$

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{d}{l} \cdot \frac{A}{d} \cdot \frac{s}{s_t}} \quad \ldots \quad (131).$$

Setzt man für s_t aus obengenanntem Grunde nur halb so große Werthe, als es bei Aufstellung der Formeln pag. 136 geschehen, also für Schmiedeisen $s_t = 4$, für Gußeisen $s_t = 2$, so ergiebt sich, da $s = 6$ ist:

Digitized by Google

wenn Welle und Zapfen aus Schmiedeisen

$$\frac{D}{d} = \sqrt[8]{\frac{A}{d}} \ldots . \quad (131^a),$$

wenn Welle aus Gußeisen, Zapfen aus Schmiedeisen

$$\frac{D}{d} = 1{,}25 \sqrt[3]{\frac{A}{d}} \ldots \quad (131^b).$$

Zur Aufstellung von Formeln zur Berechnung der Nabe der Kurbel kann man folgenden Weg einschlagen. Sieht man von einem beigelegten Keil zwischen Nabe und Axkopf ab, so muß die Reibung zwischen den beiden Berührungsflächen so groß sei, daß das Moment PA von derselben überwunden werden kann. Um diese Reibung aber hervorzubringen, muß der Druck des den Axkopf umschließenden Materials auf demselben einen gewissen Werth haben, und muß die Kurbel so stark aufgepreßt werden, um denselben zu erzeugen. Würde die Pressung zu groß, dann wird die Kurbelnabe an der Stelle bc abgerissen oder an der Stelle a platzen. Nennt man den Druck, der von m und n (siehe Fig. 214) auf den Axkopf ausgeübt wird p, dann ist, unter f den Reibungscoefficienten verstanden, 2pf die Reibung am Umfange des Zapfens und $2pf\frac{D}{2}$ das Reibungsmoment. Dieses Moment muß dem Torsionsmoment PA mindestens das Gleichgewicht halten, und ergiebt sich der für uns noch unbekannte Druck p aus der Beziehung:

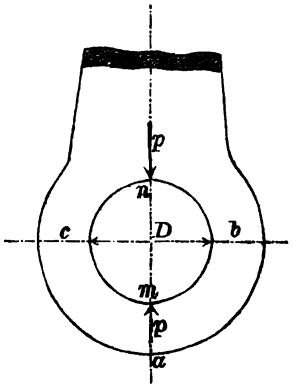


Fig. 214.

$$2pf\frac{D}{2} = PA \text{ oder hieraus}$$

$p = \frac{PA}{fD}$. Diesen Druck müssen die beiden Querschnitte bei b und c aushalten können, und haben wir nach Früherem für die Zugfestigkeit, da hier $P = p$ zu setzen ist:

$p = Fs$, unter F die abzureißende Fläche verstanden. Bezeichnen wir die Wanddicke mit δ, die Länge der Nabe mit λ, dann ist der Querschnitt bei b und c zusammen:

$F = 2\lambda.\delta$, und demnach:

$$p = 2\lambda\delta s = \frac{PA}{Df}.$$

Zur Berechnung von D hatten wir die Formel aufgestellt:

$PA = \frac{\pi}{16} D^3 s_t$. Setzen wir die diesen beiden Gleichungen gehörigen Werthe PA einander gleich, so wird:

$$PA = 2\lambda\delta s Df = \frac{\pi}{16} D^3 s_t.$$

Digitized by Google

Da aus dieser Gleichung nicht λ und δ beide bestimmt werden können, so wollen wir ein Verhältniß zwischen beiden annehmen, wir setzen

$\lambda = \varphi\,\delta$, und erhalten:

$$2\,\varphi\,\delta^2\,s\,D\,f = \frac{\pi}{16}\,D^3\,s_t \text{ oder}$$

$$\frac{\delta^2}{D^2} = \frac{\pi}{32}\,\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{1}{f}\,\frac{s_t}{s}, \text{ woraus sich}$$

$$\frac{\delta}{D} = \sqrt{\frac{\pi}{32}\,\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{1}{f}\,\frac{s_t}{s}} \quad \ldots \text{ (132) ergiebt.}$$

Es wurde früher für Schmiedeisen $s_t = 4$ angenommen, setzt man den Reibungscoefficienten $f = {}^1/_6$, und unter Voraussetzung, daß der Kurbelarm von Schmiedeisen $s = 5$ (weil zur Sicherheit eine größere Pressung p erzeugt wird, als in Rechnung eingeführt war), dann ergiebt sich:

$$\frac{\delta}{D} = \sqrt{\frac{\pi}{32}\,\frac{1}{\varphi}\,\frac{1}{{}^1/_6}\,\frac{4}{5}} = 0{,}7\sqrt{\frac{1}{\varphi}} \ldots \text{ (132}^a\text{)}.$$

Dieselbe Formel gilt auch, wenn Welle und Kurbelarm beide aus Gußeisen sind.

Ist jedoch die Welle aus Schmiedeisen, der Arm von Gußeisen, dann hat man in die obige Formel $s = 2{,}5$ zu setzen, und erhält:

$$\frac{\delta}{D} = 0{,}98\sqrt{\frac{1}{\varphi}} \ldots \text{ (132}^b\text{)}.$$

Um den Kurbelarm zu berechnen, denken wir uns denselben an der Axe der Kurbelwelle eingespannt und am Kurbelzapfen durch die Kraft P belastet. Das Biegungsmoment an der Einklemmungsstelle ist dann PA, und haben wir daher nach der Biegungsfestigkeit zu setzen:

$$PA = \frac{J}{a}\,s_1.$$

Schmiedeiserne Kurbeln erhalten wohl immer einen rechteckigen Querschnitt, so daß für diese $\frac{J}{a} = {}^1/_6\,b\,h^2$ ist, unter h die parallel der Kraftrichtung genommene Dimension des Armes, unter b die senkrecht zu letzterer stehende Dimension verstanden. Demnach haben wir:

$$PA = {}^1/_6\,b\,h^2\cdot s_1.$$

Setzt man diese Formel in Relation mit der Berechnungsformel für den Kurbelzapfen:

$$P\,\frac{l}{2} = d^3\,\frac{\pi}{32}\,s, \text{ dann wird:}$$

$$\frac{A}{\frac{l}{2}} = \frac{{}^1/_6\,b\,h^2\,s_1}{d^3\cdot\frac{\pi}{32}\cdot s}.$$

Um h zu bestimmen, wollen wir $b = \psi h$ setzen, und haben:

$$\frac{A}{\frac{l}{2}} = \frac{{}^1/_6\cdot\psi\,h^3\,s_1}{d^3\cdot\frac{\pi}{32}\cdot s},$$

woraus:

$$\frac{h^3}{d^3} = \frac{A}{\frac{l}{2}}\cdot\frac{\frac{\pi}{32}}{{}^1/_6}\,\frac{s}{s_1}\,\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi}\,\frac{A}{d}\cdot\frac{d}{l}\cdot\frac{12\,\pi}{32}\cdot\frac{s}{s_1}.$$

Digitized by Google

Dieses ergiebt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{1}\cdot\frac{d}{s}\cdot\frac{s}{s_1}\cdot\frac{A}{d}\cdot\frac{1}{\psi}} \quad \ldots (133).$$

Die Kraft greift außerhalb des Armes an, und sucht außer denselben abzubrechen, ihn auch zu verdrehen; es ist demnach gerathen, nicht $s_1 = s$, sondern $s_1 = 5$, also etwas geringer als die Beanspruchung des Kurbelzapfens zu nehmen; mit $\frac{l}{d} = 1{,}5$ findet sich dann: für schmiedeiserne Kurbeln

$$\frac{h}{d} = 0{,}97\sqrt[3]{\frac{A}{d}\cdot\frac{l}{\psi}} \sim \sqrt[3]{\frac{A}{d}\cdot\frac{l}{\psi}} \quad \ldots (133^a);$$

für gußeiserne Kurbeln unter Vernachlässigung der Rippen nehmen wir $s_1 = 2{,}5$ Kilogr. und haben:

$$\frac{h}{d} = 1{,}25\sqrt[3]{\frac{A}{d}\cdot\frac{l}{\psi}} \quad \ldots\ldots\ldots (133^b).$$

Würde man den Arm nach den in der Festigkeitslehre aufgestellten Formeln für gleiche Widerstandsfähigkeit bestimmen, so erhielt derselbe an der Angriffsstelle der Kraft P eine Dimension gleich Null. Da jedoch am äußersten Ende immer die Kraft P als Abscheerungskraft wirkt, so muß der Arm diesem entsprechend einen genügenden Querschnitt haben. Um wenigstens eine dem Träger gleicher Festigkeit entsprechende angenäherte Form zu nehmen, kann man, falls die Breite b des Armes constant bleibt, die Höhe h_1 am Kurbelzapfen gleich $^1/_2$ h, oder wenn auch die Breite veränderlich gemacht wird, sowohl b_1 am Kurbelzapfen auf $^2/_3$ der Armdimensionen an der Nabe abnehmen lassen. (S. Hütte pag. 243.)

Für gußeiserne Kurbelarme wählt man in der Regel einen Querschnitt wie er in Fig. 4, Bl. LXXVIII gezeichnet wurde, oder auch einen doppelt T-förmigen. In beiden Fällen kann die Berechnung, wie oben, für einen rechteckigen Querschnitt durchgeführt werden, indem die Mittelrippe oder die Saumnerven zugegeben werden, welche sich dann passend an die Nabe und Kurbelzapfenhülse anschließen müssen. Die Saumnerven erhalten eine Breite gleich $^1/_2$ bis $^2/_3$ der berechneten Dimension b.

Eine Berechnung der Kurbelzapfenhülse kann wohl nicht gut durchgeführt werden, da wir die Kraft nicht kennen, mit welcher der Zapfenstiel in die Hülse eingepreßt wird. Empirische Verhältnisse geben die eingeschriebenen Maße Fig. 3 und Fig. 4, Bl. LXXVIII. Der Kurbelzapfen erhält, um das Schleifen des Pleuelstangenkopfes an der Stirnfläche zu vermeiden, sowie auch das Einpressen des Zapfens zu begrenzen, einen Ansatz, welcher der früheren Größe $s = 2{,}5 + 0{,}05\,d$ (Seite 89) entsprechend ausgeführt ist. Hinter diesem Ansatz giebt man dem Stiel die Stärke d. Der Bolzen wird schwach conisch (mit einer Differenz der Durchmesser gleich $^1/_{100}$ der Stiellänge) abgedreht, in die Kurbelzapfenhülse eingeschliffen und noch durch einen Keil von der Höhe 0,7d, der Breite 0,2d, oder durch eine Schraube von der Stärke 0,33d befestigt. Statt den Stiel nach dem Ende hin zu verjüngen, kann man ihn auch nach diesem hin verdicken (aber ebenfalls schwach conisch), und denselben

Digitized by Google

dann mittelst eines Querkeiles sichern (Fig. 3ᵉ, Bl. LXXVIII.) Seltener wird wohl der Bolzen cylindrisch ausgeführt, die Bohrung aber nur so groß gemacht, um im warmen Zustande den Stiel aufzunehmen, während dieselbe ihn im erkalteten fest umschließt. Wegen der Veränderlichkeit der Kraftwirkung muß die Verbindung möglichst sorgfältig ausgeführt werden, weil sich der Zapfen bei ungenauer Herstellung sehr bald lockern würde. Am vortheilhaftesten würde es sein, den Zapfen sammt dem Kurbelarm aus einem Stück herzustellen, was bei schmiedeisernen Kurbeln leicht durch Umbiegen des oberen Endes des Armes zu erreichen ist.

Die Kurbel wird auf den Wellenhals entweder warm aufgezogen, und wird für diesen Fall, falls die Kurbel aus Schmiedeisen, die Differenz zwischen Bohrung und Axkopfdurchmesser gleich $^1/_{100}$ D, für Gußeisen-Kurbeln jedoch gleich $^1/_{1200}$ D genommen, in beiden Fällen wird die Elasticitätsgrenze des Materials noch nicht überschritten; oder die Bohrung der Nabe sowie der Axkopf werden schwach conisch (wie oben bei der Zapfenhülse) gebildet, und die Kurbel mittelst Preßwerks aufgetrieben. In beiden Fällen muß die Verbindung noch durch einen oder zwei Keile gesichert werden, welche eine Breite

$$k_1 = 3 s_1 \cdot \text{ und eine Höhe}$$

$k_2 = {}^1/_2\, k_1$ erhalten, wenn $s_1 = 2{,}5 + 0{,}05\, D$ ist.

Um gußeiserne Kurbeln gegen Bruch zu sichern, zieht man in neuerer Zeit über die Kurbel einen schmiedeisernen Ring warm auf. Derselbe muß jedoch vor dem Ausbohren der Kurbelzapfenhülse und der Nabe aufgezogen werden, weil sonst die genau gebohrten Löcher durch das Schwinden des Ringes beim Erkalten deformirt werden. In diesem Fall wird der Arm mit gleicher Breite b durchgeführt und die Vorderansicht so gebildet, wie es die schraffirte Fig. 1, Bl. LXXVIII angiebt.

Aufgabe 1. Für eine Dampfmaschine von 400^{mm} Cylinderdurchmesser und 3 Atmosphären Dampfspannung soll eine Kurbel construirt werden. Die Kurbellänge habe sich zu 400^{mm} ergeben.

a) Für Schmiedeisen:

Um die Berechnung vorzunehmen, muß erst P bestimmt werden. Da 1 Atm. dem Druck von 1 Kilogr. pr. □^{mm} entspricht, so ist der ganze Druck hinter dem Kolben, wie auch der Druck auf den Kurbelzapfen:

$$P = \frac{400^2 \pi}{4} \cdot \frac{3}{100} = 3768 \sim 3800 \text{ Klgr.}$$

Für einen schmiedeisernen Zapfen haben wir nun zu nehmen:

$$d = 1{,}13 \sqrt{3800} = 1{,}13 \,.\, 61{,}6 = 69{,}6 \sim 70^{mm}.$$

Hiermit ist die Länge desselben:

$$l = 1{,}5\, d = 1{,}5 \,.\, 70 = 105^{mm}$$

und die Schulterhöhe des Zapfens:

$$s = 2{,}5 + 0{,}05\, d = 2{,}5 + 0{,}05 \,.\, 70 \sim 6^{mm},$$

sowie die Breite des Anlaufes

$$1^1/_2\, s = 1^1/_2 \,.\, 6 = 9^{mm}.$$

Die Stärke der Hülse nehmen wir:

$$\delta = 0{,}5\, d = 0{,}5 \,.\, 70 = 35^{mm},$$

und deren Länge:

$$\lambda_1 = 1{,}5\, d = 1{,}5 \,.\, 70 = 105^{mm}.$$

Digitized by Google

Die Axe erhält unter Voraussetzung, daß dieselbe ebenfalls aus Schmiedeisen gefertigt ist, einen Durchmesser, welcher sich aus Formel 131ª:

$$\frac{D}{b} = \sqrt[3]{\frac{A}{b}} = \sqrt[3]{\frac{400}{70}} = \sqrt[3]{5{,}714} = 1{,}79,$$

demnach $D = 1{,}79\,b = 1{,}79 \cdot 70 = 125^{mm}$ ergiebt.

Zur Berechnung der Nabe nehmen wir das gebräuchliche Verhältniß: $\varphi = 2{,}5$ und erhalten aus Formel 132ª:

$$\frac{w}{D} = 0{,}7\sqrt{\frac{1}{2{,}5}} = 0{,}7 \cdot 0{,}632 = 44{,}24 \text{ und hiermit}$$

die Wanddicke: $w = 44{,}25 \cdot 125 = 55^{mm}$,
die Länge: $\lambda = 2{,}5 \cdot 55 = 137^{mm}$.

Für den Armquerschnitt setzen wir $\psi = 0{,}4$, und giebt dann Frml. 133ª:

$$\frac{h}{b} = \sqrt[3]{\frac{A}{b} \cdot \frac{1}{\psi}} = \sqrt[3]{\frac{400}{70} \cdot \frac{1}{0{,}4}} = 2{,}42;$$

demnach die Höhe $h = 2{,}42\,b = 2{,}42 \cdot 70 \sim 170^{mm}$
und die Breite $b = 0{,}4 \cdot h = 0{,}4 \cdot 170 = 68^{mm}$.

Die Anlaufhöhe der Axe wird:

$$s_1 = 2{,}5 + 0{,}05 \cdot 125 \sim 9^{mm}$$

und hieraus

die Keilbreite $k_1 = 3 \cdot s_1 = 27^{mm}$,
die Keilhöhe: $k_2 = {}^1/_2 k_1 = 13{,}5^{mm}$.

Hiermit sind die Dimensionen vollkommen bestimmt. Wird ein Kugelzapfen angewendet, so erhält derselbe einen Kugeldurchmesser:

$$b' = 1{,}5\,b = 105^{mm}.$$

Die Entfernung des Kugelmittels von der Stirnfläche der Kurbel bleibt dieselbe wie beim Stirnzapfen.

b) Gußeiserne Kurbel mit gußeiserner Welle.

Der Zapfen behält den oben berechneten Durchmesser $b = 70^{mm}$ und Länge $l = 105^{mm}$.

Die Zapfenhülse erhält aber jetzt
eine Länge: $\lambda_1 = 1{,}8\,b = 1{,}8 \cdot 70 = 126^{mm}$ und
eine Stärke: $\delta_1 = 0{,}7\,b = 0{,}7 \cdot 70 = 49^{mm}$.

Die Welle erhält nach 131ᵇ einen Durchmesser:

$$D = 1{,}25\,b\sqrt[3]{\frac{A}{b}} = 1{,}25\,b\sqrt[3]{\frac{400}{70}} = 1{,}79 \cdot 1{,}25 \cdot 70 = 160^{mm}.$$

Für gußeiserne Kurbeln wird in der Regel $\varphi = 3$ gesetzt, und erhält man dann, da sowohl Nabe als auch Wellenhals aus Gußeisen sind:

$$\frac{w}{D} = 07\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7 \cdot 0{,}577 = 0{,}404 \text{ oder}$$

die Nabendicke: $w = 0{,}404 \cdot D = 0{,}404 \cdot 160 = 64^{mm}$ und
die Länge: $\lambda = 3 \cdot 64 = 192^{mm}$.

Zur Berechnung des Armes ist $\psi = {}^1/_3$ zu nehmen, wofür sich ergiebt:

Digitized by Google

$$\frac{h}{b} = 1{,}25 \sqrt[8]{\frac{A}{b}\,\frac{1}{1/3}} = 1{,}25 \,.\, 2{,}58 = 3{,}23 \text{ oder}$$

die Höhe: $h = 3{,}23 \,.\, b = 3{,}25 \,.\, 70 = 226^{mm}$,

die Breite: $b = 1/3 \,.\, h = 1/3 \,.\, 226 = 75^{mm}$.

Die Breite der Mittelrippe nehmen wir $= 1/2\, b = 37^{mm}$.

Die Anlaufhöhe des Axkopfes ist:

$$s_1 = 2{,}5 + 0{,}05\, b = 2{,}5 + 0{,}05 \,.\, 160 \sim 11^{mm},$$

die Keilbreite: $k_1 = 3 s_1 = 3 \,.\, 11 = 33^{mm}$ und schließlich

die Keilhöhe: $k_2 = 1\,1/2\, s_1 = 16{,}5^{mm}$.

Die Armhöhe wie auch die Armbreite sind in Fig. 4, Bl. LXXVIII nach den Enden hin auf $2/3$ der Dimensionen an der Nabe verschwächt, und wird hier:

$$h_1 = 2/3\, h = 2/3 \,.\, 226 = 150^{mm},$$
$$b_2 = 2/3\, b = 2/3 \,.\, 75 = 50^{mm}.$$

Gegenkurbel.

Eine Gegenkurbel nennt man eine Kurbel oder einen Krummzapfen, welcher von dem Kurbelzapfen einer Stirnkurbel ausgeht. Der Arm der Gegenkurbel ist in den meisten Fällen dem Hauptarme entgegengesetzt. Angewendet werden derartige Gegenkurbeln zum Betrieb der Steurungsmechanismen der Dampfmaschinen. Diese setzen der Bewegung stets einen bedeutenden Widerstand entgegen, welcher von der Gegenkurbel, die selbst von der Hauptkurbel getrieben werden muß, überwunden wird; es wird daher in der Regel der am Gegenkurbelzapfen wirkende Druck dem am Hauptzapfen wirkenden entgegengesetzt sein. Dadurch wird aber das biegende Moment für die Befestigungsstelle des Hauptzapfens ein geringeres, als solches früher bei Berechnung desselben zu Grunde gelegt wurde.

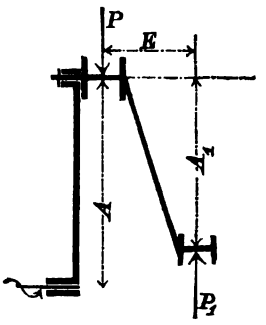


Fig. 215.

Ist jedoch, was seltener vorkommt, der Druck am Gegenzapfen mit demjenigen am Hauptzapfen gleichgerichtet, so wird dadurch der Moment an der betreffenden Stelle vermehrt. Außer dem, von der am Gegenzapfen wirkenden Kraft P_1, herrührenden Biegungsmoment, hat der Hauptzapfen auch noch ein verdrehendes Moment auszuhalten, und müßte demnach der Hauptzapfen auf zusammengesetzte Festigkeit berechnet werden. Die Entfernung der Mittelebene des Hauptzapfens von derjenigen des Gegenzapfens sei E, die Gegenkurbellänge A_1, dann ist das biegende Moment für die Mitte des Hauptzapfens, wenn P und P_1 entgegengesetzt gerichtet sind, $P_1 E$ und das verdrehende Moment $P_1 A_1$; aus diesen beiden haben wir nach der Frml. 50 pag. 144 das combinirte Moment und hieraus den Durchmesser des Hauptzapfens zu berechnen. Würde diese Berechnung, wie es bei kleiner Kraft P_1 und kleinen Hebelarmen E und A_1 vorkommen kann, kleinere Werthe geben, als wenn der Hauptzapfen nach der auf ihn wirkenden Kraft P berechnet wurde, so müßte der letzte Werth genommen werden.

Sind jedoch P und P_1 gleich gerichtet, dann ist das Biegungsmoment für

Digitized by Google

die Einklemmungsstelle $= P\frac{l}{2} + P_1\left(E + \frac{l}{2}\right)$, welches mit $P_1 A_1$ zusammen das zur Berechnung des Durchmessers nöthige combinirte Moment liefern würde. Hierbei ist l die Länge desjenigen Zapfens, welcher allein nach der, auf ihm wirkenden, Kraft P bestimmt wäre. Da die Abnutzung eines Zapfens direct proportional dem auf ihm wirkenden Drucke, umgekehrt proportional der Länge des Zapfens, aber unabhängig vom Durchmesser ist, so muß hier auch diejenige Länge des Hauptzapfens beibehalten werden, welche unter Bezugnahme auf das Verhältniß $\frac{l}{d} = 1{,}5$ dem Druck P entspricht.

Der Gegenzapfen sowie der Gegenkurbelarm werden ganz wie bei einer gewöhnlichen Stirnkurbel berechnet. Ebenso berechnet man den Hauptarm und die Hauptwelle, wie oben, nach der Kraft P, da strenggenommen die früher in die Rechnung eingesetzten Momente noch um das Moment des Gegenzapfendruckes verringert werden, wenn der Gegenarm die am Gegenkurbelzapfen wirkende Kraft sofort abgiebt. Bei Berechnung der Dimensionen des Gegenarmes geht man von der Höhe des Armes aus, da man die Seiten des Armes tangential an die Anläufe des Haupt- und Gegenzapfens legt. Zur Berechnung der Breite, gemessen am Hauptzapfen, kann dann folgendermaßen verfahren werden. Das Biegungsmoment für diese Stelle ist $P_1 A_1$ und demnach:

$P_1 A_1 = q \cdot s_1$. Da der Querschnitt ein Rechteck ist, so ist $q = {}^1/_6\, b_n h_n^2$, wenn b_n und h_n die Dimensionen desselben sind. Hieraus ergiebt sich:

$P_1 A_1 = {}^1/_6\, b_n h_n^2 s_1$. Für den Gegenkurbelzapfen haben wir die Gleichung: $\frac{P_1 l_n}{2} = \frac{\pi}{32} d_n^3 s$, und folgt durch Division der beiden Werthe:

$$\frac{2 A_1}{l_n} = \frac{32}{\pi \cdot 6} \cdot \frac{b_n \cdot h_n^2}{d_n^3} \cdot \frac{s_1}{s} \text{ oder}$$

$$b_n = {}^3/_8\, \pi A_1 \frac{d_n^2}{h_n^2} \frac{d_n}{l_n} \frac{s}{s_1} \quad \ldots \quad (134).$$

Setzt man hierin wie früher $s = 6$, $s_1 = 5$, sowie $\frac{l_n}{d_n} = 1{,}5$, so findet man für Schmiedeisen:

$$b_n = 0{,}95 \frac{A_1 d^2}{h_n^2} \quad \ldots \quad (134^a).$$

Die Gegenkurbel wird meistentheils mit dem Hauptzapfen aus einem Stück hergestellt und in dem guß- oder schmiedeisernen Hauptarm befestigt. Weniger häufig werden Hauptarm und Gegenarm aus Gußeisen gebildet und schmiedeiserne Zapfen eingesetzt. Schmiedeiserne Gegenarme werden, um ihnen ein möglichst gutes Aussehen zu geben, mit Abfasungen versehen, welche aber, um gut hervorzutreten, recht scharfkantig gemacht werden müssen.

Aufgabe 1. Zu der oben berechneten gußeisernen Kurbel soll eine Gegenkurbel berechnet werden, bei welcher $A_1 = 300$, $E = 250$ und $P_1 = 800$ Klgr. ist. Die Kraft P_1 soll der Kraft $P = 3800$ Klgr. entgegengerichtet sein. Für den früheren Hauptzapfen fanden wir $d = 70^{mm}$ und $l = 105^{mm}$ (dieser

Digitized by Google

Zapfen ist in Fig. 4, Bl. LXXVIII punktiert gezeichnet). Für den Fall einer Gegenkurbel ist für die Mitte des Hauptzapfens:

das biegende Moment $M_b = P_1 E = 800 . 250 = 200000^{kmm}$,

das verdrehende Moment $M_d = P_1 A_1 = 800 . 350 = 280000$ „

demnach das combinirte Moment, welches als biegendes Moment behandelt werden muß:

$$M = {}^3/_8 M_b + {}^5/_8 \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = 75000 + {}^5/_8 \sqrt{(200000)^2 + 280000)^2}$$
$$= 290000^{kmm}.$$

Nach der Festigkeitslehre ist nun:

$$M = qs = \frac{\pi}{32} b_1^3 s, \text{ wenn } b_1 \text{ der neue Durchmesser des}$$

Kurbelzapfens ist, und hieraus mit $s = 6^k$:

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{M}{6}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{290000}{6}} = 78{,}5 \sim 7^{mm};$$

die Länge bleibt: $l = 105^{mm}$.

Die Anlaufhöhe wird jetzt aber:

$$s = 2{,}5 + 0{,}05 . 79 = 6{,}4 \sim 7^{mm}.$$

Der Gegenzapfen wird nach derselben Formel wie der Hauptzapfen berechnet, und ergiebt diese:

$$b_„ = 1{,}13 \sqrt{P_1} = 1{,}13 \sqrt{800} \sim 32^{mm},$$

dessen Länge: $l_„ = 1{,}5\, b_„ = 1{,}5 . 32 = 48^{mm}$.

Die Anlaufhöhe wird:

$$s_„ = 2{,}5 + 0{,}05 . 32 \sim 4^{mm}.$$

Da die Seiten des Armes tangential an die Anläufe gerichtet sein sollen, so ergiebt sich die Höhe des Armes, am Hauptkurbelzapfen gemessen:

$$h_„ = b_1 + 2s = 79 + 2 . 7 = 93.$$

Hiermit findet sich die Breite nach Formel 134ª:

$$b_„ = 0{,}95 . \frac{A_1 . b_„^2}{h_„^2} . = 0{,}95 . \frac{350 . 79^2}{93^2} \sim 40^{mm}.$$

Die Gegenkurbel in in Fig. 4, Bl. LXXVIII verzeichnet. Da die Höhe $h_„$ bis zum Gegenzapfen auf die Hälfte abnimmt, so wurde der Arm mit constanter Breite $b_„$ ausgeführt. Würde die Höhe am Gegenzapfen $h_„' > {}^1/_2 h_„$ sein, so könnte auch die Breite an jener Stelle $b_„' < b_„$ genommen werden.

Kurbelaxen.

Wellen, welche zwischen zwei Lagern zu einer oder mehreren Kurbeln ausgebogen sind, heißen Kurbelaxen, Krammaxen, oder die Ausbiegung heißt Wellenkröpfung. Dieselben finden meistens da Anwendung, wo von einer Kurbel aus nach beiden Seiten hin eine Kraftableitung stattfinden soll. Seltener findet man sie da angewendet, wo die Krafttransmission nur nach einer Seite hin erfolgt. Je nachdem sich zwischen den Lagern nur eine oder mehrere Kurbeln befinden, heißen die Axen einfach oder mehrfach gekröpfte Wellen. Für die Berechnung müssen beide Fälle getrennt werden. Betrachten wir zuerst die einfach

Digitized by Google

gekröpften Wellen, so sind auch hier wieder, wie schon oben angedeutet, zwei Unterabtheilungen, je nachdem die Welle nach der einen oder beiden Seiten hin die Kraft fortleitet, zu unterscheiden.

a) Einfach gekröpfte Welle, einseitige Kraftfortleitung.

Die Welle ist hier auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Durch die am Kurbelzapfen a wirkende Kraft erfährt die in den Lagern b und c liegende Welle eine Biegung, und, da die Kraft P nicht direkt an der Welle, sondern außerhalb am Hebelarm A angreift, auch noch eine Verdrehung. Wird das Kraftmoment nach der Seite c transmittirt, dann findet folgende Kraftvertheilung in der Welle statt. Der Zapfen b ist einfach als Tragzapfen zu berechnen, da derselbe nur den Auflagedruck, welcher von der Kraft P herrührt, auszuhalten hat. Der Kurbelzapfen a hat nur ein Biegungsmoment, herrührend von der Durchbiegung der ganzen Welle, aufzunehmen, wenn wir das kleine verdrehende Moment, entstanden durch die am Umfange des Zapfens wirkende Zapfenreibung vernachlässigen. Das Stück dc allein hat das verdrehende Moment, und außerdem auch noch ein verbiegendes Moment aufzunehmen. Was nun den Lagerzapfen c anbelangt, so hat man kein genaues Criterium darüber, wie groß das auszuhaltende Biegungsmoment für denselben zu nehmen ist, da dasselbe abhängt von den außerhalb c auf die Welle wirkenden Massen, und demnach für jeden speciellen Fall berechnet werden müßte, wir glauben jedoch nicht fehl zu gehen, wenn wir bei Aufstellung der Formeln für c, die Welle als an dieser Stelle eingespannt denken. Das auszuhaltende Biegungsmoment ist dann für diese Stelle $^3/_{16}$ PL, wenn L die Entfernung der beiden Lagermittel b und c von einander ist. Wollte man die Welle in c auch als freiaufliegend ansehen, dann würde hier das Biegungsmoment Null sein, und würde man, wenn man die Welle an dieser Stelle einfach als Torsionswelle berechnet, viel zu geringe Dimensionen erhalten. Auch für die Welle a resp. d müssen wir den ungünstigsten Fall annehmen, welcher aber hier eintritt, wenn sowohl bei b als auch c die Welle freiaufliegend angesehen wird. Für diese Annahme ist dann das in Rechnung zu ziehende Biegungsmoment gleich $\frac{PL}{4}$. Hiermit ergeben sich nun folgende Formeln. Würde man statt einer Kurbelaxe eine gewöhnliche Stirnkurbel anwenden, so hätten wir nach Früherem den Durchmesser d des Kurbelzapfens nach der Formel zu bestimmen:

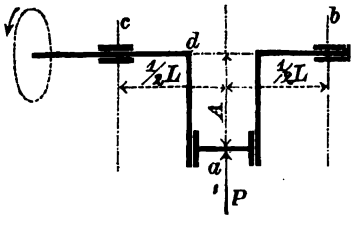


Fig. 216.

$$P\,\frac{l}{2} = d^3\,\frac{\pi}{32}\,s \quad \text{. . (I)}$$

unter l die Länge des Zapfens verstanden. Auf diesen ideellen Durchmesser sollen nun die sämmtlichen Dimensionen fernerhin bezogen werden, unter Voraussetzung gleicher Sicherheit, das heißt, für eine Maximal-Anspannung s in allen Querschnitten der Welle.

Liegt die Welle in b und c frei auf, so ist an beiden Wellen die Lagerreaction $\frac{P}{2}$, und ist für diesen der Durchmesser d_n im Lagerhals b zu berechnen. Ist l_n seine Länge, dann ist nach der Biegungsfestigkeit:

Digitized by Google

$$\frac{P}{2}\frac{l_n}{2} = qs = d_n^3 \frac{\pi}{3} s,$$

oder mit obiger Formel I in Beziehung gesetzt, indem durch dieselbe dividirt wird:

$$\frac{l_n}{2l} = \frac{d_n^3}{d^3}, \text{ woraus, wenn } \frac{l}{d} = \frac{l_n}{d_n} = 1{,}5 \text{ gesetzt wird, folgt:}$$

$$\frac{d_n^3}{d} = \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{d_n}{d} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7 \ldots (135).$$

Für den Kurbelzapfen a haben wir mit obigen Annahmen, wenn das Biegungsmoment $= \frac{PL}{4}$ gesetzt wird, die Beziehung:

$$\frac{PL}{4} = q \cdot s = d_1^3 \frac{\pi}{32} s, \text{ wenn man den wirklichen}$$

Kurbelzapfendurchmesser mit d_1 bezeichnet. Bringt man diese Formel auf ähnliche Weise wie oben mit der Formel für den ideellen Kurbelzapfen in Relation, so findet sich: $\frac{L}{2l} = \frac{d_1^3}{d^3}$, woraus:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[3]{\frac{L}{2l}} = 0{,}793 \sqrt[3]{\frac{L}{l}} \ldots (136).$$

Die Länge dieses neuen Zapfens bleibt, aus denselben Gründen wie bereits bei dem Hauptzapfen der Gegenkurbel erwähnt, gleich 1,5 d.

Der Durchmesser D_1 beim Uebergang d des Armes in die Welle kann folgendermaßen berechnet werden. Das Biegungsmoment für diese Stelle wollen wir gleich dem im Kurbelzapfen a annehmen. Diese Forderung ist nicht ganz richtig, da im Punkte d ein etwas kleineres Moment stattfindet, indem letzteres von a aus nach c hin abnimmt; immerhin erhält man eher etwas zu starke als zu schwache Dimensionen. Es ist dann:

das Biegungsmoment $M^1 = \frac{PL}{4}$,

das Torsionsmoment $M_d = PA$, da das ganze in die Richtung c fortgeleitet wird, und ergiebt sich hieraus das combinirte Moment:

$$M = {}^3/_8 M_b + {}^5/_8 \sqrt{M_b^2 + M_d^3} = {}^3/_8 \frac{PL}{4} + {}^5/_8 \sqrt{\left(\frac{PL}{4}\right)^2 + (PA)^2}$$

$$= {}^3/_{32} PL + {}^5/_8 \frac{PL}{4} \sqrt{1 + 16\left(\frac{A}{L}\right)^2} = \frac{PL}{32}\left(3 + 5\sqrt{1 + 16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right);$$

demnach: $= \frac{PL}{32}\left(3 + 5\sqrt{1 + 16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right) = qs = \frac{D_1^3 \pi}{32} s.$

Durch Formel I dividirt, ergiebt:

$$\frac{L}{16l}\left(3 + 5\sqrt{1 + 16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right) = \frac{D_1^3}{d^3}, \text{ oder}$$

$$\frac{D_1}{d} = \sqrt[3]{\frac{L}{16l}\left(3 + 5\sqrt{1 + 16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} \ldots (137).$$

Für den Durchmesser D im Lagerhals c können wir mit dem oben angenommenen Werthe des Biegungsmomentes folgende Beziehung aufstellen.

Digitized by Google

Es ist: das Biegungsmoment $M_b = {}^3/_{16}\,PL$

das Torsionsmoment $M_d = PA$, demnach nach der obigen Formel, das combinirte Moment:

$$M = {}^3/_8 \cdot {}^3/_{16} PL + {}^5/_8 \sqrt{({}^3/_{16} PL)^2 + (PA)^2} = \frac{9}{128} PL + {}^5/_8 \cdot {}^1/_{16} PL \sqrt{9 + 256\left(\frac{A}{L}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{128} PL\left(9 + 5\sqrt{9 + 256\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right).$$

Daher ist: $\frac{1}{128} PL\left(9 + 5\sqrt{9 + 256\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right) = q\,s = \frac{\pi}{32} D^3 s$ und nach obiger Methode: $\frac{L}{64\,l}\left(9 + 5\sqrt{9 + 256\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right) = \frac{D^3}{b^3}$, woraus:

$$\frac{D}{b} = {}^1/_4 \sqrt[3]{\frac{L}{l}\left(9 + 5\sqrt{9 + 256\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} \quad \ldots \quad (138).$$

Was nun die Kurbelarme anbelangt, so können dieselben auf gleiche Weise bestimmt werden, wie der Arm einer Gegenkurbel, indem man hier die Seitenflächen der Arme tangential einerseits an die Anläufe des Kurbelzapfens, andrerseits an den Kreis vom berechneten Durchmesser D_1 auslaufen läßt. Der Arm an derjenigen Seite, nach welcher die Kraft nicht transmittirt wird, könnte eigentlich einen geringeren Querschnitt erhalten, jedoch zieht man es vor, um der Kurbel ein stabileres Ansehen zu geben, auch diesen ebenso stark als den übertragenden Arm zu bilden.

Aufgabe: Er soll eine einseitig übertragende Kurbelaxe construirt werden, für welche die am Kurbelzapfen angreifende Kraft $P = 3800$ Kilogr. ist. Die Entfernung der Lager b und c von einander möge $L = 800^{mm}$ und der Kurbelradius $A = 400^{mm}$ betragen.

Auflösung. Der ideale Kurbelzapfen erhält nach gegebener Formel einen Durchmesser:

$$b = 1{,}13\sqrt{3800} = 1{,}13 \cdot 61{,}6 \sim 70^{mm}$$

und eine Länge $l = 1{,}5\,b = 1{,}5 \cdot 70 = 105^{mm}$.

Hiermit wird nach Formel 135 der Durchmesser des Lagerhalses b:

$$b_n = 0{,}7\,b = 0{,}7 \cdot 70 = 49^{mm},$$

und dessen Länge: $l_n = 1{,}5\,b_n = 1{,}5 \cdot 49 = 73{,}5^{mm}$.

Der wirkliche Kurbelzapfen wird nach (136) bestimmt, und erhalten wir:

$$\frac{b_1}{b} = 0{,}793\sqrt[3]{\frac{L}{l}} = 0{,}793\sqrt[3]{\frac{800}{105}} = 1{,}97 \cdot 0{,}793 = 1{,}56$$

und $b_1 = 1{,}56 \cdot 70 = 109^{mm}$, wobei jedoch dessen Länge $l = 105^{mm}$ bleibt.

Die Anlaufhöhe wird:

$$s = 2{,}5 + 0{,}05\,b_1 = 2{,}5 + 0{,}05 \cdot 109 = 8^{mm}.$$

Der Durchmesser D_1 ergiebt sich aus (137):

$$\frac{D_1}{b} = \sqrt[3]{\frac{L}{16\,l}\left(3 + 5\sqrt{1 + 16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{800}{16 \cdot 105}\left(3 + 5\sqrt{1 + 16\left(\frac{400}{800}\right)^2}\right)}$$

$= 1{,}89$, woraus

$D_1 = 1{,}89\,b = 1{,}89 \cdot 70 = 132^{mm}$.

Digitized by Google

$$\frac{D}{d} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{L}{l}\left(9+5\sqrt{9+256\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{800}{105}\left(9+5\sqrt{9+256\left(\frac{400}{800}\right)^2}\right)}$$

$= 1{,}82$, womit

$D = 1{,}82 \,.\, 70 = 127^{mm}$. Die Anlaufhöhe ergiebt sich:

$$s_1 = 2{,}5 + 0{,}05 \,.\, 127 = 9^{mm}.$$

Die Länge des Lagerhalses müßte nach dem auf denselben fallenden Druck bestimmt werden. Da nun aber die außerhalb c angebrachten Massen nicht bekannt sind, so haben wir bei der Verzeichnung dieser Welle als Mittelwerth die Länge gleich 1,2 D angenommen.

Zur Berechnung der Arme müssen wir die Höhe derselben an der Axe, sowie den Kurbelzapfen-Durchmesser d, in die Frml. 134ª einsetzen, wir erhalten daraus die Breite des Armes, gemessen in der Mittellinie der Welle:

$$b = 0{,}95 \,.\, \frac{Ad^2}{h^2} \text{ oder da } h = D_1 = 132^{mm} \text{ ist:}$$

$$b = 0{,}95 \,.\, \frac{400 \,.\, 70^2}{132^2} = 108^{mm}.$$

Da die Höhe des Armes am Kurbelzapfen gemessen

$$h_1 = d_1 + 2s = 109 + 2 \,.\, 8 = 125^{mm},$$

also nahe gleich h selbst wird, so können wir die Breite am Kurbelzapfen $b_1 = 0{,}66$ machen. (Siehe Fig. 1, Bl. LXXIX.)

b) Einfach gekröpfte Kurbelaxe mit zweiseitiger Kraftableitung.

Die Berechnung bleibt ganz dieselbe wie oben. Auch hier wird die Welle mit Ausnahme des Kurbelzapfens auf zusammengesetzte Biegungs- und Torsionsfestigkeit zu berechnen sein. Bei Aufstellung der Biegungsmomente in den einzelnen ausgezeichneten Punkten muß man jedoch hier andere Annahmen machen. Da hier außerhalb der beiden Lager b und c wahrscheinlich noch Massen auf der Welle angebracht sein werden, so wird auch sowohl im Punkt b als auch c (s. vorige Figur) ein Biegungsmoment wirken, dessen Größe von der betr. Masse abhängig ist. Um auch hier Formeln aufzustellen, welche für die gewöhnlichen Fälle, d. h. wenn die Massen und deren Hebelarme in Bezug auf b und c nicht sehr groß sind, angewendet werden können, wollen wir uns die Welle in b und c als eingespannt denken, es ist dann in diesen Punkten, unter Voraussetzung, daß die Kröpfung in der Mitte zwischen b und c liegt, das Biegungsmoment gleich $\frac{Pl}{8}$. Für den Kurbelzapfen wollen wir den ungünstigsten Fall beibehalten, welcher dann eintritt, wenn die Welle bei b und c frei aufliegend angenommen wird, dann ist wie früher das Biegungsmoment in a, als auch in d gleich $\frac{PL}{4}$. In Betreff des Torsionsmomentes tritt hier nur die Aenderung ein, daß dasselbe, weil nach beiden Seiten hin übertragen, nur gleich $\frac{PA}{2}$ in Rechnung gebracht zu werden braucht. Unter dieser Bedingung bleibt die Formel für den wirklichen Kurbelzapfen d_1 dieselbe, wie sie in (136) abgeleitet wurde.

Für den Puukt b und c erhalten wir hier folgende Werthe:

Digitized by Google

das Biegungsmoment $M_b = {}^1/_8\,PL$

das Torsionsmoment $M_d = {}^1/_2\,PA$ und daraus das combinirte Moment wie oben:

$$M = {}^3/_8 \cdot {}^1/_8\,PL + {}^5/_8\,\sqrt{({}^1/_8\,PL)^2 + ({}^1/_2\,PA)^2}$$

$$= {}^3/_{64}\,PL + {}^5/_{64}\,PL\,\sqrt{1+16\left(\frac{A}{L}\right)^2} = \frac{PL}{64}\left(3+5\sqrt{1+16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right),$$

demnach:
$$\frac{PL}{64}\left(3+5\sqrt{1+16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right) = \frac{\pi}{32}D'^3 s.$$

Combiniren wir diese Formel mit der für den ideellen Kurbelzapfen, wie es oben bereits stets geschehen ist, so folgt:

$$\frac{L}{32l}\left(3+5\sqrt{1+16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right) = \frac{D'^3}{b^3} \text{ oder}$$

$$\frac{D'}{b} + {}^1/_4\sqrt[3]{\frac{2L}{l}\left(3+5\sqrt{1+16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} \quad \ldots \quad (139).$$

Für den Uebergang A des Kurbelarmes in der Welle ist nach obigen Bestimmungen:

das Biegungsmoment $M_b = \frac{PL}{4}$,

das Torsionsmoment $M_d = \frac{PL}{2}$

und damit das combinirte Moment:

$$M = {}^3/_8 \cdot {}^1/_4\,PL + {}^5/_8\sqrt{\left(\frac{PL}{4}\right)^2 + \left(\frac{PA}{2}\right)^2} = {}^1/_{32}\,PL\left(3+5\sqrt{1+4\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right).$$

Hiermit ergiebt sich auf gleiche Weise wie oben:

$$\frac{D'_1}{b} = {}^1/_2\sqrt[3]{\frac{L}{2l}\left(3+5\sqrt{1+4\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} \quad \ldots \quad (140).$$

Die Breite b des Armes ist auch hier ebenso, wie für die vorige Welle zu bestimmen, nur muß der aus Formel 134ª resultirende Werth halbirt werden, da 2 Arme das torsirende Moment zu übertragen haben.

Aufgabe. Die vorige Axe soll so berechnet werden, daß das Torsionsmoment nach beiden Seiten übertragen wird.

Auflösung. Der ideelle Kurbelzapfen bleibt derselbe, also:

$$b = 70, \quad l = 105; \text{ ebenso bleibt auch}$$
$$b_1 = 109.$$

Der Durchmesser an der Stelle d, berechnet sich aus (140), und ergiebt:

$$D'_1 = {}^1/_2 b\sqrt[3]{\frac{L}{2l}\left(3+5\sqrt{1+4\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} = {}^1/_2 \cdot 70\sqrt[3]{\frac{800}{2\cdot 105}\left(3+5\sqrt{1+4\left(\frac{400}{800}\right)^2}\right)}$$

$= 116^{mm}$, welcher auf 120^{mm} abgerundet ist.

Ebenso ergiebt der Lagerhalsdurchmesser D' bei b und c:

$$D' = {}^1/_4 b\sqrt[3]{\frac{2L}{l}\left(3+5\sqrt{1+16\left(\frac{A}{L}\right)^2}\right)} = {}^1/_4 \cdot 70\sqrt[3]{\frac{2\cdot 800}{105}\left(3+5\sqrt{1+16\left(\frac{400}{800}\right)^2}\right)}$$

$= 104.$

Digitized by Google

Die Anläufe für letzteren werden:

$$s_1 = 2{,}5 = 0{,}05 \,.\, 104 = 7{,}5^{mm}.$$

Zur Berechnung der Armbreite b benutzen wir 134ª und finden, mit obiger Annahme, da auch $h = 116^m$ ist:

$$b = {}^1/_2 \cdot \frac{A \,.\, b^2}{h^2} = {}^1/_2 \cdot \frac{400 \,.\, 70^2}{116^2} = 73^{mm}.$$

(Siehe Fig. 2ª, Bl. LXXIX.)

c) Mehrfach gekröpfte Wellen.

Diese finden ihre Anwendung da, wo entweder auf eine Welle von mehreren Kraftmaschinen Kraftübertragungen, oder von einer Welle mittelst Kurbel auf mehrere Arbeitsmaschinen Kraftableitungen stattfinden sollen.

Eine theoretische, für alle besonderen Fälle geltende Berechnung ist hier nicht durchzuführen, sondern muß für jeden speciellen Fall eine besondere Berechnung gemacht werden. Da hier die biegenden und verdrehenden Kräfte in der Regel ziemlich verwickelter Art sind, so muß sowohl bei der Berechnung als auch Construction der Wellen sorgfältig verfahren werden.

Wir wollen für eine ganz bestimmte Annahme eine solche Berechnung vornehmen.

Aufgabe. Es soll eine zweifach gekröpfte Welle berechnet werden, welche zum Betriebe zweier neben einander liegender Pumpen dienen soll. Dieselben sollen einfach wirkend sein, sodaß nur bei der Bewegung des Kolbens in einer Richtung eine bedeutende Kraft beansprucht wird. Außerdem mögen sich die beiden Kolben stets in entgegengesetztem Sinne bewegen, in welchem Falle die Kurbeln unter 180° geneigt sein müssen. Damit tritt hier die Vereinfachung ein, daß stets nur die eine Knrbel zeitweilig belastet wird. Die Kraft zur Ueberwindung des Pumpenwiderstandes betrage für jede Pumpe $P = 3000^{kgr}$. Die Mittellinie der Pumpen, also auch die Mittellinie der beiden Kurbelzapfenmittel haben eine Entfernung von 450^{mm}. Die Lager haben von einander eine Entfernung von 900^{mm}. Der Betrieb der Welle werde durch eine Riemenscheibe vermittelt, deren Gewicht jedoch, als gering gegen den betreffenden Druck von 3000^{kgr} vernachlässigt werden soll.

Auflösung. Der Zapfen bei b ist ein einfacher Tragzapfen, dessen Druck am größten wird, wenn der Widerstand der ersten Pumpe am Kurbelzapfen zu überwinden ist. Es ist dann der Auflagedruck (siehe Seite 104)

$$P_1 = \frac{3000 \,.\, 675}{900} = 2250^{kgr}.$$

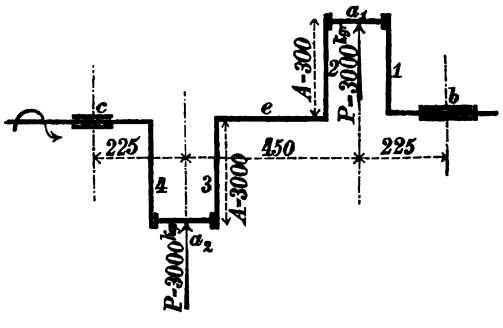


Fig. 217.

Diesem entspricht Frml. (31) pag. 91, ein Durchmesser

$$b' = 1{,}13 \sqrt{P_1} = 1{,}13 \,.\, \sqrt{2250} = 1{,}13 \,.\, 47{,}5 \sim 54^{mm}$$

und eine Länge: $l' = 1{,}5 \,.\, 54 = 81^{mm}$.

Denselben Maximaldruck hat auch der Lagerhals c auszuhalten, wenn der

Digitized by Google

Widerstand $P = 3000^{kgr}$ an dem Kurbelzapfen a_2 wirkt. Der Durchmesser für diesen Zapfen muß nach der zu übertragenden Verdrehung berechnet werden, während die Länge dem Druck entsprechend bestimmt werden muß. Daher erhält auch der Zapfen e eine Länge

$$l'' = 81^{mm}.$$

Würden, anstatt einer Kurbelaxe, 2 Stirnkurbeln angewendet werden können, so erhielte jede derselben einen Kurbelzapfen vom Durchmesser:

$$b = 1{,}13\sqrt{P} = 1{,}13 \cdot \sqrt{3000} = 1{,}13 \cdot 54{,}77 \sim 62^{mm}$$

und einer Länge: $l = 1{,}5\, b = 1{,}5 \cdot 62 = 93^{mm}$.

Betrachten wir zuerst den Kurbelzapfen a_1, dann erkennt man sofort, daß derselbe nur auf Biegung zu berechnen ist, entsprechend der Entfernung desselben vom Lager b und zwar erreicht das Biegungsmoment sein Maximum, wenn der Widerstand an dem Zapfen selbst zu überwinden ist. Daher ist nach Forml. 32 pag. 105 der betreffende Durchmesser:

$$b_1 = b'\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 225}{l'}} = 54\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 225}{81}} = 54 \cdot 1{,}77 \sim 96^{mm},$$

während seine Länge gleich derjenigen des ideellen Kurbelzapfens $l = 93^{mm}$, entspechend dem auf ihm wirkenden Druck beibehalten wird.

Das Stück e der Welle zwischen beiden Kurbeln hat bei jedesmaliger Kraftwirkung auf jede der Kurbeln ein Biegungsmoment auszuhalten, und hat außerdem wenn bei a_1 die Kraft P zu überwinden ist, auch noch das verdrehende Moment PA zu übertragen. Es ist demnach dieses Stück auf zusammengesetzte Biegungs- und Torsionsfestigkeit zu berechnen. Das Biegungsmoment wird am größten in der Nähe der beiden Kurbelarme 2 und 3, und haben wir demnach, wenn wir die Länge bis dort, gleich der bis zum Kurbelzapfen a_1 rechnen (immer noch unter Voraussetzung, daß bei a_1 der Druck zu überwinden ist, als vom Lager b ausgehend) ein Biegungsmoment $= 225\, P_1 = 225 \cdot 2250 = 506250$
und ein Torsionsmoment $= PA = 300 \cdot 3000 = 900000$,
demnach das combinirte Moment:

$$M = {}^3/_8 \cdot 506250 + {}^5/_8\sqrt{(506250)^2 + (900000)^2} = 835219 = q\,s = \frac{D_1{}^3\pi}{32}\,s.$$

Da für den ideellen Kurbelzapfen die Momentenformel

$$P\frac{l}{2} = 3000 \cdot \frac{93}{2} = 139500 = \frac{\pi}{32}\,b^3 \cdot s$$

gilt, so haben wir, unter Voraussetzung gleicher Festigkeit:

$$\frac{D_1}{b} = \sqrt[3]{\frac{M}{P\frac{l}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{835219}{139500}} = 1{,}8,$$

woraus $D_1 = 1{,}8 \cdot b = 1{,}8 \cdot 62 = 112^{mm}$.

Der Kurbelarm 2 ist wie der Arm einer gewöhnlichen Stirnkurbel zu berechnen, bei dem die Höhe gegeben und der Kurbelzapfen gleich dem ideellen $b = 62^{mm}$ ist. Da die Seiten des Armes tangential an das Wellenstück e anlaufen, so ist hier die Höhe $h_1 = 112^{mm}$, wir erhalten dann die Breite aus Formel 134ª, welche ergiebt:

Digitized by Google

$$b_1 = 0{,}95\,\frac{A \cdot b^3}{h_1{}^2} = 0{,}95\,\frac{300 \cdot 62^2}{112^2} = 87^{mm}.$$

Hiermit wäre die Kurbel (1) vollkommen bestimmt, da der Kurbelarm (1), der Symmetrie wegen, gleich dem Kurbelarm (2) gemacht wird.

Der Kurbelzapfendurchmesser b_2 muß größer als b_1 ausfallen, weil er der biegenden Wirkung derjenigen Kraft, welche im Wellenhals c der Belastung des Zapfens entgegenwirkt, und an einem Hebelarm 225 mm angreift, sodann wegen der verdrehenden Wirkung des Widerstandes im zweiten Kurbelzapfen, sobald dieser treibend thätig ist. Der Hebelarm der letzteren Kraft ist dann $2 \cdot 300^{mm} = 600^{mm}$. Ist aber die Kraft P am Zapfen a_1 wirkend, dann hat der Lagerhals c nur eine Reaction $3000 - 2250 = 750$ Klgr. auszuhalten, und ist demnach in a_2

das Biegungsmoment $225 \cdot 750 = 168750$ und
das Torsionsmoment $600 \cdot P = 1800000$,

darnach das ideelle Biegungsmoment:

$$M = {}^3/_8 \cdot 168750 + {}^5/_8 \sqrt{(168750)^2 + (1800000)^2} = 1194498^{kgrmm} = \frac{\pi}{32} b_2{}^2 \cdot s,$$

bringt man dieses wieder in Relation zu dem Biegungsmoment $139500 = \frac{\pi}{32} b^3 s$ für den ideellen Kurbelzapfen, so findet sich

$$\frac{b_2}{b} = \sqrt[3]{\frac{1194498}{139500}} = 2{,}05 \text{ oder}$$

$b_2 = 2{,}05 \cdot 63 = 129 = 129^{mm}$, wobei jedoch die Länge $l_2 = 93^{mm}$, wie für den ideellen Kurbelzapfen beibehalten wird. Für diesen Zapfen ergeben sich die Anläufe $s_2 = 2{,}5 + 0{,}05 \cdot 129 = 9^{mm}$.

Der Arm 3 muß für die ganze von der am Kurbelzapfen a_1 herrührende Biegung berechnet werden. Die Höhe des Armes am Kurbelzapfen a_1 ist:

$h_2 = 129 + 2\,s_2 \cong 147^{mm}$, abgerundet auf 150, und ergiebt sich damit nach Formel 134a eine Breite, da jetzt $A = 2 \cdot 300$ ist:

$$b_2 = 0{,}95 \cdot \frac{600 \cdot 62^2}{150^2} = 97^{mm}.$$

Der Kurbelarm (4) erhält, weil er ganz dieselbe Uebertragung aufzunehmen hat wie der Kurbelarm (2), auch dieselbe constante Breite wie jener. Die Seiten laufen tangential an die Anläufe des Kurbelzapfens a_2 und dem Wellenstück f aus. Dadurch enthält dieser Arm am Zapfen eine zu große Stärke, würde man jedoch den Arm nach a_2 hin verschwächen, so würde der Kurbelarm ein schlechtes Aussehen erhalten. Das Wellenstück f ist ebenso wie das Mittelstück e beansprucht und erhält auch die Stärke $D_1 = 112^{mm}$.

Der Lagerhals c hat nur die Torsion aufzunehmen, welche abwechselnd in a_1 und a_2 abgegeben wird. Demnach erhält derselbe, weil er hier die Stelle des Wellenhalses einer gewöhnlichen Stirnkurbel vertritt, nach 101a einen Durchmesser:

$$D = b \sqrt[3]{\frac{A}{b}} = 62 \sqrt[3]{\frac{300}{62}} = 105^{mm}$$

und wie schon oben angedeutet eine Länge $h'' = 81^{mm}$.

Digitized by Google

Aus diesem einfachen Beispiel erkennt man schon, wie verschieden die Kräfte auf die Welle einwirken. Noch bedeutend complicirter wird die Rechnung, wenn die Kurbeln um 90° gegen einander geneigt sind. In diesem Fall hat man genau zu untersuchen, für welche Kurbelstellung das verdrehende Moment ein Maximum wird. Solche Wellen kommen vor bei Locomotiven mit innen liegenden Cylindern.

Auch bei Berechnungen von dreifach gekröpften Wellen kann ebenso verfahren werden wie oben. Es ist immer am vortheilhaftesten, von derjenigen Kurbel auszugehen, welche dem Tragzapfen b am nächsten liegt; vorausgesetzt, daß die Welle nur von einer Seite ihre Kraft empfängt, resp. sie nur nach einer Seite hin abgiebt.

Was die Herstellung der Kurbelaxen anbelangt, so erkennt man leicht, daß hier zweierlei Herstellungsarten zu unterscheiden sind. Die Kurbelaxen können entweder durch Aushauen aus einem genügend großen Stück, oder durch Biegung eines prismatischen Stabes gearbeitet werden.

Wir wollen die Anfertigung einer doppelt gekröpften Welle der ersten Art beschreiben, diejenige einer einfach gekröpften ergiebt sich dann von selbst.

Ein Luppe wird von solcher Breite und Stärke ausgeschmiedet, daß die Kurbel herausgehauen werden kann, und zwar ist es hier gleich, ob die Kurbeln in einer Ebene liegen oder nicht. Die Enden werden ausgestreckt und dann die Kurbeln genau vorgezeichnet (bei gegeneinander verdrehten Kurbeln gerade so, als wenn sie in einer Ebene liegen), an den Trennungslinien Loch an Loch gebohrt (von circa 20^{mm} Durchmesser) und in rothwarmem Zustande die betreffenden Stücke herausgeschrotet, schließlich das stehengebliebene Material bearbeitet. Sollen die Kurbeln gegen einander geschränkt werden, dann wird jetzt das Ende zwischen beiden Kurbeln hellroth warm gemacht und die Kurbelarme um 90° gegen einander verwindet. Ist das Wellenstück zwischen beiden Kurbeln sehr lang, so werden auch wohl beide Kurbeln für sich geschmiedet und schließlich zusammengeschweißt.

Als Material für gebogene Wellen nimmt man in der Regel gewalzte Stäbe. Die Biegung kann hier bei kleinen Axen von der Hand geschehen, für größere jedoch, oder wenn viele congruente kleine Kurbeln zu biegen sind, fertigt man zweitheilige gußeiserne Formen an, in welchen die Axen ihrer ganzen Länge nach rothwarm gemacht, mittelst Pressen, gewöhnlich hydraulische Pressen, hineingezwängt werden. Die gebogenen Axen sind fester und sicherer als die ausgehauenen, weil die Fasern überall der Form folgen, während dieselben bei den ausgehauenen parallel der Wellenmitellinie laufen.

Die gebogenen Kurbeln werden meistens aus Rundeisenstäben, seltener aus Vierkanteisen hergestellt; die Bearbeitung der Kurbelarme ist im ersteren Falle mittelst Maschinen nicht möglich, aber auch nicht nöthig, wenn die Biegung in einer Form ausgeführt ist. Durch Abfeilen des Glühspanes und durch Abschlichten erhält man schon ein sehr sauberes Fabrikat. Häufig unterbleibt auch sogar die Bearbeitung derselben ganz, weil durch die Pressung in der Form das Schmiedestück an und für sich schon sehr sauber ausfällt.

Um überhaupt die Kurbelzapfen drehen zu können, werden auf die bereits gedrehten Enden gußeiserne kreisrunde Scheiben befestigt, auf welchen die Mittelpunkte der Drehaxe des Kurbelzapfens verzeichnet werden. Zu dem Ende reißt man auf beiden Scheiben durch den Mittelpunkt der Axe eine der Mittellinie des

Digitized by Google

Armes parallele Linie vor, schneidet von dem ersteren auf diesen Linien die Länge des Kurbelarmes A ab und körnt die Scheiben in diesen Punkten.

Die Arme werden so construirt, daß sie womöglich ganz auf Maschinen (Hobelbänke, Drehbänke) hergestellt werden können. Erhalten die Arme rechteckige Querschnitte, so wird häufig zur Verschönerung der Facettenschnitt angewendet. Derselbe erfordert jedoch bei der Ausführung, namentlich großer Axen, sehr viel Handarbeit. In den ausgeführten Beispielen (Bl. LXXIX) ist derselbe bei den Fig. 1, 2 u. 3 ebenfalls angeordnet. Fig. 4 stellt die oben berechnete einfache Wellenkröpfung, für den Fall dar, daß dieselbe durch Biegung hergestellt ist. Was die Verzeichnung der betreffenden Axen anbelangt, so ist Alles aus den Figuren LXXIX zu ersehen.

Excentrische Scheibe (Excenter).

Denkt man sich den Durchmesser des Kurbelzapfens soweit vergrößert, daß dessen Umfang den Durchschnitt der Kurbelwelle umschließt, dann geht derselbe in eine kreisrunde Scheibe über, welche sich aber nicht um ihren Mittelpunkt, sondern um die Rotationsaxe der Welle dreht. Wegen dieser excentrischen Drehung werden die Scheiben dann „excentrische Scheiben" oder kurzweg Excenter genannt. Das Bewegungsgesetz bleibt auch hier ganz dasselbe, wie es für die gewöhnlichen Kurbeln abgeleitet war. An Stelle des dort eingeführten Kurbelradius A tritt hier nur die Entfernung E der Mittellinie e der Scheibe von der Rotationsaxe der Welle, die sog. Excentricität. Man ist sehr häufig in der Praxis gezwungen, derartige Scheiben anzuwenden. Soll von einer Welle mittelst Kurbelmechanismus eine einfache oder mehrfache Kraftableitung stattfinden, bei welchen jedoch der Kurbelradius nur sehr klein sein kann (wie z. B bei der Bewegung der Steuerungsmechanismen einer Dampfmaschine), so würde es sehr unvortheilhaft, ja oft sogar unausführbar sein, hierbei Stirnkurbeln oder Wellenkröpfungen anzuwenden; in allen diesen Fällen verwendet man dann, statt der Kurbeln, diese Excenter.

Wegen des bedeutend größeren Radius dieses scheibenartigen Kurbelzapfens, gegenüber demjenigen des gleichwerthigen gewöhnlichen Kurbelzapfens, wird auch das Moment der Reibung, also der Reibungsverlust, hier ein viel größerer sein. Dieser Verlust, durch die am Umfange entstehende Reibung, kann bis zu 40—50% der ganzen geleisteten Arbeit betragen, wenn die Scheiben nicht genau montirt, oder für eine gute Schmiervorrichtung der gleitenden Flächen nicht gesorgt ist. Hieraus ersieht man, daß diese Excenter für eine große Kraftübertragung nicht vortheilhaft zu verwerthen, während sie für kleine zu übertragende Kräfte, wo die Hauptsache die Bewegungsübertragung ist, gut anzuwenden sind.

Die excentrische Scheibe wird von einem zweitheiligen Ringe, dem Excentrikring oder Excenterbügel, umfaßt, welcher seinerseits wieder fest verbunden ist mit der, die Bewegung übertragende, Schub- oder Exzenterstange. (Wenngleich der Excenterbügel streng genommen mit zu den Schubstangenköpfen (s. n. Kap.) gehört, so soll er doch schon gleich hier mit behandelt werden.)

Die excentrische Scheibe wird in den meisten Fällen aus Gußeisen hergestellt; nur sehr selten, wenn man zur Herabdrückung des Reibungsmomentes

Digitized by Google

den Durchmesser der Scheibe so klein als möglich machen will, wird als Material Schmiedeisen verwendet.

Dagegen werden die Bügel nur in den geringsten Fällen aus dem leichtzerbrechlichen Gußeisen, sondern meistens aus Schmiedeisen, sowie für sehr gute Ausführungen aus Bronze gefertigt.

Die Dimensionen der excentrischen Scheibe, mit Ausnahme der Breite, können nur empirisch angegeben werden, wie sie sich bei guten Ausführungen bewährt haben. Die geringste Wanddicke der excentrischen Scheibe kann:

$$a = 0{,}12\,(D + 2E) + 5^{mm}$$

genommen werden. Die Breite der Scheibe muß, da die Abnutzung proportional derselben ist, ebenso groß angenommen werden, wie die Länge des gleichwerthigen cylindrischen Stirnzapfens. Ist das Material der Scheibe Gußeisen, so muß auch hier der gußeiserne Zapfen zu Grunde gelegt werden. Für denselben fanden wir (Frml. 11 u. 12 pag. 92)

$d = 1{,}5\sqrt{P}$, wenn $l = 1{,}3\,d$ war. Hier ist ebenso wie dort P die auf das Excenter wirkende Kraft, dieselbe, welche von der Excenterstange fortgeleitet wird. Da die Scheiben nur eine geringe Breite l wegen der kleinen zu übertragenden Kräfte bekommen, so wird man sehr häufig Gefahr laufen, die excentrische Scheibe schief auf die Welle zu keilen, man sollte deshalb die Nabe so breit als möglich machen. Ist das Excenter sehr groß, so wird dasselbe mit ausgebildeter Nabe nebst Kranz versehen und beide wieder durch einen oder mehrere Arme, an der Seite der Excentricität, verbunden. Diese Aussparungen vermindern das Gewicht, und namentlich die excentrische Masse der rotirenden Scheibe; jedoch ist in den meisten Fällen die Geschwindigkeit so klein, daß es zweckmäßiger ist, weil die Aussparungen doch nur Schmutzwinkel geben, die Scheibe ganz massiv zu machen und auf beiden glatt abzudrehen. Sehr häufig ist man verhindert, die Scheibe von der Seite auf die Welle zu bringen, und muß dann die Scheibe zweitheilig (hervorgebracht durch einen durch die Rotationsaxe der Welle gelegten Schnitt) gemacht werden. Die beiden Theile werden dann durch Schrauben oder Stifte und Keile wieder zusammengesetzt (s. Fig. 8, LXXIX).

Eine sehr gute Befestigungsweise der zweitheiligen Excenterscheiben ist in Fig. 7, Bl. LXXIX dargestellt. Dieselbe ist zuerst von dem Centralinspector L. Becker in Wien angegeben. Die Enden der in der Welle eingearbeiteten Keilnute sind schief unterschnitten. Der untere schräg angesetzte Keil wird im gebogenen Zustande (s. d. punktirte Zeichnung) eingelegt. Durch Niederhämmern wird der Keil in der Keilnute fixirt und die Keilkrone fertiggearbeitet. Durch die Ansätze an den Seiten wird die Scheibe gegen seitliche Verschiebungen geschützt.

Der Umfang der Scheibe muß zur Aufnahme des Bügels entsprechend gestaltet sein. Hierbei wird verlangt, daß der Bügel keine seitlichen Bewegungen machen kann, und das ferner das Schmiermaterial gezwungen wird, erst die ganze reibende Fläche zu durchlaufen, ehe es an den Planseiten austreten kann. Die erste Forderung erreicht man durch Ansätze oder Brüstungen, welche mindestens eine Höhe $c = 1\frac{1}{2}\,e' = 1\frac{1}{2}\,(4 + 0{,}07\,d) = 6 + 0{,}1\,d$ (s. Seite 321, Bd. 1), wo d der Durchmesser des ideellen Kurbelzapfens ist, erhalten. Wirkt jedoch die Kraft schief, nämlich nicht genau in der Ebene des Excentriks, dadurch hervor-

Digitized by Google

gebracht, daß die Excenterstange gekröpft ist, dann muß man, um daß Abschleifen an den Seiten zu verhindern, die Höhe des Anlaufs mindestens 2 bis 3 e_1 machen. Bei Anordnung des Excentrikbügels hat man namentlich auf die auftretende Reibung Rücksicht zu nehmen. Dieselbe ist abhängig von den Materialien der aufeinandergleitenden Flächen. Hat man zwei Materialien, welche bei der Bewegung auf einander viel Reibung erzeugen, z. B. Schmiedeisen auf Schmiedeisen, so muß man, um die Reibung zu vermindern, ein Zwischenglied, eine sog. Compositionseinlage einschalten; diese Compositionseinlage (Weißmetall: Legierung von 6 Th. Kupfer, 10 Th. Antimon, 94 Th. Zinn) sollte bei allen Excentern angewendet werden. Die Reibung wird dadurch auf ein Minimum herabgedrückt, und ebenso der Schmierölconsum beschränkt. Die Scheibe, sowie der Ring, sind durch dieselbe, wegen der Weichheit der Legirung, gegen Abnutzung geschützt, und kann diese, falls sie ausgelaufen ist, sehr leicht erneuert werden. Die Metallcomposition wird ebenfalls zweitheilig hergestellt, und durch versenkte Schrauben von demselben Metall mit dem Excenterbügel verbunden, um ein Drehen der Einlage gegen den letzeren zu verhindern.

Beim Herstellen der Compositionsringe muß namentlich darauf gesehen werden, daß dieselben möglichst überall gleichmäßig anliegen. Dadurch wird auch wesentlich die Reibung vermindert. Wird nämlich die letztere sehr groß, dann wirkt das Excenter als Bremsring, was zum Schmelzen der Composition führen kann. Um zu untersuchen, ob das Excenter genau montirt ist, kann man nach Heusinger von Waldegg folgendermaßen verfahren: Der Excenterbügel wird über die Excenterscheibe gelegt und die Schrauben angezogen, wobei aber der Stangenansatz (w) in horizontaler Lage liegt. Durch das Uebergewicht desselben wird er nach und nach in die verticale Lage sinken. Diese Drehung soll nun nicht schneller als die Drehung des Minutenzeigers erfolgen, so daß die Senkung aus der horizontalen in die verticale in einer Viertelstunde ausgeführt ist. Kommt das Excenter schneller in die letztere Lage, dann ist dasselbe schlotterig montirt, während ein Stehenbleiben eine übermäßige Pressung anzeigt. Um beim Anspannen der Preßschrauben die Spannung auszugleichen, ohne dieselbe direct auf das Ringfutter zu übertragen, legt man zwischen die Ansätze des Excenterbügels Kupferplatten Hat sich der Ring ausgelaufen, so genügt es, von der Platte einen Feilstoß fortzunehmen, um den schlotterigen Gang zu beseitigen.

Die Compositionseinlagen werden entweder in Formen gegossen, welche genau nach den Ringen geformt sind, oder das Gießen findet direct in den Bügeln statt. Im letzteren Fall werden die Bügel innen verzinnt, damit die Composition haftet. Beide Hälften werden im Normalabstande, entsprechend der Dicke der Einlage (12—15 mm) um die Scheibe gelegt, das Ganze bis zum Schmelzpunkt des Zinnes erwärmt und in die, auf eine Platte gelegte, so verfertigte Form die geschmolzene Composition gegossen. Nachgearbeitet wird die Compositionseinlage nur noch mittelst eines Schabers, während das Ausdrehen ganz unterbleibt.

Die Stärkendimension des Bügels kann man folgendermaßen berechnen: Man kann denselben ansehen als einen auf 2 Stützen ruhenden Träger, welcher eine gleichmäßig vertheilte Last P zu tragen hat. Als Auflagepuukte müssen natürlich die Mittelpunkte der Schrauben angenommen werden. Sind die

Digitized by Google

letzteren um C^mm von einander entfernt, dann ist nach Frml. 19 pag. 58 das Maximalmoment in der Mitte:

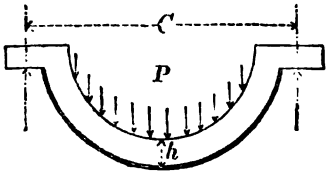


Fig. 218.

$$\frac{P.C}{8} = q\,s.$$

Bezeichnet man die radiale Dimension des Ringes mit h, dann hat man:

$$\frac{P.C}{8} = {}^1/_6\, h^2.l\,s,$$

da l die Breite desselben schon früher bestimmt. Hieraus ergiebt sich:

$$h = \sqrt{{}^3/_4 \frac{P}{s} \cdot \frac{C}{l}} \ldots (142).$$

Diese Formel kann angewendet werden, wenn der Bügel eine extra Compositionsanlage erhält. Im andern Fall wollen wir jedoch des Verschleißes wegen:

$$h = 5^{mm} + \sqrt{{}^3/_4 \frac{P}{s} \cdot \frac{C}{l}} \ldots (142^a)$$

nehmen. Hierin kann für Schmiedeisen $s = 6$ Klgr.
„ Gußeisen $s = 3$ „
„ Bronce $s = 2$ „
gesetzt werden.

Die Schrauben berechnen sich aus der Kraft P, indem nach Frml. 1, pag. 17

$$P = Fs = 2\frac{d^2\pi}{4}s, \quad \text{worin } s = 4 \text{ Klgr. zu nehmen,}$$

gesetzt wird.

Aus Frml. 142 erkennt man, daß h kleiner wird, wenn die Entfernung C abnimmt. Daher construirt man den Bügel am liebsten so, wie er in Fig. 5, Bl. LXXIX angenommen ist. Die übrigen Dimensionen des Bügels sind ebenfalls empirisch zu wählen, und sind praktische Werthe in die betreffenden Figuren auf Bl. LXXIX eingeschrieben worden.

Die Excenterstange wird bei schmiedeisernem Bügel mit letzterem aus einem Stück hergestellt, bei gußeisernen und broncenen Bügeln mit denselben verschraubt oder mittelst Keilen verbunden. Die Stärke der Stangen kann nach den später aufzustellenden Formeln für Pleuelstangen, weil sie strenggenommen zu diesen gehören, berechnet werden. Früher stellte man die Stangen als eine Art Träger her (wie bei den alten Watt'schen Balancirmaschinen). Neuerdings ist man jedoch hiervon abgekommen, man construirt sie sogar sehr leicht, und um dieses zu können, verkürzt man die Länge so viel wie möglich, damit sich dieselbe nicht zu viel durch ihr eigenes Gewicht durchbiege, und zieht es lieber vor, die durch sie gradlinig bewegte Stange zu verlängern. An dem, dem Bügel entgegengesetzten Ende der Stange erhält die letztere einen gewöhnlichen Flügelstangenkopf, auf welchen wir noch später zurückkommen.

Da bei Bearbeitung des Bügels auf der Drehbank die Stange im Wege sein würde, so darf bei schmiedeisernen Bügeln die Stange von vornherein nicht an den Bügel geschmiedet werden. Es erhält der letztere bei seiner Herstellung erst einen kurzen Ansatz, an welchen, wenn die Bearbeitung des Bügels auf der Drehbank ganz vollendet ist, die eigentliche Stange angeschweißt wird.

Digitized by Google

Fig. 5, Bl. LXXIX stellt ein Excenter dar, dessen Scheibe als auch Bügel aus Gußeisen sind. Der beigezeichnete Zapfen Fig. 5 ist der der Kraft P, welche von der Excenterstange fortgeleitet werden soll, entsprechende ideelle Kurbelzapfen, dessen Länge l gleich der Breite des Excenter ist. Fig. 6 ist ein Excenter mit schmiedeisernem Ring und Compositionseinlage. In Fig. 8 ist eine zweitheilige Scheibe verzeichnet, während die Figuren 9, 10^a und 10^b Verbindungen von schmiedeisernen Excenterstangen mit gußeisernen Bügeln darstellen.

Kreuzköpfe.

Dasjenige Maschinenelement, welches die Verbindung der gradlinig zu führenden Kolbenstange mit der Pleuelstange herstellt, heißt Kreuzkopf oder Querhaupt. Der erstere Name kann dadurch erklärt werden, daß die geometrische Mittellinie des Kreuzkopfzapfens senkrecht zur Mittellinie der Kolbenstange liegt, also ein Kreuz mit derselben bildet. Es ist jedoch nicht allein sein Zweck, die beiden Constructionstheile mit einander zu verbinden, sondern er soll auch noch außerdem die Führung der Kolbenstange übernehmen; namentlich hat derselbe die letztere Function dann zu übernehmen, wenn der Schub der zu führenden Stange sehr lang ist. Bei kleinem Hube fallen auch wohl die Führungstheile fort; es wird dann die Führung durch die Stange selbst übernommen (wie z. B. bei Schiebern). Für größere Hübe kann der Kreuzkopf entweder durch Lenkstangen oder zwischen Linealen geführt werden. Hiernach unterscheiden sich 2 Hauptarten, nämlich:

1) Kreuzköpfe ohne besondere Führungstheile,
2) „ mit besonderen Führungstheilen.

In Bezug auf letztere Classe können dann wieder 2 Unterabtheilungen angenommen werden:

a) Kreuzköpfe mit Zapfen zur Befestigung der Lenkstangen,
b) „ mit Linealführung.

Fig. 11 und 12, Tafel LXXIX stellen 2 der gebräuchlichsten Querhäupter ohne Führungstheile dar. Ersteres findet sehr häufig bei den Steuerungsmechanismen, letzteres bei den Watt'schen Schiffsmaschinen Anwendung.

Was die Größe der Zapfen betrifft, so können dieselben auf den Kurbelzapfendurchmesser d bezogen werden. Da sich die in der Pleuelstange wirkende Kraft P hier auf 2 Zapfen vertheilt, wobei angenommen werden darf, daß die Vertheilung gleichmäßig geschieht, so kommt auf jeden Zapfen eine Kraft $\frac{P}{2}$.

Ist demnach die Länge des Zapfens l_2, der Durchmesser d_2, dann ist das betreffende Moment für den gefährlichen Querschnitt:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{l_2}{2} = q s_1 = \frac{d_2^3 \pi}{32} s_1 ;$$ für den Kurbelzapfen hatten wir:

$$P \frac{l}{2} = \frac{d^3 \pi}{32} s, \text{ demnach wenn } \frac{l}{d} = \frac{l_2}{d_1} = 1{,}5 \text{ und } s_1 = s$$

gesetzt wird:

$$\frac{d_2}{d} = \sqrt[3]{1/2} = 0{,}7 \text{ oder } d_2 = 0{,}7\, d.$$

Die Kolbenstange habe einen Durchmesser d_1, welcher später noch näher bestimmt werden soll. Diesen Durchmesser verschwächt man in dem Kopf auf d_2;

Digitized by Google

die Stange wird entweder mittelst Mutter, oder wie es in der Figur geschehen, mittelst Keiles befestigt. Die Maße in der Figur beziehen sich auf die Einheit d_2.

Ist wie in Fig. 12 das Mittelstück sehr lang, dann muß dasselbe extra berechnet werden. Ist L_1 die Entfernung der Zapfenmittel, dann ist für die Mitte das Biegungsmoment

$$\frac{P}{2}\frac{L_1}{2} = qs = \frac{D^3\pi}{32}s \text{ oder in Beziehung vom Kurbelzapfen:}$$

$$\frac{L_1}{2l} = \frac{D^3}{d^3}, \text{ woraus}$$

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{L_1}{2l}} \text{ folgt.}$$

Der Vorsprung der Kolbenstangenhülse über dem Träger wird nach Gefühl gebildet. Die eingeschriebenen Maße beziehen sich ebenfalls auf d_2, auf welchen Durchmesser die Kolbenstange auch hier verschwächt wird.

Kreuzköpfe mit Lenkzapfen stellen die Fig. 13 und 14 dar. Die Zapfen, an welche die Pleuelstange angreift, erhalten auch hier einen Durchmesser $d_2 = 0{,}7\,d_1$, während die Lenkzapfen nach den an ihnen wirkenden Kräften, welche für jeden Fall besonders bestimmt werden müssen, berechnet werden.

In beiden Fällen sind die Kolbenhülsen aus Schmiedeisen hergestellt und mit der Kolbenstange durch Keile verbunden. Die Entfernungen der Mittellinien der Pleuelstangenzapfen in den beiden Figuren sollten so kurz wie möglich genommen werden, um die Dicke des Mittelstückes so klein wie möglich zu erhalten. In Fig. 13 ist ein Verschieben des Zapfens wegen der seitlichen Ansätze vermieden, bei Fig. 14 jedoch nicht. Um dieses auch hier zu erreichen, kann man das Ende der Kolbenstange mit einem kleinen cylindrischen Vorsprung etwas in das Mittelstück des Zapfens eingreifen lassen. Die eingeschriebenen Verhältnißzahlen beziehen sich, wo keine andere Bezugseinheit ausdrücklich beigeschrieben, hier wie auch im Folgenden auf d_2.

In Fig. 15[a], Taf. LXXIX und Fig. 1, 2 und 3, Taf. LXXX, sind Kreuzköpfe mit Linealführung verzeichnet.

Fig. 15 ist ist ein Querhaupt mit Gleitbarren. Die letzteren sind, um sich besser den Linealführungen anzuschmiegen, auf Zapfen gesteckt. Die Zapfen erhalten durch die in der Pleuelstange wirkende Kraft P einen senkrecht zur Schubrichtung gerichteten Druck, welcher wegen der Schwingung der Pleuelstange veränderlich ist. Nach dem Maximum dieses Druckes müssen dieselben berechnet werden. In einer beliebigen Lage, wenn der Kurbelarm mit der Horizontalen einen Winkel α, die Pleuelstange mit derselben Richtung einen $\measuredangle\,\beta$ bildet, ist dieser Normaldruck $N = P \sin \beta = P \frac{A}{L} \sin \alpha$, wenn dieselben Bezeichnungen eingeführt werden, wie sie bei Erläuterung des Kurbelmechanismus zu Grunde gelegt wurden. Dieser Normaldruck wird ein Maximum, wenn $\alpha = 90^0$ wird. Es ist dann

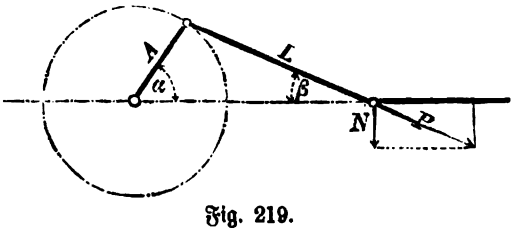


Fig. 219.

Digitized by Google

$$N = P \cdot \frac{A}{L}.$$

Hiervon kommt auf jeden Zapfen die Hälfte, und ist demnach, wenn der Durchmesser des Zapfens gleich d_3 und seine Länge l_3 gesetzt wird, das biegende Moment für die wahrscheinliche Bruchstelle:

$$\frac{N}{2}\frac{l_3}{2} = \frac{P}{2}\frac{A}{L}\frac{l_3}{2} = q\,s_1 = \frac{d_3{}^3\pi}{32}s_1$$

oder in Beziehung mit dem Kurbelzapfen:

$$^1/_2\,\frac{A}{L}\frac{l_3 d}{l d_3} = \left(\frac{d_3}{d}\right)^3 \text{ oder } \frac{d_3}{d} = \sqrt[3]{^1/_2\,\frac{A}{L}\frac{l_3}{d_3}\frac{d}{l}} \quad \ldots \quad (143).$$

Wird hierin $l_3 = 2{,}5\,d_3$ gesetzt, um möglichst bequem construiren zu können, dann wird

$$\frac{d^3}{d} = \sqrt[3]{^1/_2\,\frac{A}{L}\frac{2{,}5}{1{,}5}} = 0{,}91\sqrt[3]{\frac{A}{L}} \quad \ldots \quad (143^a).$$

Der Normaldruck N hat aber auch noch eine biegende Wirkung auf den Hauptzapfen, wenn letzterer außerhalb der Kolbenstangenhülse liegt, zur Folge. Ist die Entfernung der Mittellinien der beiden Zapfen von einander c, dann ist für gleiche Sicherheit nach Frml. 32 pag. 105:

$$\frac{d'_2}{d_3} = \sqrt[3]{\frac{c}{\frac{l_3}{2}}},$$

während seine Länge $l_2 = 1{,}5\,d_2$ beibehalten wird.

Die Größe der gleitenden Fläche muß in Bezug auf die Abnutzung berechnet werden. Man erhält gute Resultate, wenn man jeder Seitenfläche des Gleitbarrens eine Fläche

$$F = 16\,\frac{A}{L}\,d^2\,\square^{mm} \text{ macht.}$$

Bei Maschinen, welche stets in einem Sinne rotiren, ist der Normaldruck, wie durch eine Zerlegung der in den Stangen wirkenden Kräfte zu ersehen, stets nur auf eine Gleitschiene gerichtet. Da jedoch in den todten Punkten des Kurbelkreises die Kurbel das treibende Element ist, so kann es vorkommen, daß in der, dieser Stellung entsprechenden, Stellung des Kreuzkopfes, der letztere von der Gleitschiene abgehoben wird. Man findet deshalb auch bei solchen Maschinen in der Regel 2 Gleitschienen angewendet.

Bei Maschinen, welche gleichzeitig in dem einen Sinn, zeitweilig im entgegengesetzten Sinn rotiren, ist es, weil hier der Normaldruck wechselt, unbedingt nöthig.

Die Gleitbarren oder die Gleitschienen müssen so construirt werden, daß die eintretende Abnutzung wieder ausgeglichen werden kann. Bei den Gleitschienen erreicht man dieses dadurch, daß unter die Unterstützungssäulen dünne Blechscheiben gelegt werden, von welchen je nach Bedarf eines fortgenommen wird.

Die Verstellung der Gleitbarren wird meistens durch Keile ausgeführt. Die Gleitbarren werden entweder aus weichem Gußeisen oder aus Bronce hergestellt. Bei schmiedeisernen Barren müssen extra Messing-Unterlegplatten angeordnet werden, um die entstehende Reibung möglichst zu vermindern. Fig. 15° stellt einen einfachen rechteckigen Gleitbarren vor. Um denselben möglichst leicht auszuführen, sind Aussparungen angeordnet. Früher wurden statt der rechteckigen Barren

Digitized by Google

cylindrische Rollen ausgeführt, weil die rollende Reibung geringer als die gleitende ist. Die Verwendung von Rollen, bei denen sich dieselben mit variabler Geschwindigkeit drehen oder sogar ihre Bewegungsrichtung ändern, ist aber ganz zu verwerfen, da dieselben durch den ungleichen Verschleiß sehr bald unrund werden.

Fig. 15* zeigt einen rechteckigen Gleitbarren mit verstellbaren Gleitbacken. Die Verstellung wird hier durch 4 Keile hervorgebracht, welche parallel der Mittellinie des Gleitbarrenzapfens durch den Barren hindurchgehen. Das Nachziehen wird durch Muttern bewirkt. Um eine seitliche Verschiebung der Backen gegen den Barren zu hindern, greift letzterer etwas in die broncenen Backen ein.

Durch Zusammenrücken der Gleitschienen gehen schließlich die 4 Gleitschienen in 2 über. Dadurch hat aber jetzt jede Gleitfläche einen größeren Druck auszuhalten. Um dieses zu berücksichtigen, erhält daher hier jede der Gleitflächen einen Flächeninhalt: $F_1 = 1^1/_2 F$,
wo F die oben angegebene Größe hat.

Für diese Art Kreuzköpfe sind 2 Anordnungen Fig. 1 u. 2, Bl. LXXX gezeichnet. Der Kreuzkopf (Fig. 1) ist ganz aus Gußeisen hergestellt. Die Gleitbacken, welche hier, um eine Seitenverschiebung senkrecht zur Kolbenstange zu vermeiden, als Cylinderflächen gebildet sind, können durch die angebrachten Keile nachgestellt werden. Ein selbstthätiges Zurückgehen des Keiles wird durch die aufgelegten schmiedeisernen Stellringe vermieden. Der Pleuelkopfzapfen wird mit der Zeit, wegen der Veränderlichkeit der Kraftrichtung, schlotterig. Um denselben dann nachziehen zu können, hat er statt des Kopfes einen conischen Ansatz und unten eine Schraube mit Mutter erhalten, durch deren Anziehen der Conus tiefer in das Loch gezogen und dadurch der Bolzen festgelegt wird.

Der Kreuzkopf (Fig. 2) ist mit Ausnahme der Gleitbacken, welche aus Bronce sind, ganz aus Schmiedeisen hergestellt. Um die letzteren gegen seitliche Verschiebungen zu schützen, sind einestheils die Gleitflächen nach der Mitte zu erhöht, unter einem sehr stumpfen Winkel, anderntheils werden die Gleitbacken gegen das Mittelstück mit 4 Schrauben und Unterlegscheiben festgestellt. Der Zapfen ist hier cylindrisch gebildet.

Fig. 3 stellt einen Kreuzkopf vor, bei welchem nur eine Gleitschiene nothwendig ist. Die Seitenverschiebungen werden durch zwei schräge Seitenschienen aufgehoben. Dieser Kreuzkopf wird häufig bei liegenden Dampfmaschinen mit nur einem Umlaufsinn angewendet.

Die Führungslineale müssen auf Biegung nach dem berechneten Normaldruck N bestimmt werden. Ist die Entfernung der Befestigungspunkte L_2 von einander, dann ist, falls nur 2 Führungslineale angewendet werden, das biegende Moment:

$$\frac{N \cdot L_2}{4} = P \frac{A}{L} \frac{L_2}{4} = q s_1.$$

Die Führungslineale werden meistens aus Schmiedeisen mit rechteckigem Querschnitt hergestellt, es ist für diese dann:

$$P \frac{A}{L} \frac{L_2}{4} = \frac{b h^2}{6} s_1,$$

oder da die Breite b in den meisten Fällen gegeben sein wird:

$$h^2 = P \cdot \frac{A}{L} \cdot \frac{L_2}{4} \cdot \frac{6}{b} \cdot \frac{1}{s_1}.$$

Digitized by Google

Dieses in Beziehung gebracht mit der Formel für den Kurbelzapfen:

$$P\frac{l}{2} = \frac{b^3\pi}{32}s$$

unter Annahme gleicher Festigkeit:

$$\frac{h}{b} = \sqrt{\frac{6}{4.1{,}15}\frac{3{,}14}{16}}\sqrt{\frac{A}{L}\cdot\frac{L_2}{b}} = 0{,}44\sqrt{\frac{A}{L}\frac{L_2}{b}} \quad \ldots \quad (144).$$

Wenn statt 2 Linealen deren 4 angewendet werden, wie für den Kranzkopf Fig. 15, Bl. LXXIX, dann kommt auf jedes ein Normaldruck $\frac{N}{2}$; und erhält derselbe unter gleichen Annahmen eine Höhe, welche aus obiger durch Multiplication mit $\sqrt{1/2} = 0{,}7$ erhalten wird.

Gußeiserne Führungslineale (s. Fig. 4, Bl. LXXX) erhalten etwas complicirtere Formen; es ist aber dann sehr leicht, durch Gleichsetzung des betreffenden Querschnittsmodul q aus obigen Werthen h die betreffenden Dimensionen zu erhalten.

Ganz genau ist obige Berechnung nicht. Es ist oben gezeigt, daß der Normaldruck für einen Winkel $\alpha = 90^0$ sein Maximum erreicht. Dann ist aber der Kreuzkopf über seine Mittelstellung bereits hinausgegangen, und dürften wir daher nicht N in der Mitte angebracht denken. Immerhin kann man der Einfachheit wegen diese Annnahme machen, weil die Dimension h eher dadurch zu stark als zu schwach ausfällt.

Pleuelstangen.

Das den Kurbel- und Kreuzkopfzapfen verbindende Element nennt man Pleuel-, Schub-, Trieb- oder auch Kurbelstange. Dieselbe besteht aus lagerartigen Theilen, den sogenannten Köpfen, welche letztere wieder durch ein Mittelstück, „dem Schaft", verbunden sind.

Der Schaft wird durch die fortzupflanzende Kraft entweder auf absolute Festigkeit, wenn die Stange sehr kurz ist, oder auf Zerknickungsfestigkeit, wenn die Stange lang im Verhältniß zur Querschnittsdimension ist, beansprucht. Außer dieser Beanspruchung erleidet der Schaft noch eine relative, und zwar durch sein eigenes Gewicht (bei horizontal liegenden Stangen) und durch seine eigene Masse bei der schwingenden Bewegung.

Die Querschnitte des Schaftes werden für die erstere Beanspruchung (allein auf Druck) in der Regel kreisförmig, für die Beanspruchung auf Zerknickung würde der Kreisring am vortheilhaftesten sein. Da aber für Schmiedeisen derselbe sehr schwierig, für Gußstahl gar nicht herzustellen ist, so wählt man auch hier gewöhnlich den kreisförmigen Querschnitt. Für den Fall, daß bei schnellgehenden Maschinen durch die eigene Masse auch noch relative Beanspruchung auftritt, ist der doppelt T förmige Querschnitt der passendste. Auch hier wählt man der kostspieligen Herstellung wegen lieber den rechteckigen Querschnitt.

Als Material des Schaftes wählte man früher Gußeisen oder Holz. Von dem ersten Material ist man jetzt beinahe ganz abgekommen. Auch Holz wird nur noch wenig angewendet, da man auch auf andere Weise die Stange ebenso leicht ausführen kann, wobei dann noch die Gefahr wegfällt, daß sich die hölzerne Stange verzieht oder wirft.

Digitized by Google

In neuerer Zeit wird nur noch Schmiedeisen und Gußstahl als Material verwerthet.

Ist die Stange nur auf Druck zu berechnen, dann kann die Dimension des Querschnitts nach Frml. 2 pag. 17:

$$F = \frac{P}{s} \text{ bestimmt werden.}$$

Hierin kann zur größeren Sicherheit

für Schmiedeisen $s = 5$ Kgr.,
„ Gußstahl $s = 10$ „

gesetzt werden.

Wird die Stange auf Strebfestigkeit berechnet, dann muß zuerst darüber Entscheidung getroffen werden, welcher der 4 in § 5 der Festigkeitslehre behandelten Fälle zu nehmen ist. Am Meisten stimmt mit den hier auftretenden Verhältnissen der 2te Fall überein. Die Stange kann sich, falls die Lager kugelförmig gestaltet sind, nach jeder Richtung beliebig ausbiegen, wobei jedoch die Endpunkte gezwungen sind, der vorgeschriebenen Bahn zu folgen. Werden jedoch cylindrische Zapfen angewendet, dann tritt eine solche Ausbiegung nur für die Schwingungsebene ein, während dieselbe für eine Ebene senkrecht zu der letzteren eine solche sein würde, wie sie im 3ten Fall characterisirt ist. Die Formeln, welche hier zur Berechnung dienen können, sind pag. 18 gegeben, es ist für eine Ausbiegung in der Schwingungsebene zu nehmen:

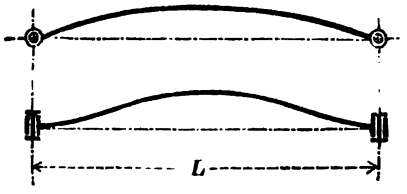


Fig. 220.

$$K\sigma = 10 . \frac{J . E}{L},$$

während bei einem cylindrischen Zapfen für eine Ausbiegung senkrecht zur Schwingungsebene gilt:

$$K\sigma = 40 . \frac{J . E}{L^2}.$$

Da jedoch, wenn die Lager ausgeschliffen sind, die Bedingungen eintreten, welche für den 2ten Fall maßgebend waren, so soll im Folgenden stets die Formel 40 (in Combination mit Frml. 43):

$$K\sigma = 10 \frac{E J}{L^2} \text{ zu Grunde gelegt werden.}$$

Hierin ist für J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes einzuführen. Für unsern Fall ist die in der Stange wirkende Kraft, als die Tragkraft $K = P$, und haben wir zu setzen:

$$P\sigma = 10 \frac{E J}{L^2}.$$

1) Kreisförmiger Querschnitt. Für diesen ist:

$$J = \frac{\pi}{64} \Delta^4,$$

wenn Δ der Durchmesser der Stange an der Stelle der größten Ausbiegung, also in der Mitte ist. Es ist dann:

$$P = 10 . \frac{E . \frac{\pi}{64} \Delta^4}{\sigma L^2}$$

Digitized by Google

Für den Kurbelzapfen haben wir:

$$P\frac{l}{2} = \frac{\pi}{32} d^3 s \text{ oder } P = \frac{\pi}{16}\frac{d^4}{d^2}\left(\frac{d}{l}\right)s.$$

Durch Division dieser beiden Werthe folgt:

$$1 = \frac{10 \cdot 16E}{s \cdot \sigma \cdot 64} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{d^2}{L^2} \cdot \frac{\Delta^4}{d^4},$$

oder

$$\frac{\Delta}{d} = \sqrt[8]{\frac{64 \cdot s \cdot \sigma}{16 \cdot 10E} \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{L^2}{d^2}} \quad \ldots \quad (145).$$

Setzt man hierin für Schmiedeisen $E = 20000$, ferner $\frac{l}{d} = 1{,}5$, $s = 6$, so folgt:

$$\frac{\Delta}{d} = 0{,}096 \sqrt[4]{\sigma} \sqrt{\frac{L}{d}} \quad \ldots \quad (145^a).$$

Was den Sicherheitscoefficienten σ anbelangt, so findet man ihn bei ausgeführten Pleuelstangen sehr verschieden angenommen. Bei Locomotiven, um die bewegten Massen möglichst gering zu erhalten, geht man mit ihm sogar bis auf 2 hinab. Bei stationären Maschinen wird in der Regel $\sigma = 20$ bis 30, bei landwirthschaftlichen und Schiffsmaschinen ja sogar $\sigma = 40$ bis 50 und noch höher angenommen, um hier eine möglichst große Sicherheit zu erhalten, weil die Reparatur etwa eintretender Brüche in beiden Fällen gewöhnlich mit Schwierigkeiten verknüpft ist.

Für den gewöhnlichsten Fall einer stationären Dampfmaschine wollen wir $\sigma = 25$ setzen, und finden

$$\frac{\Delta}{d} = 0{,}22 \sqrt{\frac{L}{d}} \quad \ldots \quad (145^b).$$

Für Gußstahl hätten wir $E = 27500$, so ergiebt sich:

$$\frac{\Delta}{d} = 0{,}2 \sqrt{\frac{L}{d}} \quad \ldots \quad (145^c).$$

Für Gußeisen, mit $E = 10000$:

$$\frac{\Delta}{d} = 0{,}25 \sqrt{\frac{L}{d}} \quad \ldots \quad (145^d).$$

Diese Dimensionen sind immer in Bezug auf einen schmiedeisernen Kurbelzapfen aufgestellt. Würde der betreffende Zapfen aus Gußstahl sein, so hätte man ihn, um diese Formeln auch anwenden zu können, erst in einen gleichwerthigen schmiedeisernen umzurechnen.

Für kurze Stangen, bei welchen es unsicher ist, ob dieselbe nur auf Druck oder auf Strebfestigkeit zu berechnen sind, führt man beide Berechnungen durch, und nimmt als definitives Maß das größere der beiden berechneten.

Diese Stärke Δ erhält die Stange nur in der Mitte, nach den Köpfen hin wird sie verschwächt, und zwar erhält die Stange an dem Kurbelende eine Stärke $\Delta_1 = 0{,}8\,\Delta$,

am Kreuzkopfende $\Delta_2 = 0{,}7\,\Delta$.

Das Kurbelende erhält deshalb eine größere Stärke als das Kreuzkopfende, weil an ihm die Stange ihre größte Geschwindigkeit hat und durch Einwirkung ihrer eigenen Masse sich hier am ehesten durchbiegen würde.

Digitized by Google

Die Verbindung der 3 berechneten Dimensionen kann dann bei Verzeichnung durch eine schwach gekrümmte Curve stattfinden.

Rechteckiger Querschnitt. Zur Berechnung dieses Querschnitts könnte man wieder die Formel

$$P\sigma = 10\,\frac{EJ}{L^2}$$

benutzen. Leichter stellt sich die Rechnung, wenn man die Dimensionen in Beziehung mit den schon berechneten Dimensionen eines kreisförmigen Querschnitts setzt. Aus der Formel erkennt man sofort, daß bei sonst gleichen Umständen, zwei Stäbe dem Zerknicken gleichen Widerstand entgegensetzen, wenn die Trägheitsmomente der betreffenden Stabquerschnitte gleichen Werth haben. Soll also der schon berechnete kreiskörmige Querschnitt in einen rechteckigen umgerechnet werden, so hat man für gleiche Festigkeit der beiden Stangen die Bedingung:

$$J_{\bigcirc} = J_{\square} \text{ oder } \frac{\pi}{64}\Delta^4 = {}^1/_{12}\,b^3 h,$$

wenn b die kleinere und h die größere Dimension des rechteckigen Querschnitts ist. Hieraus ergeben sich die Bedingungen:

1) $\left(\frac{b}{\Delta}\right)^4 = \frac{\pi \cdot 12}{64} \cdot \frac{b}{h}$ oder

$$\frac{b}{\Delta} = \sqrt[4]{\frac{\pi \cdot 12}{64} \cdot \frac{b}{h}} = 0{,}88 \sqrt[4]{\frac{b}{h}} \quad \ldots \quad (146^a).$$

2) $\frac{b^3}{\Delta^3} = \frac{12 \cdot \pi}{64} \cdot \frac{\Delta}{h}$ oder

$$\frac{b}{\Delta} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot \pi}{64} \cdot \frac{\Delta}{b}} = 0{,}84 \sqrt[3]{\frac{\Delta}{h}} \quad \ldots \quad (146^b),$$

und endlich 3) $\frac{h}{\Delta} = \frac{12 \cdot \pi}{64}\left(\frac{\Delta}{b}\right)^3 = 0{,}59\left(\frac{\Delta}{b}\right)^3 \quad \ldots \quad (164^c).$

Diese 3 Formeln können je nach Bedarf angewendet werden. Bei Bestimmung der Dimensionen h und b ist aber darauf zu achten, daß h stets die größere der beiden Dimensionen ist. Wird $h < b$, dann ist das Trägheitsmoment ${}^1/_{12}\,b\,h^3$ auch kleiner als das in die Rechnung eingeführte, was aber nicht sein darf.

Um die Querschnitte an den Enden zu bestimmen, rechnet man mit denselben Formeln die betreffenden Durchmesser Δ_1 und Δ_2 um. Hierbei kann man entweder die Höhen an den Enden beliebig annehmen, indem man ein geschmackvolles Höhenprofil zu Grunde legt, um mit diesen und den betreffenden Dimensionen Δ_1 u. Δ_2 die Breiten bestimmen, oder was jedenfalls für die Bearbeitung am praktischsten ist, man führt den ganzen Schaft mit derselben Breite b durch, woraus sich dann für die Kopfenden die betreffenden Höhen ergeben. Hierbei tritt nicht selten der Fall ein, daß sich hier die Höhen sehr klein ergeben. Um dann doch nicht die Breite zu verschwächen, behält man diese letzteren bei, und führt die Höhe stetig mittelst Ausrundung in die Breite des Kopfes über. Gute Verhältnisse erlangt man, wenn man für die Mitte $\frac{h}{b} = 2$ bis 3 annimmt.

Um die Stangen möglichst leicht zu bilden, wendet man, namentlich bei Lokomotiven, den doppelt T förmigen Querschnitt an. Auch hier lassen sich durch

Digitized by Google

Gleichsetzung der Trägheitsmomente für das Rechteck und diesen Querschnitt die Dimensionen leicht bestimmen. Wir erhalten daraus die Bedingung:

$$^1/_{12}\, b^3 h = {}^1/_{12}\,(2B^3\delta + (H - 2\delta)\gamma^3).$$

Setzt man hierin $H = h$, d. h. nimmt man für die Mitte die Höhe des doppelt Tförmigen Querschnitts, gleich demjenigen des rechteckigen, so erhält man für die Mitte:

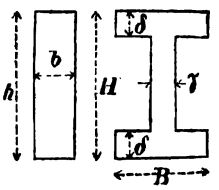


Fig. 221.

$$\frac{B}{b} = \sqrt[3]{\frac{h - (H - 2\delta)\frac{\gamma^3}{b^3}}{2\delta}} \quad \ldots \quad (147).$$

Aus dieser Formel ist bei passender Annahme der Stegstärke δ und der Flantschenstärke γ die Breite in der Mitte des Schaftes zu berechnen. Bei Lokomotiven findet man als Mittelwerthe $\delta = 15^{mm}$, $\gamma = 10$ bis 12^{mm}. Auf gleiche Weise könnte man auch die Querschnite für die Enden berechnen. Bei Construction einer solchen Stange muß namentlich auf die Herstellung Rücksicht genommen werden. Die Stangen werden gewöhnlich aus dem Vollen gearbeitet, indem die Vorderflächen abgehobelt, und die Vertiefungen auf der Langlochbohrmaschine ausgebohrt werden. Um diese Arbeiten leicht ausführen zu können, ist es vortheilhaft, wenn auch hier die Breite der oberen und unteren Flantschen an allen Stellen constant bleibt: dadurch würden aber die Höhen der Querschnitte an den Enden wieder ziemlich klein ausfallen. Um auch hier dem ganzen Schaft ein gutes Aussehen zu geben, läßt man bei constanter Breite B, constanter Stegstärke γ und Flantschenstärke δ die Höhen gegen das Ende so weit abnehmen, daß sie sich mittelst Ausrunden leicht an die Köpfe anschmiegen.

Beispiel. Es soll eine Pleuelstange berechnet werden für eine Maschine, deren schmiedeiserner Kurbelzapfen einen Durchmesser $d = 64^{mm}$ hat. Die Stange soll aus Gußstahl hergestellt werden, und sei deren Länge $L = 2500^{mm}$. Es ist dann nach Frml. (145a) für einen runden Schaft:

$$\frac{\Delta}{64} = 0{,}2\sqrt{\frac{2500}{64}} = 1{,}25, \text{ woraus}$$

die Stärke in der Mitte: $\Delta = 1{,}25 \,.\, 64 = 80^{mm}$.

Am Kurbelende wird hiermit:

$$\Delta_1 = 0{,}8 \,.\, 80 = 64^{mm} \text{ und am Kreuzkopfende:}$$
$$\Delta_2 = 0{,}7 \,.\, 80 = 56^{mm}.$$

Sollte die Stange mit rechteckigem Querschnitte ausgeführt werden, und würde hierfür $\frac{h}{b} = 2{,}5$ genommen, dann wäre nach (146):

$$\frac{b}{\Delta} = 0{,}88\sqrt{\frac{1}{2{,}5}} = 0{,}70, \text{ demnach}$$
$$b = 0{,}70 \,.\, 80 = 56^{mm} \text{ und}$$
$$h = 2{,}5 \,.\, 56 = 140^{mm}.$$

Setzt man für die Enden $b_1 = b_2 = b$, dann ist: $\frac{\Delta_1}{b} = \frac{64}{56} = 1{,}14$ und hiermit nach Frml. (146c):

$$\frac{h_1}{\Delta_1} = 0{,}59\,(1{,}14)^3 \sim 56^{mm}.$$

Digitized by Google

Hier tritt der Fall ein, daß h_1 im Vergleich mit b_1 sehr klein ausfällt; es ist demnach hier die oben angegebene praktische Regel der Verzeichnung durchzuführen. Noch mehr kommt dieses auf dem Kreuzkopfende zur Geltung und muß hier ebenso verfahren werden.

Für doppelt T Querschnitt nehmen wir:

$$\gamma = 10^{mm} \text{ und } \delta = 20^{mm}, \text{ sowie } H = h = 140^{mm} \text{ an}$$

und erhalten mit Frml. (147):

$$\frac{B}{b} = \sqrt[3]{\frac{140 - (144 - 2.20)\left(\frac{10}{56}\right)^3}{2.20}} = 1{,}53, \text{ damit}$$

$B = 56 . 1{,}53 = 85^{mm}$, während die Höhe $H = 140^{mm}$ bleibt.

Die Pleuelstangenköpfe sind nichts anderes als bewegliche Lager. Alle Regeln, welche früher in Bezug auf Form der Lagerschaalen, deren Dimensionen und Material gesagt worden sind, können auch hier angewendet werden.

Die Köpfe der Pleuelstangen sollten aus demselben Grunde wie die Schafte an den Kurbelenden solider gebaut werden, als an den Kreuzkopfenden.

In Bezug auf die Pleuelstangenköpfe unterscheidet man 2 Hauptarten, nämlich: 1) Geschlossene Köpfe, und 2) Offene Köpfe, je nachdem der Lagerkörper ohne oder mit Lagerdeckel, hier speciell Kappe genannt, ausgeführt ist. Ein geschlossener Lagerkopf ist jedenfalls solider und fester als ein offener und sollten aus diesem Grunde überall da, wo es irgend geht, geschlossene Lagerköpfe angewendet werden, wenigstens aber sollte man den an der Kurbel angreifenden Kopf als geschlossenen Kopf ausführen. Wenn jedoch dieses nicht möglich, dann sollte man den letzteren wenigstens so construiren, daß er mit einem geschlossenen Kopf nahezu gleichwerthig gesetzt werden kann.

Die Dimensionen der Köpfe sind im Folgenden auf den Kurbelzapfen einer Stirnkurbel bezogen, und liegt den auf Bl. LXXX gezeichneten Köpfen, die

Bezugseinheit $a = 0{,}2\ (d + 10) \ldots . (148)$

zu Grunde, während bei den Lagerschaalen die frühere Bezugseinheit

$e = 4 + 0{,}05\,d$ zu Grunde gelegt ist.

Auch hier sollten sowohl die Kappe als auch die Schaale in Richtung des Druckes stärker genommen werden. Bei den Schaalen ist in dieser Hinsicht die frühere Größe $e_1 = 6 + 0{,}07\,d$ angenommen worden.

Um die Dimensionen der Köpfe für Halszapfen (z. B. bei gekröpften Kurbelaxen), welche durch ein zu übertragendes Torsionsmoment, oder durch ein auf sie wirkendes Biegungsmoment, einen größeren Durchmesser als den eines gewöhnlichen Stirnkurbelzapfens erhalten, oder für einen Kreuzkopfzapfen, welcher wegen der doppelten Einspannung kleiner als der Stirnkurbelzapfen wird, zu bestimmen, können ganz dieselben Verhältnißzahlen benutzt werden, wie sie auf Bl. LXXX eingeschrieben sind, nur muß eine andere Bezugseinheit zu Grunde gelegt werden, welche nach Reuleaux aus der vorigen durch die Formel gefunden werden kann:

$$\frac{a_1}{a} = \sqrt{\frac{b}{b_1} \cdot \frac{\delta}{d}} \ldots (149),$$

wenn δ der Durchmesser des Hals- resp. Kreuzkopfzapfens, b_1 die Breite der Lagerkappe für das zu zeichnende Lager, b die Breite für eine dem ideellen Kurbelzapfendurchmesser d entsprechende Kappe wäre.

Digitized by Google

Die Lager müssen so construirt sein, daß die unvermeidliche Abnutzung wieder ausgeglichen werden kann.

Das Nachziehen der Lager geschieht meistens durch Keile; letztere müssen aber durch irgend einen Mechanismus gehindert werden, sich selbstthätig zu lösen. Dieses erreicht man dadurch, daß entweder der Keil an seinem dünnen Ende, der Dicke nach aufgespalten, und nach dem Einkeilen auseinander getrieben wird, oder was jedenfalls vorzuziehen ist, man stellt den Keil mittelst 1 oder 2 Druckschrauben fest. Für größere Dimensionen ist es vorzuziehen, das Anziehen und Festlegen durch Anwendung einer Schraube herzustellen.

Sind die Keile, wie bei den offenen Köpfen, auf Abscheerung in Anspruch genommen, dann ist es vortheilhaft, neben den Keil noch sogenannte Hakenkeile oder Haken zu legen. Diese nehmen die abscheerende Wirkung auf und ermöglichen ein Glattbleiben der Keilbahn, die Verjüngung, d. i. die Differenz der Breiten, den sogenannten Anzug des Keiles, kann man nach v. Reiche:

für Keile, welche mittelst einer Schraube angezogen werden, gleich 0,1 l, für Keile, welche durch Schlagen eingetrieben werden, gleich 0,05 l bis 0,06 l annehmen, wenn l die ganze Keillänge ist. Die Länge des Keiles richtet sich dann nach der gestatteten Abnutzung.

Um beim Nachtreiben durch Hämmern den Grat zu vermeiden, giebt man solchen Keilen abgerundete Köpfe; ebenso läßt man bei Keilen, die durch eine Schraube festgehalten werden, die letztern, um auch hier einen Grat unmöglich zu machen, in einen Schlitz, welcher parallel der festliegenden Gegenbahn der Keile zu machen ist, eingreifen. Die Schraube wird unten eben oder schwach ausgehöhlt abgedreht. (Siehe Fig. 14, Bl. LXXX.)

Die Bearbeitung der Pleuelstangen ist eine sehr schwierige, namentlich ist die Herstellung der genau parallelen Bohrung mit vielen Schwierigkeiten verknüpft; die letztere umgeht man, wenn man anstatt der cylindrischen Zapfen, wie schon früher angedeutet, Kugelzapfen wählt, oder wenn statt der gewöhnlichen Lager, bei Anwendung von cylindrischen Zapfen, Lager angewendet werden, deren äußere Begrenzungen, mit denen sie mit dem Lagerkopf in Berührung kommen, Theile von Cylinderflächen sind.

Auf Tafel LXXX sind diverse der besseren Pleuelstangenköpfe verzeichnet.

Fig. 5 zeigt einen oft angewendeten offenen Pleuelstangenkopf. Für denselben ist $d = 60^{mm}$ angenommen, woraus sich die Bezugseinheit $a = 0{,}2\,(d + 10) = 14^{mm}$ folgert. Die Wandstärke des Lagers ergiebt sich an seiner schwächsten Stelle $e = 2 + 0{,}05 \cdot 60 = 5^{mm}$, an der stärksten $e' = 4 + 0{,}07 \cdot 60 = 8^{mm}$. Schleifen sich bei diesem Pleuelstangenkopf die Lager aus, dann wird durch Nachkeilen die Kappe und damit auch das Lagermittel näher an die Stange gerückt. Bleibt der entgegengesetzte Kopf unverändert, so wird also durch ein Nachstellen eine Verkürzung der Mittelpunktsentfernungen der Lager hervorgebracht. Es sind bei diesem Kopf 2 Hakenkeile genommen, um die Keilbahnen beiderseits glatt zu erhalten.

Der sogenannte Gabelkopf (Fig. 6) verlegt ebenfalls beim Nachziehen den Mittelpunkt des Lagers näher an die Stange. Derselbe wird seiner einfachen Form wegen sehr häufig angewendet. Zum Feststellen des Keiles sind, weil dieser Kopf meistens am Kurbelzapfen angewendet wird, 2 Druckschrauben angenommen, welche jede die Stärke 0,8 a bekommen.

Digitized by Google

Ein sehr häufig für Kurbelzapfen verwendeter, mit einem geschlossenen Kopf beinahe gleichwerthiger Pleuelstangenkopf ist in Fig. 7 dargestellt. Derselbe wurde für den früher berechneten Kurbelzapfen der Kurbelaxe, dessen Durchmesser $d_1 = 108^{mm}$ sich ergab, berechnet. Auch hier war die Länge, gleich derjenigen des ideellen Stirnkurbelzapfens vom Durchmesser $d = 70^{mm}$, nämlich $l = 105$, damit wird aber die neue Kappenbreite b_1 gleich derjenigen für den ideellen Zapfen (in der Figur punktiert). Für letzteren ist die Bezugseinheit: $a = 0{,}2(70+10) = 16^{mm}$, demnach nach Formel (149) für den Kurbelzapfen vom Durchmesser 108^{mm}:

$$a_1 = a \sqrt{\frac{b}{b_1}\,\frac{\delta}{d}} = 16 \sqrt{1\,\frac{108}{70}} = 20^{mm}.$$

Bei diesem Kopf wird durch 2 Schwalbenschwanzkeile die Kappe fest mit dem Schaft verbunden. Der Keil drückt durch Vermittelung einer Druckplatte auf die Schaale, sodaß durch Anziehen des Keiles durch die Mutter der Lagermittelpunkt von der Stange abgerückt wird.

Wendet man an einer Stange einen Kopf nach Fig. 5 oder 6, einen nach Fig. 7 an, dann kann durch gleichzeitiges Nachstellen der Keile an beiden Köpfen, die Entfernung der Mittelpunkte constant erhalten werden.

Um dieses aber durch einen Kopf auch zu erreichen, hat man wie in Fig. 8 (dem sog. Bury'schen Kopf) 2 Keile angewendet. Durch den Keil (1) wird die Kappe näher an die Stange, durch den Keil 2 aber die Unterschaale weiter von derselben gedrückt. Wenn die Abnutzung bei beiden Schaalen gleich ist, dann brauchen nur beide Keile gleichmäßig angetrieben zu werden. Für ungleiche Abnutzungen kann man durch verschieden starkes Antreiben ebenfalls dasselbe erreichen.

Ist der Durchmesser des Zapfens ziemlich stark im Vergleich zum Stangendurchmesser, wie es bei verhältnißmäßig kurzen Stangen für Kurbelaxzapfen vorkommen kann, dann empfiehlt sich der in Fig. 9 gezeichnete Kurbelstangenkopf. (Derselbe findet vielfach Anwendung bei den Pleuelstangen der Schraubenschiffsmaschinen.) Das ganze Mittelstück ist von Rothguß, während die Ober- und Unterplatte von Schmiedeisen sind. Um ein Verschieben zu verhindern, sind die beiden Mittelstücke mit gedrehten Ansätzen versehen, welche in correspondirende Löcher der Befestigungsplatten eingreifen. Die Schrauben müssen unter allen Umständen gesichert sein, was entweder durch Doppelmutter oder durch die in Fig. 11, Bl. 19 gegebene Schraubensicherung geschehen kann.

Fig. 10 und 11 stellen zwei geschlossene Lagerköpfe dar. Die erste Anordnung wird vielfach bei Lenkstangen als auch bei den Excenterstangen angeordnet. Weil keine Seitenränder vorhanden sind, werden die Schaalen in einander gekämmt. Der Keil greift etwas in die Unterschaale ein, wodurch ein seitliches Verschieben verhindert wird. Beim Montiren werden erst die Schaalen um den Zapfen gelegt, und dann der Kopf über das Lager geschoben, erst dann der Keil eingesteckt.

Der Pleuelstangenkopf Fig. 11 wird vielfach verwendet. Bei ihm ist der Lagerkörper cylindrisch abgedreht, um etwaige Ungenauigkeiten beim Montiren auszugleichen. Werden beide Köpfe so gebildet, dann muß eine Vorrichtung angebracht sein, damit sich die Stange nicht gegen die Lager verdrehen kann, was leicht durch eingesetzte Stifte verhindert wird. Das eingezeichnete, mit einer schmiedeisernen Niete wieder zugearbeitete Loch, dient zum Ausbohren des Kopfes.

Digitized by Google

In Fig. 12 und 13 sind noch 2 Pleuelstangenschafte gezeichnet. Fig. 12 ist der oben für einen Kurbelzapfen von 60mm Durchmesser berechnete. Die Stange haben wir hier so construirt, daß sich die Höhen an den Enden an die Höhen der Köpfe gut anschließen.

Fig. 13 hat einen runden Querschnitt erhalten. Das Kurbelende hat einen Kopf für einen Stirnzapfen, während das andere Ende für einen Kreuzkopfzapfen (Fig. 14, Bl LXXIX) gabelförmig gestaltet ist.

Die Kappen für das gabelförmige Ende sind zwischen Leisten geführt, um der Lagerung mehr Sicherheit zu geben. Diese Gabeln haben einen bedeutenden Fehler, welcher darin besteht, daß ein gleichmäßiges Anziehen der beiden Keile wohl nie zu erreichen ist. Werden jedoch die Lager ungleich angezogen, so wird dadurch die Abnutzung ungleich, wodurch beide Lager nicht gleichmäßig zum Tragen kommen. Hierdurch wird aber die Pleuelstange in der Ebene der Gabel gebogen, wodurch ein stetiges Zittern in dem Mechanismus erzeugt wird.

Kolben und Kolbenstangen.

Kolben sind diejenigen Elemente der Dampfmaschinen und Pumpen, auf welche die zur Wirkung kommenden Flüssigkeiten (Dampf, Wasser) einen Druck ausüben, und durch deren geradlinig hin- und hergehende Bewegung die Maschine in Betrieb gesetzt wird.

Der Kolben besteht aus wesentlich 2 Theilen, nämlich dem eigentlichen Kolbenkörper und der Dichtung. Letztere ist derjenige Theil, welcher sich fest an die den Kolben umgebende Cylinderwand anlegt, und so einen Abschluß der auf beiden Seiten des Kolbens befindlichen Flüssigkeit herstellt. Als Dichtungsmaterial verwendet man Hanf, Leder oder Metall.

Die Hanfliderung kann nur zur Abdichtung von warmem oder kaltem Wasser oder schwach gespannten feuchten Dämpfen benutzt werden. Für hoch gespannten Dampf ist sie jedoch unbrauchbar, da sie bei der durch die Reibung an der Cylinderwand erzeugten Temperatur verkohlt. Ihre Hauptanwendung hat sie noch bei den Luftpumpen der Condensatoren.

Da sich mit der Zeit durch Abnutzung die Hanfliderung abschleift, muß dieselbe nachgezogen werden können. Dieses wird durch einen Deckel bewirkt, welcher durch Schrauben mit dem eigentlichen Kolbenkörper verbunden ist.

Die Höhe der Hanfdichtung kann

$$h = 40 + 0{,}04\,D \quad \ldots \quad (150),$$

sowie die Dicke $\delta = 10 + 0{,}03\,D \quad \ldots \quad (150^a)$

angenommen werden, wenn D der Cylinderdurchmesser ist.

Die Lederliderung darf nur bei Wind- und Kaltwasserpumpen angewendet werden. Die Liderung kann man als Scheiben-, Stulp- oder Manschettenliderung ausführen. Bei den ersten sind verschiedene Lederplatten übereinandergelegt, welche durch Ringe aneinander gepreßt werden. Damit sich die Lederringe besser an die Cylinderwand anlegen, ist es vortheilhaft, dieselben möglichst dünn zu halten und lieber 2 übereinander anzuordnen. Die Höhe jeder einzelnen Liderung kann dann

$$h = 4\,(10 + 0{,}01\,D)$$ angenommen werden.

Digitized by Google

Die Stulpliderung besteht aus einer Lederscheibe von sehr conischer Form (dieselbe wird unter einer Presse in die Form gebracht). Der untere Rand soll festgeklemmt sein, während der obere frei ist, damit das Wasser die Liderung selbstthätig an die Cylinderwand drückt.

Die Manschettenliderung besteht aus einem cylindrischen Ring und einer ebenen Platte, welche letztere nur zur Befestigung dient. In der Regel findet man zwei derselben aufeinander angebracht, angeordnet. Die Manschetten werden für kleine Dimensionen aus einem Stück Leder gepreßt. Bei großen Manschetten stellt man die nothwendige Form durch Zusammennähen her. Als Schmiermaterial derartiger mit Ledermanschetten versehener Kolben verwendet man Graphitpulver.

Zu Metallliderungen, den am häufigsten verwendeten, wird Gußeisen, Stahl, Schmiedeisen oder Rothguß genommen. Meistens wählt man das weiche Gußeisen, und zwar namentlich seiner Billigkeit sowie seiner leichten Bearbeitung wegen.

Bei Kalt- oder Warmwasserpumpen darf jedoch nur Rothguß oder Weißmetall angeordnet werden, weil Eisen zu leicht mit den benachbarten Eisentheilen zusammenrostet.

In Bezug auf Metalldichtung unterscheidet man freie Liderung oder tragende Liderung, je nachdem dieselbe sich in ihrem innern Umfang nicht gegen den Kolbenkörper preßt, oder von ihm, durch irgend einen Mechanismus, eine radiale Pressung erfährt, welche sich auf die Cylinderwand fortpflanzt. Beide Arten der Liderungen sind in den Figuren auf Tafel LXXX angeordnet und sollen bei Erklärung der betr. Kolben mit besprochen werden.

Die freie Liderung wird meistens bei stehenden Dampfcylindern angewendet, während die tragende Liderung stets bei horizontal liegenden Kolbenstangen verwendet werden sollte, vorausgesetzt, daß sie nur durch eine Stopfbüchse geführt wird. Wird sie jedoch in beiden Cylinderdeckeln geführt, dann ist wieder eine freie Liderung vorzuziehen.

Der Kolbenkörper wird entweder aus Gußeisen, Schmiedeisen, Gußstahl oder Rothguß hergestellt. Rothguß wird nur bei solchen Kolbenkörpern angewendet, bei denen durch das umgebende Medium der eiserne Kolbenkörper leicht rosten könnte.

Aus Schmiedeisen oder Gußstahl stellt man den Kolben her, um ihn möglichst leicht zu machen, ein Haupterforderniß für horizontal liegende Kolbenstangen, welche sich, weun die Liderung und die Innenwand des Cylinders abgeschliffen, durch ihr eigenes Gewicht und durch das Kolbengewicht durchbiegen, und dadurch natürlich die Reibungen in den Stopfbüchsen vergrößern. Diese Kolben werden entweder aus dem Vollen gedreht, oder es wird die Aussparung bereits beim Schmieden unter dem Dampfhammer angebracht.

Gußeiserne Kolben werden nur bei sehr kleinen Dimensionen voll gegossen. Bei größern ordnet man den Kolbenkörper hohl an.

Für Kolben, welche gegen eine expandirbare Flüssigkeit arbeiten, müssen sämmtliche Hohlräume vermieden werden. Es müssen dieselben dann durch Deckel verschlossen werden. Diese Deckel werden entweder aus Blech oder Gußeisen hergestellt und mit dem Kolbenkörper verschraubt.

Angeschraubte Kolbendeckel sollten, wo irgend möglich, umgangen werden,

Digitized by Google

weil in Kolben, welche nur mit einer ebenen Platte versehen sind, leicht beim Guß Spannungen eintreten. Vollkommen hohl gegossene Kolbenkörper sind daher besser. Um den Kern zu entfernen, und auch um beim Guß die Gase entweichen zu lassen. müssen im Deckel Löcher gelassen werden, welche später durch Bleche oder Messingbolzen verschlossen werden.

Die Befestigungsschrauben müssen so angeordnet sein, daß sie nicht festrosten; man wendet daher meistens Messingmuttern an. Um auch den Kolbendeckel, welcher leicht festrosten kann, entfernen zu können, läßt man ihn die Nabe nicht cylindrisch, sondern etwas konisch umschließen. Vortheilhaft ist es auch, Druckschrauben anzuwenden, durch deren Anziehen der Kolbendeckel von dem Körper abgehoben wird, ohne ihn durch Eintreiben eines Meißels zwischen Deckel und Liderung lösen zu müssen.

Die Kolbenstange ist entweder nur auf absolute oder auf absolute und rückwirkende Festigkeit beansprucht. Die erstere Beanspruchung findet bei einfach wirkenden Maschinen statt, d. h. bei solchen Maschinen, bei denen der Kolben von der treibenden Flüssigkeit nur in einer Richtung bewegt wird. Die Bewegung in entgegengesetzter Richtung wird durch Gegengewichte oder angehängte Massen erreicht. Die Kolbenstange wird hier so angeordnet, daß sie nur auf Zug in Anspruch genommen wird. Ist D der Cylindermesser, dann ist, wenn p die Spannung der Flüssigkeit in Atmosphären ausdrückt:

$$D^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{100},$$ der hinter dem Kolben wirkende Druck

demnach, da dieser von der Kolbenstange fortgeleitet, also von ihr ausgehalten wird, ist nach Formel 1, pag. 17:

$$D^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{100} = \frac{d_1^2 \pi \cdot s_1}{4},$$

wenn d_1 der Durchmesser der Kolbenstange, s_1 die Materialspannung ist.

Setzt man hierin für Schmiedeisen: $s_1 = 6$ Kgr., so erhält man:

$$d_1^2 = \frac{D^2 p}{6 \cdot 100} \text{ oder } d_1 = 0{,}04\, D \sqrt{p} \ldots (151^a).$$

Für Gußstahl mit $l_1 = 12$ würde man

$$b_1 = 0{,}03\, D \sqrt{p} \ldots (151^b) \text{ erhalten.}$$

Ist die Kolbenstange auf rückwirkende Festigkeit beansprucht, so hat man sich zuerst wieder über die anzuwendende Formel Rechenschaft zu geben. Wir glauben, der Beanspruchung der Kolbenstange genügt am meisten die Formel

$$P = 2\pi^2 \frac{J \cdot E}{L_3^2},$$ entsprechend dem früher besprochenen

dritten Fall. Die Kolbenstange wird am Kolbenende durch den Kolben und durch die Stopfbüchse an 2 Punkten geradlinig geführt, sie kann sich bei eintretender Biegung nicht beliebig deformiren, sondern die elastische Linie ist gezwungen, am Kolbenende sich tangential der geraden Führungslinie anzuschmiegen. Am andern, dem Kreuzkopfende, ist die Kolbenstange nur gezwungen in der geraden Führungsrichtung zu bleiben, wogegen jedoch eine Biegung beliebig eintreten kann.

Wenden wir obige Formel an, so haben wir unter Benutzung des Sicherheitscoefficienten σ die Tragfähigkeit

Digitized by Google

$$P = \frac{2\pi^2 EJ}{\sigma L_3^2} \text{ oder da } P = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{p}{100} \text{ ist:}$$

$$\frac{\pi}{4} \frac{D^2 p}{100} = \frac{2\pi^2 E \cdot \frac{\pi}{64} d_1^4}{\sigma L_3^2}, \text{ woraus:}$$

$$\frac{d_1^4}{D^4} = \frac{16\sigma}{2\pi^2 \cdot 100 F} \cdot p \cdot \frac{L_3^2}{D^2}.$$

Setzt man für Schmiedeisen, wie bei den Pleuelstangen, $\sigma = 25$, $E = 20000$, so wird:

$$\frac{d}{D} = 0{,}056 \sqrt[4]{p} \sqrt{\frac{L_3}{D}} \quad \ldots \quad (152^a).$$

Für Gußstahl mit $E = 27500$ ergiebt sich:

$$\frac{d}{D} = 0{,}052 \sqrt[4]{p} \sqrt{\frac{L_3}{D}} \quad \ldots \quad (152^b).$$

Eine praktische Formel erhält man auch, wenn man den Durchmesser d_1 mit dem Kurbelzapfendurchmesser in Beziehung setzt. Für diesen hatten wir:

$$P \frac{l}{2} = \frac{\pi}{32} b^3 \cdot s, \text{ oder da } s = 6^{kgr} \text{ ist: } P = \frac{3\pi}{8} \frac{b^3}{l}.$$

Setzt man die, den beiden gleiche Kräfte P entsprechenden Werthe für beide Durchmesser einander gleich, so findet sich:

$$\frac{3\pi}{8} \frac{b^3}{l} = \frac{2\pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi}{64} d_1^4}{\sigma \cdot L_3^2}$$

oder mit $\sigma = 25$, $E = 20000^{kgr}$, sowie $\frac{l}{b} = 1{,}5$.

Für Schmiedeisen:

$$\frac{d_1}{b} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 25 \cdot 3}{1{,}5 \cdot \pi^2 \cdot 20000}} \sqrt{\frac{L_3}{b}} = 0{,}178 \sqrt{\frac{L_3}{b}} \quad \ldots \quad (153).$$

Für Gußstahl, mit $E = 27500$:

$$\frac{d_1}{b} = 0{,}164 \sqrt{\frac{L_3}{b}} \quad \ldots \ldots \quad (153^b).$$

Hierbei ist stets unter L_3 die größte Länge der Kolbenstange verstanden, welche außerhalb der Stopfbüchse sich befindet, also näherungsweise die Schublänge des Kolbens oder der doppelte Kurbelradius.

Die Kolbenstange wird mit dem Kolbenkörper entweder mittelst Keiles oder Schraube und Mutter verbunden. Um die Stange möglichst solid zu befestigen, wird das Ende der Kolbenstange conisch angesetzt und in die Nabe des Kolbens eingeschliffen. Selten wird die Kolbenstange cylindrisch eingesetzt, in diesem Fall muß nothwendig ein Bund oder Ansatz vorhanden sein, welcher beim conischen Einsetzen fehlen darf. Die Richtung des Conus richtet sich nach der Art der Montage oder Demontage. Man soll dieselbe so anordnen, daß sie leicht befestigt und gelöst werden könne. Die Neigung des Conus nehme man ca. 1 : 80. Für schwache Stangen, welche außerdem noch einen sehr schwach conischen Ansatz erhalten, genügt es, dieselben durch Vernieten zu befestigen. Eingeschraubt werden die Stangen in neuerer Zeit wohl wenig mehr, wenn jedoch die Methode noch

Digitized by Google

angewendet wird, dann ist es nöthig, durch einen eingebohrten Stift das selbstthätige Lösen des Gewindes zu verhindern.

Für die auf Bl. LXXX gezeichneten Kolben gilt die Reuleaux'sche Bezugseinheit

$$s = 4\sqrt[4]{D+1} - 3.$$

Fig. 15 stellt einen Kolben für Hanfliderung dar. Der ganze Kolben ist hohl gegossen und im Innern zur Versteifung mit Rippen versehen. Die Muttern für die Schrauben, zum Nachziehen des Ringes, sind aus Messing, um das Festrosten zu verhindern. Dieselben sind mit Ansätzen versehen, und können von der Seite in den Kolbenkörper eingelegt werden.

Fig. 16 und 16a zeigt einen Kolben mit Klappenventil und Stulpliderung, wie er häufig bei einfach wirkenden Kaltwasserpumpen angewendet wird. Der Befestigungsring wird durch die Brücke A angespannt, welche letztere durch einen Keil, der durch die unten mit rechteckigem Querschnitt ausgeführte Kolbenstange getrieben ist, angezogen wird. Eine auf dem Kolben liegende Brücke B hat den Zweck, die beiden Klappenventile mit dem Kolben zu verbinden. Letztere bestehen aus Lederplatten, welche zur Verleihung von Steifigkeit mit schmiedeisernen Platten versehen sind.

Einen combinirten Scheiben- und Manschetten-Kolben, ebenfalls für Kaltwasserpumpen, giebt Fig. 17 im Durchschnitt. Die Lederplatten als auch die Manschetten, werden durch gußeiserne Platten zusammengepreßt. Zwischen der Manschette und der Platte sollte ein kleiner Spielraum sein, in welchen das Wasser eindringen kann, damit letzteres die Dichtung selbst an die Cylinderwand preßt.

Der sog. Ramsbatton'sche Kolben ist in Fig. 18 gezeichnet. Die Liderung ist eine freie. Es werden gewöhnlich 3 bis 5 solcher gußstählerner Ringe, welche eine Höhe von 6 bis 10mm und eine Dicke von 8 bis 13mm haben, angewendet. Die Ringe werden gewöhnlich aus einem vollen Cylinder, dessen äußerer Durchmesser auf ca. 1,1 D abgedreht wird, abgestochen. Aus dem Ringe wird ein entsprechend großes Stück herausgeschnitten, damit derselbe in den Cylinder geht, und nach dem Zusammendrücken genügend Elasticität besitzt. In den Kolben, welcher in Fig. 18 aus Schmiedeisen und mit der Stange aus einem Stück gebildet ist, werden entsprechende Nuten gedreht; beim Einlegen der Ringe in die Nuten werden dieselben über den Kolben geschoben. Die Vorzüge des Kolbens sind seine Einfachheit und Leichtigkeit. Er wird meistens bei schnellgehenden Maschinen mit kurzem Hube verwendet.

Fig. 18a stellt den Querschnitt eines Dichtungsringes in wirklicher Größe dar. Hinter dem Ringe muß natürlich ein wenig Spielraum sein, damit beim Einschieben des Kolbens in den Cylinder die Ringe etwas zusammengedrückt werden können.

In Fig. 19 ist ein Dampfkolben in $^1/_{10}$ natürlicher Größe dargestellt, bei dem die beiden gußeisernen Dichtungsringe durch einen dritten, hinter ihnen liegenden gußeisernen Ring an die Cylinderwandung gepreßt werden. Die beiden Dichtungsringe haben überall gleiche Wandstärke, während der Preßring mit variabler Wandstärke construirt ist. Derselbe wird an seiner schwächsten Stelle aufgeschnitten, nachdem er am inneren Umfang überhämmert worden ist, um ihm die nöthige Elasticität zu geben

Digitized by Google

Um das Eindringen des Dampfes in das Innere des Kolbenkörpers zu verhüten, sind hinter die Dichtungsringe schmiedeiserne oder stählerne Plättchen genietet. Die Plättcheu dürfen jedoch nur mit dem einen Ende eines aufgeschnittenen Ringes fest verbunden sein, damit das Ausspannen des Ringes ermöglicht bleibt. Die Muttern für die Deckelbefestigung sind aus Messing und können vor Einlegen der Ringe von der Seite in den Kolbenkörper gelegt werden. Auch die Befestigungsmutter für die Kolbenstange ist aus demselben Material, um auch hier das Anrosten zu vermeiden.

Fig. 19ª stellt die Schnittfuge der Ringe mit der Sicherung in $^1/_4$ der natürlichen Größe vor.

Statt der in Fig. 19 angeordneten Preßvorrichtung kann auch die in Fig. 20 dargestellte angewendet werden.

Die Liderungsringe werden hier durch 2 Keile auseinandergepreßt, welche durch Federn angedrückt werden, die sich selbst wieder gegen die Liderungsringe stützen. Hier liegen zum Unterschiede von der vorigen Anordnung, wo die Schnittfugen an gleicher Seite lagen, dieselben diametral gegenüber.

Die Keile selbst werden aus Messing gemacht, ebenso auch die Preßschraube und zugehöriger Muttern. Die Federn bestehen aus Stahl, welcher gehärtet wird.

Die Liderungsringe sind in Bezug auf den innern Umfang excentrisch, und zwar an der Stelle am schwächsten, wo der Keil angreift. Der Keil erhält eine Spitzenneigung von 60°.

In Fig. 21 ist endlich noch ein sog. schwedischer Kolben gezeichnet. Die Ringe sind hier aus recht homogenem Gußeisen oder Rothguß, und an allen Stellen von constanter Stärke. Die Federkraft wird hier durch Ueberhämmern mittelst eines Niethammers oder einem Hammer, dessen Bahn stark kurgelförmig ist, an der inneren Seite hervorgebracht. Die Ringe werden mit einer Säge durchschnitten. Die Enden der Liderungsringe dichtet man entweder nach der Art der Fig. 21ª oder 21ᵇ. In ersterer bedeuten die kleinen eingezeichneten Kreise das herausgeschnittene Material. Es werden nämlich die Ringe größer gegossen und abgedreht, und dann die eingezeichneten Rechtecke fortgenommen.

Wird jedoch, wie in Fig. 21ᵇ, die Schnittfuge geradlinig genommen, dann muß, um den dadurch hergestellten Durchströmungscanal wieder zu verschließen, eine sog. Zunge entweder aus Gußeisen, oder wie in Fig. 21 dargestellt, aus Messing eingeschliffen werden, welche mit der dahinterliegenden Stahlplatte, die selbst nur mit einem Ende des Ringes vernietet ist, durch Schrauben oder Nieten verbunden wird.

Ende.

Druck: Herm. J. Kamm in Leipzig.

Digitized by Google

Verlag von Moritz Schäfer in Leipzig.

Die Mühle.

Zeitschrift für die Interessen der deutschen Mühlenindustrie.

Die neuesten Fortschritte im Mühlwesen und den damit verwandten Geschäftszweigen.

Organ

des Verbandes deutscher Müller und der Müllerei-Berufs-Genossenschaft.

24. Jahrgang. Mit vielen Abbildungen.

Preis pro Jahr 10 M.

Musikalischer Hausschatz. — 30,000 Exemplare verkauft.

CONCORDIA.

Anthologie klassischer Volkslieder für Pianoforte und Gesang.

I. Band eleg. gebunden 7 Mark.

Diese Sammlung, welche über 1200 unserer herrlichsten Volkslieder enthält, hilft einem längst gefühlten Bedürfniss ab, indem sie alle Lieder, älteren und neueren Ursprungs, welche bis jetzt zerstreut waren, mit Text, Melodie und Harmonie vereinigt, bietet. Die beiden letzteren sind so innig verwebt, dass sie bequem am Pianoforte ausgeführt werden können und auch ohne Gesang als „Lieder ohne Worte" vieles Vergnügen bereiten.

Robert Wittmann's

Unterrichtsbriefe für das Pianoforte

in progressiver Folge

bis zur

Höhe der vollkommensten Eleganz u. Korrektheit, Technik u. Nüancierung.

Nach den Grundsätzen der grössten Meister arrangiert.

In 50 Briefen à 30 Pfg.

Wittmann's Unterrichtsbriefe sind das beste Lehrmittel für den Pianoforte-Unterricht. Sie bilden für den Lehrer den vorzüglichsten Leitfaden und bieten in Ermangelung eines Lehrers den vollständigsten Ersatz.

MONNAYES RUSSES

des derniers trois siècles

depuis le czar Joan Wasiliewicz Groznyi jusqu'à l'empereur Alexander II.

1547—1855.

PAR LE GÉNÉRAL T. F. DE SCHUBERT.

2 volumes (Text und Atlas). Preis 72 M.

Dieses ausgezeichnete geschichtlich-numismatische Werk, welches nur in einer Auflage von 300 Exemplaren erschien, steht in seiner Litteratur einzig und allein, und kann Allen, die sich für Münzlitteratur interessieren, auf das Angelegentlichste empfohlen werden, da vorauszusetzen ist, dass schon in Kürze dieses Werk (in Folge der kleinen Auflage) zu den seltenen Büchern gezählt werden wird.

Digitized by Google

Verlag von Moritz Schäfer in Leipzig.

Neueste illustrirte

Münz-, Maass- und Gewichtskunde.

Authentische Abbildung und Beschreibung der jetzt kursierenden

Gold- und Silbermünzen aller Länder.

Fünfte neu bearbeitete Auflage.

Herausgegeben von **K. W. Kunis.**

Gr. 8° mit 66 Tafeln. Eleg. brosch. Preis 18 Mark.

Das Werk enthält ausser einer übersichtlichen Darstellung der verschiedenen **Münzsysteme**, die naturgetreuesten Abbildungen der **jetzt kursierenden Gold- und Silbermünzen aller Länder der Erde**, unter Angabe ihres wirklichen Wertes und ihrer Geltung in den für den Handel wichtigsten Währungen der Welt.

Reich illustriertes Kochbuch.

„Gouffé"

Die feine Küche.

Ein Lehr- und Handbuch der Kochkunst, Küchenbäckerei und Einmachekunst

in allen ihren Teilen.

Zweite, nach den Lehren der grössten Meister der deutschen, französischen und englischen Küche **durchaus neu bearbeitete Auflage.**

Mit 246 Abbildungen und 17 Farbendruckbildern. — 2 Bände 20 Mark.

GRAMMATIK DER CHEMIGRAPHIE

nebst Lexikon des nützlichen und Wissenswerten auf chemigraphischem Gebiete.

Mit 8 Tafeln Probe-Illustrationen und vielen in den Text gedruckten Holzschnitten

Herausgeg. v. **Louis Berndt,** Zeichner, Holzschneider u. Chemigraph.

8°. Preis eleg. brosch. 4 Mark.

Der Dampfbetrieb.

Hand- und Lehrbuch

der

Erzeugung und Verwendung des Dampfes zum Maschinenbetrieb sowie der dabei angewandten Maschinen und Apparate.

Für Industrielle, Techniker, Maschinenwärter, Heizer etc.

Mit zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen und 21 lithographierten Tafeln.

Herausgegeben von **Theodor Schwartze,** Ingenieur.

Gr. 8°. Preis eleg. brosch. 10 M.

Digitized by Google

Digitized by Google

89088908868

B89088908868A

Digitized by Google

Digitized by Google

b89088908868a

Digitized by Google